SHINING STARS'

SAQ స్టార్ ప్లస్ ప్రశ్నలు

సంబంధాలు & ప్రమేయాలు

1. $f(x)=\begin{cases}x+1, x \text{ బేసి సంఖ్య అయితే,}\\ x-1, x \text{ సరి సంఖ్య అయితే}\end{cases}$ గా ఇవ్వబడిన $f: N \to N$ అన్వేకము మరియు సంగ్రస్థమని చూపండి.

2. $f: N \to N$ ప్రతి $n \in N$కు $f(n)=\begin{cases}\frac{n+1}{2}, n \text{ బేసి సంఖ్య అయితే}\\ \frac{n}{2}, n \text{ సరి సంఖ్య అయితే}\end{cases}$ గా నిర్వచించబడినది అనుకోంది. ఈ ప్రమేయము ద్విగుణ ప్రమేయమవుతుందా? మీ సమాధానమును సమర్థించండి.

3. $A = R - \{3\}$ మరియు $B = R - \{1\}$అనుకోండి.$f: A \to B$ ప్రమేయమును, ప్రతి $x \in A$ కు $f(x)=\left(\frac{x-2}{x-3}\right)$ గా నిర్వచిస్తే అది అన్వేకము మరియు సంగ్రస్థమవుతుందా? మీ జవాబును సమర్థించండి.

4. సమితి $A = \{x \in Z : 0 \le x \le 12\}$ లో $R = \{(a, b): |a - b|$ అనేవి 4 యొక్క గుణకం. **[BMP]**

5. $f: \{2, 3, 4, 5\} \to \{3, 4, 5, 9\}$ మరియు $g: \{3, 4, 5, 9\} \to \{7, 11, 15\}$ ప్రమేయములు $f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = f(5) = 5$ మరియు $g(3) = g(4) = 7$ and $g(5) = g(9) = 11$ గా నిర్వచింపబడినవి అనుకోండి. gof ను కనుక్కోండి.

విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు

6. $\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right)=\frac{x}{2}, x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$అని నిర్ధారించండి.

7. $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}x, -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$ అని నిర్ధారించండి.

మాత్రికలు

8. $\begin{bmatrix}a-b & 2a+c\\ 2a-b & 3c+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 0 & 13\end{bmatrix}$ సమీకరణం నుండి a, b, c, d విలువలు కనుక్కోండి.

9. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -4\\ 2 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$ అయితే **A(BC), (AB)C** కనుక్కోని **(AB)C = A(BC)** అని చూపండి.

BABY BULLET-Q AP

సంభావ్యత

10. ఒక పాత్రంలో 10 నల్లని మరియు 5 తెల్లని బంతులు కలవు. తీసిన బంతిని తిరిగి పాత్రలో చేర్చకుండా పాత్ర నుండి రెండు బంతులను ఒకదాని తరువాత ఒకటి తీసారు. తీసిన రెండు బంతులూ నల్లనివి కావడానికి సంభావ్యత ఎంత?

11.

అవిచ్ఛిన్నత, అవకలనీయత

12. $f(x) = \begin{cases} 2x+3, x \le 2 \text{ అయితే} \\ 2x-3, x > 2 \text{ అయితే} \end{cases}$ f,యొక్క అన్ని అన్ని విచ్ఛిన్నతా బిందువులను కనుక్కోండి.

13. $f(x) = \begin{cases} x+5, & x \le 1 \text{ అయితే} \\ x-5, & x > 1 \text{ అయితే} \end{cases}$ గా నిర్వచింపబడిన f ప్రమేయం ఒక అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయమా?

14. $f(x) = \begin{cases} 3, & 0 \le x \le 1 \text{ అయితే} \\ 4, & 1 < x < 3 \text{ అయితే} \\ 5, & 3 \le x \le 10 \text{ అయితే} \end{cases}$ గా నిర్వచితమైన f ప్రమేయం యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను చర్చించండి.

15. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \ne 0 \text{ అయితే} \\ 0, & x = 0 \text{ అయితే} \end{cases}$ గా నిర్వచితమైన f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయమేమో కనుక్కోండి.

16. $f(x) = \begin{cases} \frac{k\cos x}{\pi - 2x}, & \text{if } x \ne \frac{\pi}{2} \\ 3, & \text{if } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $x = \frac{\pi}{2}$ వద్ద ప్రమేయం f అవిచ్ఛిన్నమయ్యేందుకు గల k విలువను కనుక్కోండి.

సమాకలనం అనువర్తనాలు

17. $y = |x+3|$ గ్రాఫ్‌ను గీయండి మరియు $\int_{-6}^{0} |x+3| dx$ ను గణించండి.

BABY BULLET-Q AP

SHINING STARS'

SAQ స్టార్ ప్లస్ ప్రశ్నలు

సంబంధాలు & ప్రమేయాలు

1. $f(x)=\begin{cases}x+1, x \text{ బేసి సంఖ్య అయితే,}\\ x-1, x \text{ సరి సంఖ్య అయితే}\end{cases}$ గా ఇవ్వబడిన $f: N \to N$ అన్వేకము మరియు సంగ్రస్థమని చూపండి.

Sol: **Case i:** x బేసి సంఖ్య అయినప్పుడు $f(x) = x+1$; $x= 1,3,5,....$ అనుకొనుము.

$\Rightarrow f(1) = 1+1=2;\ f(3) = 3+1=4;\ f(5) = 5+1=6;$

$\therefore\ (1,2), (3,4), (5,6),.....\in f$ .....(1)

Case ii: x సరి సంఖ్య అయినప్పుడు $f(x)=x-1$; $x= 2,4,6,....$అనుకొనుము.

$\Rightarrow f(2) = 2-1=1;\ f(4) =4-1=3;\ f(6) =6-1=5$

$\therefore\ (2,1), (4,3), (6,5),.....\in f$ .....(2)

(1) & (2) నుండి $f = \{(1,2), (2,1), (3,4), (4,3), (5,6), (6,5),....\}$....(3)

(3)నుండి, ప్రదేశం N లోని విభిన్న మూలకాలకు విభిన్న ప్రతిబింబాలు ఉన్నాయని స్పష్టమవుతోంది.

$\therefore f$ అన్వేకం.

అలాగే సహ ప్రదేశం N లోని అన్ని మూలకాలకు $\{1,2,3,....\}$ ప్రదేశం N లోని పూర్వప్రతిబింబాలు ఉన్నాయి.

$\therefore f$ సంగ్రస్థం.

---

2. $f: N \to N$ ప్రతి $n \in N$కు $f(n)=\begin{cases}\frac{n+1}{2}, n \text{ బేసి సంఖ్య అయితే}\\ \frac{n}{2}, n \text{ సరి సంఖ్య అయితే}\end{cases}$ గా నిర్వచించబడినది అనుకోంది. ఈ ప్రమేయము ద్విగుణ ప్రమేయమవుతుందా? మీ సమాధానమును సమర్థించండి..

Sol: **Case i:** బేసి సంఖ్యలు $n=1,3,5,....$ కు $f(n)=\frac{n+1}{2}$

$\therefore f(1)=\frac{1+1}{2}=1; f(3)=\frac{3+1}{2}=2; f(5)=\frac{5+1}{2}=3; \Rightarrow f= \{(1,1), (3,2), (5,3),.....\}$.....(1)

Case ii: సరి సంఖ్యలు $n=2,4,6,....$ కు $f(n)=\frac{n}{2}$

$\therefore f(2)=\frac{2}{2}=1; f(4)=\frac{4}{2}=2; f(6)=\frac{6}{2}=3; \Rightarrow f= \{(2,1), (4,2), (6,3),.....\}$.....(2)

(1) , (2) నుండి $f= \{(1,1), (2,1),(3,2), (4,2),(5,3),(6,3),....\}$.....(3)

a) (3) నుండి $f(1) =1, f(2)=1$

ఈ విధంగా ప్రదేశం N లోని 1,2 అనే విభిన్న మూలకాలకు ఒకే ప్రతిబింబం ఉంది. $\therefore f$ అన్వేకం కాదు.

b) (3) నుండి వ్యాప్తి సమితి $= \{1,1,2,2,3,3,.....\} = \{1,2,3,....\}$

$\Rightarrow f$ వ్యాప్తి $= \{1,2,3,.....\}$ = సహ ప్రదేశం N $\therefore f$ సంగ్రస్థం

$\therefore f$ సంగ్రస్థం కాని అన్వేకం కాదు. కావున ద్విగుణ ప్రమేయం కాదు.

BABY BULLET-Q AP

3. **$A = R - \{3\}$ మరియు $B = R - \{1\}$అనుకోండి.$f : A \to B$ ప్రమేయమును, ప్రతి $x \in A$ కు $f(x) = \left(\frac{x-2}{x-3}\right)$ గా నిర్వచిస్తే అది అన్వేకము మరియు సంగ్రస్థమవుతుందా? మీ జవాబును సమర్థించండి.**

Sol: దత్తాంశం నుండి $A = R - \{3\}, B = R - \{1\}$ లకు $f : A \to B$ అనేది $f(x) = \left(\frac{x-2}{x-3}\right)$గా నిర్వచించబడినది.

a) $f(x_1) = f(x_2)$ అయ్యేటట్లు $x_1, x_2 \in A$ అని తీసుకొనగా

$$\Rightarrow \frac{x_1-2}{x_1-3} = \frac{x_2-2}{x_2-3} \Rightarrow (x_1-2)(x_2-3) = (x_2-2)(x_1-3)$$

$$\Rightarrow \cancel{x_1x_2} - 3x_1 - 2x_2 + \cancel{6} = \cancel{x_1x_2} - 3x_2 - 2x_1 + \cancel{6}$$

$$\Rightarrow -3x_1 - 2x_2 = -3x_2 - 2x_1 \Rightarrow 3x_1 - 2x_1 = 3x_2 - 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \therefore f \text{ అన్వేకం}$$

b) దత్తాంశం నుండి $f(x) = \left(\frac{x-2}{x-3}\right)$.....(1). $f(x) = y$ అని రాయగా

$$\Rightarrow y = \frac{x-2}{x-3} \Rightarrow x - 2 = xy - 3y \Rightarrow x(1-y) = -3y + 2 \Rightarrow x = \frac{2-3y}{1-y} \text{ exists } \forall\ y \in B = R - \{1\}$$

$\therefore f$ సంగ్రస్థం

నిరూపణ: (1) నుండి, $f(x) = f\left(\frac{2-3y}{1-y}\right) = \frac{\left(\frac{2-3y}{1-y}\right) - 2}{\left(\frac{2-3y}{1-y}\right) - 3} = \frac{2-3y-2+2y}{2-3y-3+3y} = \frac{-y}{-1} = y$

కావున $f(x)$ అన్వేకం మరియు సంగ్రస్థం.

---

4. **సమితి $A = \{x \in Z : 0 \le x \le 12\}$ లో $R = \{(a, b): |a - b|$ అనేవి 4 యొక్క గుణకం.$\}$గా నిర్వచించబడిన ప్రతి సంబంధం R ఒక తుల్య సంబంధమని చూపండి. 1 తో సంబంధం కలిగిన అన్ని మూలకాల సమితిని ప్రతీ సందర్భంలోను కనుక్కొండి.** **[BMP]**

Sol: దత్తాంశం నుండి $A = \{x \in Z : 0 \le x \le 12\} \Rightarrow A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

$R = \{(a, b): |a - b|$ అనేవి 4 యొక్క గుణకం$\}$

(i) $(a,a) \in R \ \forall\ a \in A$. కావున R పరావర్తనం [$\because |a-a| = 0$ మరియు 0 అనేది 4 యొక్క గుణిజం]

(ii) $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$. కావున R సౌష్ఠవం

$[\because |a-b|$అనేది 4 యొక్క గుణిజం$\Rightarrow |-(a-b)| = |b-a|$ కూడా 4 యొక్క గుణిజం అవుతుంది$]$

(iii) $(a,b) \in R, (b,c) \in \mathbf{R} \Rightarrow (a,c) \in R$ కావున R సంక్రమణం.

[$\because$ |a–b|, |b–c| లు 4 యొక్క గుణిజాలు అవుతాయి $\Rightarrow$ (a–b),(b–c) లు 4 యొక్క గుణిజాలు ఇప్పుడు (a–c) = (a–b)+(b–c) అనేది 4 యొక్క గుణిజం $\Rightarrow$ |a–c| అనేది 4 యొక్క గుణిజం]

కావున, R పరావర్తనం, సౌష్ఠవం, సంక్రమణం. కావున R అనేది తుల్య సంబంధం.

1 కి సంబంధించి ఉన్న మూలకాల సమితి $\{1,5,9\}$

$\because |1-1| = 0$ అనేది 4 యొక్క గుణిజం; $|5-1| = 4$ అనేది 4 యొక్క గుణిజం; $|9-1| = 8$ అనేది 4 యొక్క గుణిజం

---

5. **$f : \{2, 3, 4, 5\} \to \{3, 4, 5, 9\}$ మరియు $g : \{3, 4, 5, 9\} \to \{7, 11, 15\}$ ప్రమేయములు $f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = f(5) = 5$ మరియు $g(3) = g(4) = 7$ and $g(5) = g(9) = 11$ గా నిర్వచింపబడినవి అనుకోండి. gof ను కనుక్కోండి.**

Sol: $gof(2) = g(f(2)) = g(3) = 7$; $gof(3) = g(f(3)) = g(4) = 7$,

$gof(4) = g(f(4)) = g(5) = 11$; $gof(5) = g(5) = 11$.

$\therefore gof = \{(2,7),(3,7),(4,11),(5,11)\}$

BABY BULLET-Q AP

విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు

6. $\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right)=\frac{x}{2}, x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ అని నిర్ధారించండి.

Sol: $\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right)=\frac{\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)^2}{\left(\sqrt{1+\sin x}\right)^2-\left(\sqrt{1-\sin x}\right)^2}$ (by rationalizing the dr.)

$$=\frac{\cancel{(1+\sin x)}+\cancel{(1-\sin x)}+2\sqrt{(1+\sin x)(1-\sin x)}}{\cancel{(1}+\sin x)-\cancel{(1}-\sin x)} \qquad \left[\because 1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}\right]$$

$$=\frac{\cancel{2}\left(1+\sqrt{1-\sin^2 x}\right)}{\cancel{2}\sin x}=\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{\cancel{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\cancel{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\cot\frac{x}{2} \qquad \left[\because \sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right]$$

$$\therefore \text{L.H.S}=\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right)=\cot^{-1}\left(\cot\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}=\text{R.H.S}$$

---

7. $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}x, -\frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le 1$ అని నిర్ధారించండి.

Sol: $x=\cos 2\theta\Rightarrow 2\theta=\cos^{-1}x\Rightarrow\theta=\frac{1}{2}\cos^{-1}x....(1)$ $\left[\because 1+\cos 2\theta=2\cos^2\theta,\ 1-\cos 2\theta=2\sin^2\theta\right]$

ఇప్పుడు $\text{L.H.S}=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\cos 2\theta}-\sqrt{1-\cos 2\theta}}{\sqrt{1+\cos 2\theta}+\sqrt{1-\cos 2\theta}}\right)$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\cos^2\theta}-\sqrt{2\sin^2\theta}}{\sqrt{2\cos^2\theta}+\sqrt{2\sin^2\theta}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)$$ [లవాన్ని మరియు హారాన్ని $\cos\theta$తో భాగించగా]

$$=\tan^{-1}1-\tan^{-1}(\tan\theta)=\frac{\pi}{4}-\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}x=\text{R.H.S} \qquad [\because \text{ from (1)}]$$

BABY BULLET-Q AP

మాత్రికలు

8. $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$ సమీకరణం నుండి **a, b, c, d** విలువలు కనుక్కోండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$

రెండు మాత్రికలు సమానం కావున వాటి అనురూప మూలకాలను సమానం చేయగా

$a - b = -1$.....(1) $\quad 2a - b = 0$.....(2)

$2a + c = 5$.....(3) $\quad 3c + d = 13$ .....(4)

(2) నుండి, $b = 2a$

(1)లో విలువను రాయగా, $\Rightarrow a - 2a = -1 \Rightarrow a = 1$ కావున, $b = 2$

(3) లో $a = 1$ అని రాయగా $\Rightarrow 2(1) + c = 5 \Rightarrow c = 3$

(4) లో $c = 3$ అని రాయగా $\Rightarrow 3(3) + d = 13 \Rightarrow d = 4$

కావున $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$

---

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ అయితే **A(BC), (AB)C** కనుక్కోని **(AB)C = A(BC)** అని చూపండి.

Sol: $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+1 & 3+2-4 \\ 2+0-3 & 6+0+12 \\ 3+0-2 & 9-2+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$

$(AB)(C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & 4+0 & 6-2 & -8+1 \\ -1+36 & -2+0 & -3-36 & 4+18 \\ 1+30 & 2+0 & 3-30 & -4+15 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{bmatrix}$.....(1)

$BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 2+0 & 3-6 & -4+3 \\ 0+4 & 0+0 & 0-4 & 0+2 \\ -1+8 & -2+0 & -3-8 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 7 & -2 & -11 & 8 \end{bmatrix}$

$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 7 & -2 & -11 & 8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 7+4-7 & 2+0+2 & -3-4+11 & -1+2-8 \\ 14+0+21 & 4+0-6 & -6+0-33 & -2+0+24 \\ 21-4+14 & 6+0-4 & -9+4-22 & -3-2+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{bmatrix}$....(2)

(1) & (2) నుండి $(AB)C = A(BC)$

BABY BULLET-Q

సంభావ్యత

10. **ఒక పాత్రలో 10 నల్లని మరియు 5 తెల్లని బంతులు కలవు. తీసిన బంతిని తిరిగి పాత్రలో చేర్చకుండా పాత్ర నుండి రెండు బంతులను ఒకదాని తరువాత ఒకటి తీసారు. తీసిన రెండు బంతులూ నల్లనివి కావడానికి సంభావ్యత ఎంత?**

Sol: తీసిన మొదటి బంతి మరియు రెండవ బంతి నల్లనిది అయ్యే ఘటనలను వరుసగా E మరియు F అనుకుందాం

$P(E \cap F)$ లేదా $P(EF)$ ను కనుక్కోవాలి.

$P(E) = P$ (మొదటి తీసినది నల్లని బంతి) $= \frac{10}{15}$

మొదట తీసిన బంతి నల్లనిదని కూడా ఇచ్చారు అంటే ఘటన E సంభవించింది. ఇప్పుడు ఆ పాత్రలో 9 నల్లని బంతులు మరియు 5 తెల్లని బంతులు మిగిలి ఉన్నాయి. అందువల్ల, మొదట తీసిన బంతి నల్లనిది అని ఇస్తే, రెండవసారి తీసిన బంతి నల్లనిది కావడానికి గల సంభావ్యత, E సంభవించినదని ఇచ్చినప్పుడు F యొక్క నియత సంభావ్యత. $\therefore P(F|E) = \frac{9}{14}$

$P(E \cap F) = P(E)\, P(F|E) = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$ [సంభావ్యత యొక్క గుణన సూత్రం నుండి]

---

11. **A మరియు B లు రెండు స్వతంత్ర ఘటనలైతే A, B లలో కనీసం ఒక్కటైనా సంభవించడానికి సంభావ్యత $1 - P(A')\, P(B')$**

Sol: $P(A$ మరియు B లలో కనీసం ఒక ఘటన జరిగింది$) = P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - P(A)\, P(B)$$
$$= P(A) + P(B)\,[1 - P(A)]$$
$$= P(A) + P(B).\, P(A')$$
$$= 1 - P(A') + P(B)\, P(A')$$
$$= 1 - P(A')\,[1 - P(B)]$$
$$= 1 - P(A')\, P(B')$$

BABY BULLET Q AP

అవిచ్ఛిన్నత, అవకలనీయత

12. $f(x)=\begin{cases}2x+3, x\le 2 \text{ అయితే}\\ 2x-3, x>2 \text{ అయితే}\end{cases}$ f,యొక్క అన్ని అన్ని విచ్ఛిన్నతా బిందువులను కనుక్కోండి.

Sol: దత్త ప్రమేయం $f(x)=\begin{cases}2x+3, x\le 2 \text{ అయితే}\\ 2x-3, x>2 \text{ అయితే}\end{cases}$

ఇవ్వబడిన ప్రమేయం వాస్తవ సంఖ్యా రేఖ పై ఉన్న అన్ని బిందువుల వద్ద నిర్వచించబడిందని స్పష్టమవుతోంది:

వాస్తవ సంఖ్యా రేఖపై c అనేది ఒక బిందువు అనుకుందాం.

అప్పుడు, మూడు సందర్భాలు ఏర్పడతాయి. c<2, c>2, c=2

సందర్భం i: c<2

ఇక్కడ f(c)=2c+3. అప్పుడు $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c}(2x+3)=2c+3$

$\therefore \lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ $\therefore$ x <2 అయ్యే అన్ని బిందువుల x వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం అవుతుంది..

సందర్భం ii:c>2

ఇక్కడ f(c)=2c–3. అప్పుడు, $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c}(2x-3)=2c-3$

$\therefore \lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ $\therefore$ x> 2 అయ్యే అన్ని బిందువుల x వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం అవుతుంది..

సందర్భం iii:c=2

$\text{L.H.L}=\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}(2x+3)=2(2)+3=7;$

$\text{R.H.L}=\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(2x-3)=2(2)-3=1.$ ఇక్కడ L.H.L ≠ R.H.L

$\therefore$ x=2 వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కాదు.

x=2 అనేది f విచ్ఛిన్నతా బిందువు .

BABY BULLET-Q AP

13. $f(x)=\begin{cases}x+5, & x\le 1 \text{ అయితే}\\ x-5, & x>1 \text{ అయితే}\end{cases}$ గా నిర్వచింపబడిన f ప్రమేయం ఒక అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయమా?

Sol: దత్త ప్రమేయం $f(x)=\begin{cases}x+5, & x\le 1 \text{ అయితే}\\ x-5, & x>1 \text{ అయితే}\end{cases}$

ఇవ్వబడిన ప్రమేయం వాస్తవ సంఖ్యా రేఖ పై ఉన్న అన్ని బిందువుల వద్ద నిర్వచించబడిందని స్పష్టమవుతోంది:

వాస్తవ సంఖ్యా రేఖపై c అనేది ఒక బిందువు అనుకుందాం.

సందర్భం i:

c <1 అయితే f(c)=c+5

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c}(x+5)=c+5 \qquad \therefore \lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

∴x <1 అయ్యే అన్ని బిందువుల x వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం అవుతుంది..

సందర్భం ii:

c=1 అయితే f(1)=1+5=6

L.H.L= $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(x+5)=1+5=6$

R.H.L= $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(x-5)=1-5=-4$ Here L.H.L ≠ R.H.L

∴ x=1 వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కాదు.

సందర్భం iii:

c >1 అయితే f(c)=c–5

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c}(x-5)=c-5 \qquad \therefore \lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

∴ x> 1 అయ్యే అన్ని బిందువుల x వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం అవుతుంది..

x=1 అనేది f యొక్క విచ్ఛిన్నతా బిందువు అని మనం గమనించవచ్చు.

BABY BULLET-Q AP

14. $f(x)=\begin{cases}3, & 0\le x\le 1 \text{ అయితే}\\ 4, & 1<x<3 \text{ అయితే}\\ 5, & 3\le x\le 10 \text{ అయితే}\end{cases}$ గా నిర్వచితమైన f ప్రమేయం యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను చర్చించండి.

Sol: దత్త ప్రమేయం $f(x)=\begin{cases}3, & 0\le x\le 1 \text{ అయితే}\\ 4, & 1<x<3 \text{ అయితే}\\ 5, & 3\le x\le 10 \text{ అయితే}\end{cases}$

ఇవ్వబడిన ప్రమేయం అంతరం [0,10] లోని అన్ని బిందువుల వద్ద నిర్వచించబడుతుంది.

అంతరం [0,10] లో c అనేది ఒక బిందువు అనుకుందాం.

సందర్భం i:

$0\le c<1$ అయితే $f(c)=3$

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c}(3)=3 \qquad \therefore \lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

$\therefore$ f అనేది [0,1) అంతరంలో అవిచ్ఛిన్నం.

సందర్భం ii:

$c=1$ అయితే $f(3)=3$

$\text{L.H.L}=\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(3)=3$

$\text{R.H.L}=\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(4)=4$ ఇక్కడ $\text{L.H.L}\neq\text{R.H.L}$

$\therefore$ $x=1$ వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కాదు.

సందర్భం iii:

$1<c<3$ అయితే $f(c)=4$

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c}(4)=4 \qquad \therefore \lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

$\therefore$ (1,3) అంతరంలో f అవిచ్ఛిన్నం

సందర్భం iv:

$c=3$ అయితే $f(c)=5$

$\text{L.H.L}=\lim\limits_{x\to 3-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3-}(4)=4$

$\text{R.H.L}=\lim\limits_{x\to 3+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3+}(5)=5$ ఇక్కడ $\text{L.H.L}\neq\text{R.H.L}$

$\therefore$ $x=3$ వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కాదు

సందర్భం v:

$3<c\le 10$ అయితే $f(c)=5$

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c}(5)=5 \qquad \therefore \lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

$\therefore$ (3,10] అంతరంలోని అన్ని బిందువుల వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం.

$x=1$, $x=3$ వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం కాదు.

BABY BULLET-Q AP

15. $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \text{ అయితే}\\ 0, & x=0 \text{ అయితే}\end{cases}$ గా నిర్వచితమైన f అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయమేమో కనుక్కోండి.

Sol: దత్త ప్రమేయం $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, \text{if } x\neq 0\\ 0, \text{if } x=0\end{cases}$

ఇవ్వబడిన ప్రమేయం వాస్తవ సంఖ్యా రేఖ పై ఉన్న అన్ని బిందువుల వద్ద నిర్వచించబడిందని స్పష్టమవుతోంది:

వాస్తవ సంఖ్యా రేఖపై c అనేది ఒక బిందువు అనుకుందాం.

సందర్భం i:

$c\neq 0$ అయితే $f(c)=c^2\sin\frac{1}{c}$

$$\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)=\left(\lim_{x\to c}x^2\right)\left(\lim_{x\to c}\sin\frac{1}{x}\right)=c^2\sin\frac{1}{c}$$

$$\therefore \lim_{x\to c} f(x)=f(c)$$

$\therefore$ $x\neq 0$ అయ్యే అన్ని x బిందువుల వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం అవుతుంది.

సందర్భం ii:

$c=0$ అయితే $f(0)=0$

$-1\le \sin\frac{1}{x}\le 1, x\neq 0$ అని మనకు తెలుసు $\Rightarrow -x^2\le x^2\sin\frac{1}{x}\le x^2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(-x^2)\le \lim_{x\to 0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\le \lim_{x\to 0}x^2$$

$$\Rightarrow 0\le \lim_{x\to 0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\le 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)=0 \quad \therefore \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

$\therefore$ $x=0$ వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం.

కావున, వాస్తవ సంఖ్యా రేఖ పై ఉన్న ప్రతి బిందువు వద్ద f అవిచ్ఛిన్నం అవుతుంది:

కావున f అనేది R పై ఒక అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం.

BABY BULLET-Q AP

16. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{k\cos x}{\pi-2x}, & x\neq\dfrac{\pi}{2}\text{అయితే}\\ 3, & x=\dfrac{\pi}{2}\text{అయితే}\end{cases}$ $x=\dfrac{\pi}{2}$ వద్ద ప్రమేయం f అవిచ్ఛిన్నమయ్యేందుకు గల k విలువను కనుక్కోండి.

Sol: దత్త ప్రమేయం $f(x)=\begin{cases}\dfrac{k\cos x}{\pi-2x}, & x\neq\dfrac{\pi}{2}\text{అయితే}\\ 3, & x=\dfrac{\pi}{2}\text{అయితే}\end{cases}$ $x=\dfrac{\pi}{2}$

$x=\dfrac{\pi}{2}$ వద్ద f నిర్వచించబడిందని మరియు $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3$ అని స్పష్టమవుతోంది

ఇవ్వబడిన f(x) అనేది $x=\dfrac{\pi}{2}$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం $\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{Lt}f(x)=\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{Lt}\dfrac{k\cos x}{\pi-2x}$

$x=\dfrac{\pi}{2}+h$ అని రాయగా అప్పుడు $x\to\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow h\to 0$

$$\therefore \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{Lt}f(x)=\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{Lt}\frac{k\cos x}{\pi-2x}=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{k\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{\pi-2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}$$

$$=k\underset{h\to 0}{Lt}\frac{-\sinh}{-2h}=\frac{k}{2}\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\sinh}{h}=\frac{k}{2}.1=\frac{k}{2}$$

$$\therefore \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{Lt}f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\frac{k}{2}=3\Rightarrow k=6$$

$\therefore k=6.$

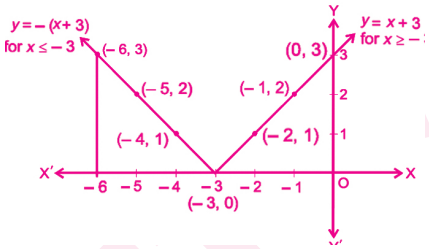
BABY BULLET-Q AP

సమాకలనం అనువర్తనాలు

17. $y = |x+3|$ గ్రాఫ్‌ను గీయండి మరియు $\int_{-6}^{0}|x+3|dx$ ను గణించండి. **[BMP]**

Sol:

X	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0
Y	3	2	1	0	1	2	3



$-6 \le x \le -3$ నకు $(x+3) \le 0$

$-3 \le x \le 0$ నకు $(x+3) \ge 0$

$$\therefore \int_{-6}^{0}|(x+3)|\,dx = -\int_{-6}^{-3}(x+3)dx + \int_{-3}^{0}(x+3)dx$$

$$= -\left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-6}^{-3} + \left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-3}^{0}$$

$$= -\left[\left(\frac{(-3)^2}{2}+3(-3)\right)-\left(\frac{(-6)^2}{2}+3(-6)\right)\right]+\left[0-\left(\frac{(-3)^2}{2}+3(-3)\right)\right] = -\left[-\frac{9}{2}\right]-\left[-\frac{9}{2}\right] = 9 \text{ sq.units}$$

BABY BULLET AP