VSAQ PQ QUESTIONS

మాత్రికలు

1. ఒక మాత్రికలో 24 మూలకాలు ఉంటే, అది ఏఏ సాధ్యమైన తరగతులను కలిగి ఉండవచ్చు? దానిలో 13 మూలకాలుంటే ఏమి అవుతుంది?

2. $X+Y=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 0 & 9\end{bmatrix}$ మరియు $X-Y=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ అయితే X, Y లను కనుక్కోండి.

3. $a_{ij}=\frac{i}{j}$ గా ఇవ్వబడిన మూలకాలతో ఒక 2×2 మాత్రిక, $A=[a_{ij}]$ను నిర్మించండి.

4. $a_{ij}=\frac{1}{2}|i-3j|$ గా ఇవ్వబడిన మూలకాలతో ఒక 3×2 మాత్రికను నిర్మించండి.

5. $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ అయితే AB కనుక్కోండి.

6. $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix}$ అయితే, BA కనుక్కోండి.

7. $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$ ను గణించండి.

8. $\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ ను గణించండి.

9. x యొక్క ఏ విలువలకు, $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\\ x\end{bmatrix}=O$ అవుతుంది.

నిర్ధారకాలు

10. $\begin{vmatrix}x^2-x+1 & x-1\\ x+1 & x+1\end{vmatrix}$ ను గణించండి

11. $\begin{vmatrix}2 & 4\\ 5 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & 4\\ 6 & x\end{vmatrix}$ అయితే x విలువ ను కనుక్కోండి.

12. $\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix}$ నిర్ధారకములో గల మూలకాల యొక్క లఘు నిర్ధారకాలు మరియు సహగుణావయవాలను రాయండి.

13. $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ మాత్రిక అనుబంధాన్ని కనుక్కోండి.

14. $\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ మాత్రిక యొక్క విలోమాన్ని (వ్యవస్థితమైతే) కనుక్కోండి.

BABY BULLET-Q AP

సదిశా బీజగణితం

15. కింది రాశులను అదిశలు, సదిశలుగా వర్గీకరించండి.
i) చేసిన పని ii) స్థానభ్రంశం

16. $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} - 3\hat{k}$ యొక్క పరిమాణం గణించండి.

17. సదిశ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ దిశలో యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.

18. ఇవ్వబడిన $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}, \vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ సదిశలకు, సదిశ $\vec{a} + \vec{b}$. దిశలో యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.

19. సదిశ $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ దిశలో 7 యూనిట్ల పరిమాణం గల ఒక సదిశను కనుక్కోండి.

20. $\vec{a}$ ఒక యూనిట్ సదిశ $(\vec{x} - \vec{a})\cdot(\vec{x} + \vec{a}) = 8$ అయితే $|\vec{x}|$ కనుక్కోండి.

21. $A(-2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}), B(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}), C(7\hat{i} - \hat{k})$ బిందువులు సరేఖీయాలని చూపండి.

22. సదిశ $7\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ పై సదిశ $\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ యొక్క విక్షేపం కనుక్కోండి.

23. $\vec{a} = \hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}, \vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ అయితే $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ను కనుక్కోండి.

త్రిపరిమాణ జ్యామితి

24. X, Y, Z-అక్షాలతో ధనదిశలో వరసగా $90°, 60°, 30°$ కోణాలు చేయు రేఖ దిక్కొసైన్లు కనుక్కోండి.

25. $\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$, $\vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ జత రేఖల మధ్య కోణం కనుక్కోండి.

26. $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$ మరియు $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$ జత రేఖల మధ్య కోణం కనుక్కోండి.

27. $\frac{4-x}{3} = \frac{2y+1}{2} = \frac{z-1}{5}$ మరియు $\frac{2x+1}{2} = \frac{3-y}{2} = \frac{3z-1}{3}$ రేఖలు ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉంటాయని చూపండి.

28. $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}, \frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ రేఖలు లంబంగా ఉంటే p విలువ కనుక్కోండి.

సంభావ్యత

29. ఒక నాణేన్ని మూడుసార్లు ఎగురవేసినప్పుడు P(E|F) ను కనుక్కోండి. ఇక్కడ
E : గరిష్ఠంగా రెండు బొరుసులు రావడం, F : కనీసం ఒక బొరుసు రావడం

BABY BULLET-Q AP

అవిచ్ఛిన్నత, అవకలనీయత

30. x దృష్ట్యా $\sin(\log x)$, $x > 0$ ను అవకలనం చేయండి.

31. x దృష్ట్యా $e^{\sin^{-1}x}$ ను అవకలనం చేయండి.

32. $y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ను కనుక్కోండి.

33. $x = a\sec\theta, y = b\tan\theta$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ను కనుక్కోండి.

34. $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 + \cos\theta)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ను కనుక్కోండి.

35. x^{20} యొక్క ద్వితీయ పరిమాణ అవకలజంను కనుక్కోండి.

అవకలజాల అనువర్తనం

36. $f(x) = 7x - 3$ గా ఇవ్వబడిన ప్రమేయం, R పై ఆరోహణమని చూపండి.

37. $(0, \infty)$ పై సంవర్గమాన ప్రమేయం ఆరోహణమని నిరూపించండి.

38. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ గా ఇవ్వబడిన ప్రమేయం R లో ఆరోహణమని నిరూపించండి.

39. $f(x) = \sin x$ గా ఇవ్వబడిన ప్రమేయం $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ లో ఆరోహణము అని చూపండి.

40. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ గా ఇవ్వబడిన ప్రమేయం
(a)ఆరోహణము (b) అవరోహణము అయ్యే అంతరాలను కనుక్కోండి

41. ఒక గాలి బుడగ యొక్క వ్యాసార్ధం సెకనుకు 1/2 సెం.మీ. చొప్పున పెరుగుతోంది. దాని వ్యాసార్ధం 1సెం.మీ. అయినప్పుడు గాలి బుడగ యొక్క ఘనపరిమాణం ఏ రేటుతో పెరుగుతూ ఉంటుంది?

సమాకలనం

42. $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}$ యొక్క సమాకలనంను కనుక్కోండి.

43. $\int \operatorname{cosec} x(\operatorname{cosec} x + \cot x)dx$ ను కనుక్కోండి.

44. $\frac{\sin x}{1+\cos x}$ యొక్క సమాకలనంను కనుక్కోండి.

45. $\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ యొక్క సమాకలనంను కనుక్కోండి.

46. $\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ యొక్క సమాకలనంను కనుక్కోండి.

47. $\frac{(1+\log x)^2}{x}$ యొక్క సమాకలనంను కనుక్కోండి.

BABY BULLET-Q AP

48. $\int \frac{dx}{x^2-16}$ ను గణన చేయండి.

49. $\int_1^2 x^5 dx$ ను గణన చేయండి.

50. $\int_0^1 e^x dx$ ను కనుక్కోండి.

51. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$ ను గణన చేయండి.

52. $\int_2^8 |x-5|\, dx$ ను గణన చేయండి.

అవకలజాల అనువర్తనం

53. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6y = \log x$ యొక్క పరిమాణం మరియు తగరతులను కనుక్కోండి.

54. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 7y = \sin x$ యొక్క పరిమాణం మరియు తగరతులను కనుక్కోండి.

55. $y''' + 2y'' + y' = 0$ యొక్క పరిమాణం మరియు తగరతులను నిర్ధారించండి.

56. $y'' + 2y' + \sin y = 0$ యొక్క పరిమాణం మరియు తగరతులను నిర్ధారించండి.

57. $\frac{dy}{dx} = (1+x^2)(1+y^2)$ యొక్క సార్వత్రిక సాధనను కనుక్కోండి.

BABY BULLET-Q AP

VSAQ PQ SOLUTIONS

మాత్రికలు

1. ఒక మాత్రికలో 24 మూలకాలు ఉంటే, అది ఏఏ సాధ్యమైన తరగతులను కలిగి ఉండవచ్చు? దానిలో 13 మూలకాలుంటే ఏమి అవుతుంది?

Sol: కాబట్టి, 24 మూలకాలను కలిగిన ఒక మాత్రిక యొక్క అన్ని సాధ్యమయ్యే తరగతులను కనుగొనడానికి, లబ్ధం 24 వచ్చేలా ఉండే సహజ సంఖ్యల అన్ని క్రమ యుగ్మాలను మనం కనుగొనాలి.

ఆ క్రమ యుగ్మాలు: $(1,24),\ (24,1),\ (2,12),\ (12,2),\ (3,8),\ (8,3),\ (4,6),\ (6,4)$

కావున, 24 మూలకాలను కలిగిన మాత్రిక యొక్క సాధ్యమయ్యే తరగతులు:

$(1\times24),(24\times1),(2\times12),(12\times2),(3\times8),(8\times3),(4\times6),(6\times4).$

13 ఒక ప్రధాన సంఖ్య, కాబట్టి లబ్ధం 13 వచ్చేలా మనకు కేవలం 2 క్రమ యుగ్మాలు మాత్రమే లభిస్తాయి.

అవి (1×13) and (13×1)

---

2. $\mathbf{X+Y}=\begin{bmatrix}\mathbf{5} & \mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{9}\end{bmatrix}$ మరియు $\mathbf{X-Y}=\begin{bmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{6}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-1}\end{bmatrix}$ అయితే X, Y లను కనుక్కోండి.

Sol: $(X+Y)+(X-Y)=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 0 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 6\\ 0 & -1\end{bmatrix}.$

$$2X=\begin{bmatrix}5+3 & 2+6\\ 0+0 & 9-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 8\\ 0 & 8\end{bmatrix}$$

$$\therefore X=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}8 & 8\\ 0 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 4\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

అలాగే, $(X+Y)-(X-Y)=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 0 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 6\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow 2Y=\begin{bmatrix}5-3 & 2-6\\ 0 & 9+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 0 & 10\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Y=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -4\\ 0 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$

BABY BULLET-Q AP

3. $a_{ij} = \frac{i}{j}$ గా ఇవ్వబడిన మూలకాలతో ఒక 2×2 మాత్రిక, $A = [a_{ij}]$ను నిర్మించండి.

Sol: ఒక 2×2 మాత్రిక $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ గా ఇవ్వబడింది.

దత్తాంశం నుండి $a_{ij} = \frac{i}{j};\ i, j = 1, 2$

$\therefore a_{11} = \frac{1}{1} = 1;\quad a_{12} = \frac{1}{2};\quad a_{21} = \frac{2}{1} = 2;\quad a_{22} = \frac{2}{2} = 1$

కాబట్టి, కావలసిన మాత్రిక $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

---

4. $a_{ij} = \frac{1}{2}|i - 3j|$ గా ఇవ్వబడిన మూలకాలతో ఒక 3×2 మాత్రికను నిర్మించండి.

Sol: ఒక 3×2 మాత్రిక $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ గా ఇవ్వబడింది.

దత్తాంశం నుండి $a_{ij} = \frac{1}{2}|i - 3j|, i = 1, 2, 3$ మరియు $j = 1, 2.$

$\therefore a_{11} = \frac{1}{2}|1 - 3\times1| = 1;\quad a_{12} = \frac{1}{2}|1 - 3\times2| = \frac{5}{2}$

$a_{21} = \frac{1}{2}|2 - 3\times1| = \frac{1}{2};\ a_{22} = \frac{1}{2}|2 - 3\times2| = 2$

$a_{31} = \frac{1}{2}|3 - 3\times1| = 0;\quad a_{32} = \frac{1}{2}|3 - 3\times2| = \frac{3}{2}$

కాబట్టి, కావలసిన మాత్రిక $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

---

5. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ అయితే AB కనుక్కోండి.

Sol: $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\times3 + (-1)0 & 0(5) + (-1)(0) \\ 0(3) + 2(0) & (0)(5) + 2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

గమనిక: కాబట్టి, రెండు మాత్రికల లబ్ధం శూన్య మాత్రిక అయినంత మాత్రాన, వాటిలో ఏదో ఒక మాత్రిక కచ్చితంగా శూన్య మాత్రిక కావాల్సిన అవసరం లేదు.

BABY BULLET-Q AP

6. $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix}$ అయితే, BA కనుక్కోండి.

Sol: $BA=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1(2)+3(3) & 1(4)+3(2)\\ -2(2)+5(3) & -2(4)+5(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+9 & 4+6\\ -4+15 & -8+10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 10\\ 11 & 2\end{bmatrix}$

---

7. $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$ ను గణించండి.

Sol: $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1(1)-2(2) & 1(2)-2(3) & 1(3)-2(1)\\ 2(1)+3(2) & 2(2)+3(3) & 2(3)+3(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -4 & 1\\ 8 & 13 & 9\end{bmatrix}$

---

8. $\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ ను గణించండి.

Sol: $\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3(2)-1(1)+3(3) & 3(-3)-1(0)+3(1)\\ -1(2)+0(1)+2(3) & -1(-3)+0(0)+2(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & -6\\ 4 & 5\end{bmatrix}$

---

9. x యొక్క ఏ విలువలకు, $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\\ x\end{bmatrix}=O$ అవుతుంది.

Sol: దత్తాంశం నుండి $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\\ x\end{bmatrix}=O$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}1+4+1 & 2+0+0 & 0+2+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\\ x\end{bmatrix}=[0]$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}6 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\\ x\end{bmatrix}=[0]\Rightarrow\begin{bmatrix}6(0)+2(2)+4(x)\end{bmatrix}=[0]$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}4+4x\end{bmatrix}=[0]\Rightarrow 4+4x=0\Rightarrow 4x=-4\Rightarrow x=-1$

BABY BULLET-Q AP

నిర్ధారకాలు

10. $\begin{vmatrix} x^2-x+1 & x-1 \\ x+1 & x+1 \end{vmatrix}$ ను గణించండి

Sol: $\begin{vmatrix} x^2-x+1 & x-1 \\ x+1 & x+1 \end{vmatrix} = (x^2-x+1)(x+1)-(x-1)(x+1)$ $\left[\because \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc\right]$

$= x^3 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \cancel{x} - \cancel{x} + 1 - (x^2-1) = x^3 + 1 - x^2 + 1 = x^3 - x^2 + 2$

---

11. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ అయితే x విలువ ను కనుక్కోండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ $\left[\because \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc\right]$

$\Rightarrow 2\times1-5\times4 = 2x\times x - 6\times4 \Rightarrow 2-20 = 2x^2-24 \Rightarrow 2x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

---

12. $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ నిర్ధారకములో గల మూలకాల యొక్క లఘు నిర్ధారకాలు మరియు సహగుణావయవాలను రాయండి.

Sol: దత్త నిర్ధారకం $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

a_{ij} మూలకం యొక్క లఘు నిర్ధారకం M_{ij}

M_{11}= a_{11} యొక్క లఘు నిర్ధారకం = d; M_{12}= a_{12} యొక్క లఘు నిర్ధారకం = b;

M_{21} = a_{21} యొక్క లఘు నిర్ధారకం = c; M_{22}= a_{22} యొక్క లఘు నిర్ధారకం = a

a_{ij} యొక్క సహగుణావయం $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$A_{11} = (-1)^{1+1}(d) = d$; $A_{12} = (-1)^{1+2}(b) = -b$

$A_{21} = (-1)^{2+1}(c) = -c$; $A_{22} = (-1)^{2+2}(a) = a$

---

13. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ మాత్రిక అనుబంధాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{11} = 4;\quad A_{12} = -3 \qquad A_{21} = -2;\quad A_{22} = 1$

$\therefore \text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

BABY BULLET-Q AP

14. $\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ మాత్రిక యొక్క విలోమాన్ని (వ్యవస్థితమైతే) కనుక్కోండి.

Sol: $A=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ అనుకొనుము.

అప్పుడు , $|A|=(-1\times 2)-(5\times -3)=-2+15=13$

ఇప్పుడు, $A_{11}=2;\ A_{12}=3$

$A_{21}=-5;\ A_{22}=-1$

కావున, $\text{adj}\,A=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ $\therefore A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{adj}\,A=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}2 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}$

సదిశా బీజగణితం

15. కింది రాశులను అదిశలు, సదిశలుగా వర్గీకరించండి.

i) చేసిన పని **ii)** స్థానభ్రంశం

Sol: i) చేసిన పని - అదిశ ii) స్థానభ్రంశం - సదిశ

---

16. $\vec{b}=2\hat{i}-7\hat{j}-3\hat{k}$ యొక్క పరిమాణం గణించండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $\vec{b}=2\hat{i}-7\hat{j}-3\hat{k}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(2)^2+(-7)^2+(-3)^2}=\sqrt{4+49+9}=\sqrt{62}.$

---

17. సదిశ $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ దిశలో యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.

Sol: ఒక సదిశ దిశలో ఉండే ప్రమాణ సదిశ అని మనకు తెలుసు.

$\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ is $\hat{a}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}}{\sqrt{1+1+4}}\Rightarrow\ \hat{a}=\frac{\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{j}+\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{k}.$

---

18. ఇవ్వబడిన $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}, \vec{b}=-\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ సదిశలకు, సదిశ $\vec{a}+\vec{b}$. దిశలో యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చిన సదిశలు $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ మరియు $\vec{b}=-\hat{i}+\hat{j}-\hat{k};$

$\therefore \vec{a}+\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}-\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}=\hat{i}+0\hat{j}+\hat{k}\ \ \therefore|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(1)^2+(0)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$

$\therefore\ \vec{a}+\vec{b}$ దిశలో ఉండే ప్రమాణ సదిశ $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}=\frac{\hat{i}+0\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{2}}=\frac{\hat{i}+\hat{k}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}.$

BABY BULLET-Q AP

19. సదిశ $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ దిశలో 7 యూనిట్ల పరిమాణం గల ఒక సదిశను కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చిన సదిశ $\vec{a}$ దిశలో ఉండే ప్రమాణ సదిశ $\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{i} - 2\hat{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}$

ఇప్పుడు పరిమాణం 7 కలిగిన సదిశ $\vec{a}$ దిశలో ఉండే సదిశ $7\hat{a}$ అవుతుంది.

$$\therefore 7\hat{a} = 7\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}\right) = \frac{7}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{14}{\sqrt{5}}\hat{j}$$

---

20. $\vec{a}$ ఒక యూనిట్ సదిశ $(\vec{x} - \vec{a})\cdot(\vec{x} + \vec{a}) = 8$ అయితే $|\vec{x}|$ కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చినదాన్ని బట్టి $\vec{a}$ ఒక ప్రమాణ సదిశ $\Rightarrow |\vec{a}| = 1 \Rightarrow (\vec{x} - \vec{a})\cdot(\vec{x} + \vec{a}) = 8$

$\Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{x} + \cancel{\vec{x}\cdot\vec{a}} - \cancel{\vec{a}\cdot\vec{x}} - \vec{a}.\vec{a} = 8 \Rightarrow |\vec{x}|^2 - 1 = 8 \Rightarrow |\vec{x}|^2 = 9$

$\therefore |\vec{x}| = 3$ (సదిశ యొక్క పరిమాణం ఎప్పుడూ ఋణాత్మకం కాదు/ ధనాత్మకంగా ఉంటుంది.)

---

21. $A(-2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k})$, $B(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$, $C(7\hat{i} - \hat{k})$ బిందువులు సరేఖీయాలని చూపండి.

Sol: దత్త బిందువులు $\overrightarrow{AB} = (1+2)\hat{i} + (2-3)\hat{j} + (3-5)\hat{k} = 3\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$

$$\overrightarrow{BC} = (7-1)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (-1-3)\hat{k} = 6\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k} \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{AC} = (7+2)\hat{i} + (0-3)\hat{j} + (-1-5)\hat{k} = 9\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k} \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{14}$$

ఇక్కడ, $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$.

కావున, బిందువులు A, B, C సరేఖీయాలు.

---

22. సదిశ $7\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ పై సదిశ $\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ యొక్క విక్షేపం కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చిన సదిశలు $\vec{a} = i + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ మరియు $\vec{b} = 7\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ అనుకొందాం.

$$\vec{b}$$ పై సదిశ $\vec{a}$ యొక్క విక్షేపం $= \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1(7) + 3(-1) + 7(8)}{\sqrt{7^2 + (-1)^2 + 8^2}} = \frac{7 - 3 + 56}{\sqrt{49 + 1 + 64}} = \frac{60}{\sqrt{114}}$

---

23. $\vec{a} = \hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ అయితే $\vec{a} \times \vec{b}$ ను కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చిన సదిశలు $\vec{a} = \hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$ మరియు $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -7 & 7 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(-14 + 14) - \hat{j}(2 - 21) + \hat{k}(-2 + 21) = 19\hat{j} + 19\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{19^2 + 19^2} = \sqrt{2 \times (19)^2} = 19\sqrt{2}$$

BABY BULLET-Q AP

త్రిపరిమాణ జ్యామితి

24. **X, Y, Z-అక్షాలతో ధనదిశలో వరసగా 90°, 60° , 30° కోణాలు చేయు రేఖ దిక్‌కొసైన్లు కనుక్కోండి.**

Sol: దత్త రేఖ దిక్ కొసైన్లు l, m, n లని అనుకుంటే .

అప్పుడు, $l = \cos 90^0 = 0, m = \cos 60^0 = 1/2, \quad n = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

---

25. $\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$, $\vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ **జత రేఖల మధ్య కోణం కనుక్కోండి.**

Sol: $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ మరియు $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda\vec{b}_2$ రేఖల మధ్య కోణం $\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1.\vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right|$ ద్వారా ఇవ్వబడింది.

ఇక్కడ, $\vec{b}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ మరియు $\vec{b}_2 = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$

$$\therefore \cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right| = \left|\frac{(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{9+4+36}}\right| = \left|\frac{3+4+12}{3\times 7}\right| = \frac{19}{21} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$$

---

26. $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$ **మరియు** $\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$ **జత రేఖల మధ్య కోణం కనుక్కోండి.**

Sol: మొదటి రేఖ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $(a_1, b_1, c_1) = (3, 5, 4)$

రెండవ రేఖ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $(a_2, b_2, c_2) = (1, 1, 2)$

వాటి మధ్య కోణం θ అయితే, అప్పుడు, $\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right|$

$$= \left|\frac{3.1 + 5.1 + 4.2}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}}\right| = \frac{16}{\sqrt{50}\sqrt{6}} = \frac{16}{5\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{3}}{15}$$

కాబట్టి, కావలసిన కోణం, $\cos^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{15}\right)$

BABY BULLET-Q APP

27. $\frac{4-x}{3}=\frac{2y+1}{2}=\frac{z-1}{5}$ మరియు $\frac{2x+1}{2}=\frac{3-y}{2}=\frac{3z-1}{3}$ రేఖలు ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉంటాయని చూపండి.

Sol: ఇచ్చిన సరేఖల సమీకరణాలు $\frac{4-x}{3}=\frac{2y+1}{2}=\frac{z-1}{5}\Rightarrow\frac{x-4}{-3}=\frac{y+1/2}{1}=\frac{z-1}{5}$

$\frac{2x+1}{2}=\frac{3-y}{2}=\frac{3z-1}{3}\Rightarrow\frac{x+1/2}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1/3}{1}$

ఇక్కడ, $a_1=-3, b_1=1, c_1=5$ మరియు $a_2=1, b_2=-2, c_2=1$

a_1,b_1,c_1 మరియు a_2,b_2,c_2 దిక్ సంఖ్యలు కలిగిన రెండు రేఖలు పరస్పరం లంబంగా ఉండాలంటే,

$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$. కావాలి.

ఇక్కడ, $(-3)1+1(-2)+5(1)=-3-2+5=0$

∴ ఇచ్చిన రేఖలు పరస్పరం లంబంగా ఉన్నాయి.

---

28. $\frac{1-x}{3}=\frac{7y-14}{2p}=\frac{z-3}{2}, \frac{7-7x}{3p}=\frac{y-5}{1}=\frac{6-z}{5}$ రేఖలు లంబంగా ఉంటే p విలువ కనుక్కోండి.

Sol: ప్రామాణిక రూపంలో రేఖల సమీకరణాలు:

$\frac{1-x}{3}=\frac{7y-14}{2p}=\frac{z-3}{2}\Rightarrow\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{\frac{2p}{7}}=\frac{z-3}{2}$ మరియు $\frac{7-7x}{3p}=\frac{y-5}{1}=\frac{6-z}{5}\Rightarrow\frac{x-1}{\frac{-3p}{7}}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-6}{-5}$

ఈ రేఖల దిక్ సంఖ్యలు $a_1=-3, b_1=\frac{2p}{7}, c_1=2; a_2=\frac{-3p}{7}, b_2=1, c_2=-5$

ఆ రెండు రేఖలు పరస్పరం లంబంగా ఉన్నందున, మనకు వస్తుంది:

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0\Rightarrow(-3)\left(\frac{-3p}{7}\right)+\left(\frac{2p}{7}\right)1+2(-5)=0$$

$$\Rightarrow\frac{9p}{7}+\frac{2p}{7}-10=0\Rightarrow\frac{11}{7}p=10\Rightarrow11p=10\times7\Rightarrow p=\frac{70}{11}$$

BABY BULLET-Q AP

సంభావ్యత

29. ఒక నాణేన్ని మూడుసార్లు ఎగురవేసినప్పుడు P(E|F) ను కనుక్కోండి. ఇక్కడ
E : గరిష్ఠంగా రెండు బొరుసులు రావడం, F : కనీసం ఒక బొరుసు రావడం

Sol: **E :** గరిష్ఠంగా రెండు బొరుసులు $\Rightarrow E=\{TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT, HHH\}$ $\therefore n(E)=7$

F : కనీసం ఒక బొరుసు$\Rightarrow F=\{THH, HTH, HHT, TTH, THT, HTT, TTT\}$ $\therefore n(F)=7$

కావున, $E\cap F=\{TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT\} \Rightarrow n(E\cap F)=6$

ఇప్పుడు, $P(E)=\frac{7}{8}, P(F)=\frac{n(F)}{n(S)}=\frac{7}{8}, P(E\cap F)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

$$\therefore P(E/F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{8}}=\frac{3}{4}\times\frac{8}{7}=\frac{6}{7}.$$

అవిచ్ఛిన్నత, అవకలనీయత

30. x దృష్ట్యా sin (log x), x > 0 ను అవకలనం చేయండి.

Sol: $y=\sin(\log x)$ అనుకుందాం.

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\cos(\log x)\cdot\frac{d}{dx}(\log x)=\frac{\cos(\log x)}{x}$$

---

31. x దృష్ట్యా $e^{\sin^{-1}x}$ ను అవకలనం చేయండి.

Sol: $y=e^{\sin^{-1}x}$ అనుకుందాం.

$$\therefore \frac{dy}{dx}=e^{\sin^{-1}x}\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=e^{\sin^{-1}x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1) \qquad \left[\because \frac{d}{dx}e^{f(x)}=e^{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)\right]$$

---

32. $y=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0<x<1$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ను కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చిన ప్రమేయం $y=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0<x<1$ $\quad x=\tan\theta$ ప్రతిక్షేపించగా,

$$\therefore \quad y=\cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)=\cos^{-1}(\cos 2\theta)$$

$$y=2\theta=2\tan^{-1}x (\because \ x=\tan\theta\Rightarrow\theta=\tan^{-1}x) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=2\frac{1}{1+x^2}=\frac{2}{1+x^2}$$

BABY BULLET-Q AP

33. $x = a \sec\theta, y = b \tan\theta$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ను కనుక్కోండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $x = a\sec\theta, \quad y = b\tan\theta$. θ దృష్ట్యా సమీకరణములను అవకలనం చేయగా

$\frac{dx}{d\theta} = a\sec\theta\tan\theta$ మరియు $\frac{dy}{d\theta} = b\sec^2\theta$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{b\sec^2\theta}{a\sec\theta\tan\theta} = \frac{b\sec\theta}{a\tan\theta} = \frac{b\cdot\frac{1}{\cos\theta}}{a\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{b}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{b}{a\sin\theta} = \frac{b}{a}\operatorname{cossec}\theta$$

---

34. $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 + \cos\theta)$ అయితే $\frac{dy}{dx}$ ను కనుక్కోండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1+\cos\theta)$. θ దృష్ట్యా సమీకరణములను అవకలనం చేయగా

$$\frac{dx}{d\theta} = a\frac{d}{d\theta}(\theta - \sin\theta) = a\left[\frac{d}{d\theta}\theta - \frac{d}{d\theta}\sin\theta\right] = a(1-\cos\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a\frac{d}{d\theta}(1+\cos\theta) = a\left[\frac{d}{d\theta}(1) + \frac{d}{d\theta}(\cos\theta)\right] = a(0-\sin\theta) = -a\sin\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{-a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = -\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = -\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = -\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = -\cot\frac{\theta}{2}.$$

---

35. x^{20} యొక్క ద్వితీయ పరిమాణ అవకలజంను కనుక్కోండి.

Sol: $y = x^{20}$ అనుకొందాం. $\therefore \frac{dy}{dx} = 20x^{19}$. మళ్ళీ x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 20\times19x^{18} = 380x^{18}$$

BABY BULLET-Q AP

అవకలజాల అనువర్తనం

36. $f(x) = 7x - 3$ గా ఇవ్వబడిన ప్రమేయం, R పై ఆరోహణమని చూపండి.

Sol: R లో x_1 మరియు x_2 అనేవి ఏవైనా రెండు సంఖ్యలు అనుకొందాం.

అప్పుడు, $x_1 < x_2 \Rightarrow 7x_1 < 7x_2 \Rightarrow 7x_1 - 3 < 7x_2 - 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$\therefore$ R పై $f(x)$ ఆరోహణము.

---

37. $(0, \infty)$ పై సంవర్గమాన ప్రమేయం ఆరోహణమని నిరూపించండి.

Sol: ఇచ్చిన ప్రమేయం $f(x) = \log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$x > 0$ కొరకు $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$

కావున, ప్రమేయం అంతరం $(0,\infty)$ లో ఖచ్చితంగా ఆరోహణ ప్రమేయం అవుతుంది.

---

38. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ గా ఇవ్వబడిన ప్రమేయం R లో ఆరోహణమని నిరూపించండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$

$x \in R, (x-1)^2 \geq 0$ కొరకు. కాబట్టి, R లో $f'(x)$ ఎల్లప్పుడూ ధనాత్మకం.

$\therefore$ R పై $f(x)$ ఆరోహణము.

---

39. $f(x) = \sin x$ గా ఇవ్వబడిన ప్రమేయం $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ లో ఆరోహణము అని చూపండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ కొరకు. $\Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0.$

$\therefore \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ లో $f(x)$ ఆరోహణము.

---

40. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ గా ఇవ్వబడిన ప్రమేయం

(a)ఆరోహణము (b) అవరోహణము అయ్యే అంతరాలను కనుక్కోండి

Sol: దత్తాంశం నుండి $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$

$\Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x^2 - x - 6) = 6(x+2)(x-3)$

$\therefore f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2, 3$

$(-\infty, -2)$ మరియు $(3,\infty), f'(x) > 0$ లలో, $(-2,3)$ లో $f'(x) < 0$

$\therefore$ f ప్రమేయం $(-\infty,-2), (3,\infty)$ లలో ఆరోహణం మరియు $(-2,3)$ లో అవరోహణం అవుతుంది.

BABY BULLET-Q AP

41. ఒక గాలి బుడగ యొక్క వ్యాసార్ధం సెకనుకు 1/2 సెం.మీ. చొప్పున పెరుగుతోంది. దాని వ్యాసార్ధం 1సెం.మీ. అయినప్పుడు గాలి బుడగ యొక్క ఘనపరిమాణం ఏ రేటుతో పెరుగుతూ ఉంటుంది?

Sol: వృత్తం కొరకు, వ్యాసార్ధం = r మరియు వైశాల్యం V అనుకొనుము.

దత్తాంశం నుండి $\frac{dr}{dt}=\frac{1}{2}cm/s$, we have to find $\frac{dV}{dt}$ at r=1

వైశాల్యం $V=\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt}=\frac{4}{\cancel{3}}\pi\cancel{3}r^2\frac{dr}{dt}=4\pi(1)^2\frac{1}{2}=2\pi\ cm^3/s$

సమాకలనం

42. $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}$ యొక్క సమాకలనంను కనుక్కోండి.

Sol: $x^4=t\Rightarrow 4x^3dx=dt$

$$\therefore\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{4}\sin^{-1}t+C=\frac{1}{4}\sin^{-1}(x^4)+C$$

---

43. $\int$**cosecx(cosecx + cotx)dx** ను కనుక్కోండి. **[BMP]**

Sol: $\int(\text{cosec}\,x(\text{cosec}\,x+\cot x)dx=\int\text{cosec}^2xdx+\int\text{cosec}x\cot xdx=-\cot x-\text{cosec}x+C$

---

44. $\frac{\sin x}{1+\cos x}$ యొక్క సమాకలనంను కనుక్కోండి.

Sol: $1+\cos x=t\Rightarrow -\sin x dx=dt$

$$\Rightarrow\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx=\int-\frac{dt}{t}=-\log|t|+C=-\log|1+\cos x|+C$$

---

45. $\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ యొక్క సమాకలనంను కనుక్కోండి.

Sol: $1+\sin x=t\Rightarrow \cos x dx=dt$

$$\therefore\int\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{1+\sin x}+C$$

BABY BULLET-Q AP

46. $\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ యొక్క సమాకలనంను కనుక్కోండి.

Sol: $\sin^{-1}x = t \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = dt$ $\quad \therefore \int \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\sin^{-1}x)^2}{2} + C$

---

47. $\frac{(1+\log x)^2}{x}$ యొక్క సమాకలనంను కనుక్కోండి.

Sol: $1+\log x = t \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt$ $\quad \therefore \int \frac{(1+\log x)^2}{x}dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(1+\log x)^3}{3} + C$

---

48. $\int \frac{dx}{x^2-16}$ ను గణన చేయండి.

Sol: $\int \frac{dx}{x^2-16} = \int \frac{dx}{x^2-4^2} = \frac{1}{8}\log\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + C$

---

49. $\int_1^2 x^5 dx$ ను గణన చేయండి.

Sol: $I = \int_1^2 x^5 dx = \left[\frac{x^6}{6}\right]_1^2 = \frac{2^6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{64-1}{6} = \frac{63}{6} = \frac{21}{2}$

---

50. $\int_0^1 e^x dx$ ను కనుక్కోండి.

Sol: $I = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$

---

51. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$ ను గణన చేయండి.

Sol; $x^2 + 1 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt$

$x = 0$ అయినప్పుడు మనకు $t = 1$ వస్తుంది మరియు $x = 1$ అయినప్పుడు మనకు $t = 2$ వస్తుంది.

$\therefore \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}[\log|t|]_1^2 = \frac{1}{2}[\log 2 - \log 1] = \frac{1}{2}\log 2$

BABY BULLET Q AP

52. $\int_2^8 |x-5|\,dx$ ను గణన చేయండి.

Sol: $I=\int_2^8 |x-5|dx$ అనుకొందాం.

$[2, 5]$ అంతరంలో $(x-5)\le 0$ మరియు $[5, 8]$ అంతరంలో $(x-5)\ge 0$ అయినందున

$$I=\int_2^5 -(x-5)dx+\int_5^8 (x-5)dx \qquad \left(\because \int_a^b f(x)=\int_a^c f(x)+\int_c^b f(x)\right)$$

$$=-\left[\frac{x^2}{2}-5x\right]_2^5+\left[\frac{x^2}{2}-5x\right]_5^8=-\left[\frac{25}{2}-25-2+10\right]+\left[32-40-\frac{25}{2}+25\right]=9$$

అవకలజాల అనువర్తనం

53. $\frac{d^2y}{dx^2}+5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-6y=\log x$ యొక్క పరిమాణం మరియు తగరతులను కనుక్కోండి.

Sol: $\frac{d^2y}{dx^2}+5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-6y=\log x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}+5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-6y-\log x=0$

ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణంలో గరిష్ఠ పరిమాణ అవకలజం $\frac{d^2y}{dx^2}$. ∴ అవకలన సమీకరణం పరిమాణం 2.

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ఘాతం 1. ∴ అవకలన సమీకరణం తరగతి 1.

---

54. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+7y=\sin x$ యొక్క పరిమాణం మరియు తగరతులను కనుక్కోండి.

Sol: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+7y=\sin x \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^3-4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+7y-\sin x=0$

ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణంలో గరిష్ఠ పరిమాణ అవకలజం $\frac{dy}{dx}$ ∴ అవకలన సమీకరణం పరిమాణం 1.

$\frac{dy}{dx}$ ఘాతం 3 . ∴ అవకలన సమీకరణం తరగతి 3.

---

55. $y''' + 2y'' + y' = 0$ యొక్క పరిమాణం మరియు తగరతులను నిర్ధారించండి.

Sol: ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణం $y'''+2y''+y'=0$

ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణంలో గరిష్ఠ పరిమాణ అవకలజం y''' ∴ అవకలన సమీకరణం పరిమాణం 3.

ఇది y''' ,y'' మరియు y' లలో ఒక బహుపది సమీకరణం. ఇక్కడ y''' యొక్క అత్యున్నత ఘాతం 1

కావున, అవకలన సమీకరణం యొక్క తరగతి 1.

BABY BULLET-Q AP

56. $y'' + 2y' + \sin y = 0$ యొక్క పరిమాణం మరియు తగరతులను నిర్ధారించండి.

Sol: ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణం $y'' + 2y' + \sin y = 0$

ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణంలో గరిష్ఠ పరిమాణ అవకలజం y". ∴ అవకలన సమీకరణం పరిమాణం 2.

ఇది y" మరియు y' లలో ఒక బహుపది సమీకరణం. ఇక్కడ y" యొక్క అత్యున్నత ఘాతం 1

కావున, అవకలన సమీకరణం యొక్క తరగతి 1.

---

57. $\frac{dy}{dx} = (1+x^2)(1+y^2)$ యొక్క సార్వత్రిక సాధనను కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణం $\frac{dy}{dx} = (1+x^2)(1+y^2) \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = (1+x^2)dx$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా, $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int (1+x^2)dx$

$$\Rightarrow \tan^{-1} y = \int dx + \int x^2 dx \Rightarrow \tan^{-1} y = x + \frac{x^3}{x} + C$$

BABY BULLET-Q AP