SAQ PQ ప్రశ్నలు

1. $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{33}{65}\right)$ అని నిరూపించండి.

2. $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x-x^3}{a^3-3ax^2}\right), a>0; \frac{-a}{\sqrt{3}}<x<\frac{a}{\sqrt{3}}$ ప్రమేయమును సూక్ష్మరూపంలో రాయండి.

3. మాత్రిక $\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ ను ఒక సౌష్ఠవ, ఒక వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రికల మొత్తంగా వ్యక్తీకరించండి.

4. మాత్రిక $B=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$ ను ఒక సౌష్ఠవ, ఒక వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రికల మొత్తంగా వ్యక్తీకరించండి.

5. **(2, 7), (1, 1), (10, 8)** శీర్షాలు కలిగిన త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం కనుక్కోండి.

6. **(3, 1)** మరియు**(9, 3)** బిందువులను కలిపే రేఖ యొక్క సమీకరణాన్ని నిర్ధారకాలు వినియోగించి కనుక్కోండి.

7. $\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 3 & -2 & 4\end{bmatrix}$ మాత్రిక యొక్క విలోమాన్ని (వ్యవస్థితమైతే) కనుక్కోండి.

8. $A=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ మరియు $B=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 7 & 9\end{bmatrix}$ అయితే, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ అని సరి చూడండి.

9. $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k},\ \vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ అయితే, $(\vec{a}+\vec{b}), (\vec{a}-\vec{b})$ సదిశలకు లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.

10. $A(-2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}), B(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$ మరియు $C(7\hat{i}-\hat{k})$ బిందువులు సరేఖీయాలని చూపండి.

11. $P(A)=\frac{1}{4}, P(B)=\frac{1}{2}$ మరియు $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$ అయ్యేటట్లుగా **A** మరియు **B** రెండు ఘటనలు అయితే **P(A** సంభవించదు మరియు **B** సంభవించదు) ను కనుక్కోండి.

12. ఒకే నాణేన్ని మూడుసార్లు ఎగురవేసినప్పుడు **P(E|F)** ను కనుక్కోండి. ఇక్కడ

E : మూడవసారి ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మ రావడం,

F : మొదటి రెండు సార్లు ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మలు రావడం

13. రేఖీయ పద్ధతి ద్వారా ఏకఘాత ప్రణాళిక సమస్యను సాధించండి. **[BMP]**

గరిష్ఠీకరించండి $Z=4x+y$ క్రింది నియమాలకు లోబడి $x+y\le 50,\ 3x+y\le 90, x\le 0, y\le 0.$

BABY BULLET-Q AP

14. $x + 2y \geq 100, 2x - y \leq 0, 2x + y \leq 200; x, y \geq 0$.లకు లోబడి $Z = x + 2y$ కనిష్ఠీకరించండి మరియు గరిష్ఠీకరించండి.

15. $f(x) = \begin{cases} kx + 1, & x \leq 5 \text{ అయితే} \\ 3x - 5, & x > 5 \text{ అయితే} \end{cases}$ $x = 5$ వద్ద f ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నమయ్యేందుకు గల k విలువలను కనుక్కోండి.

16. $y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$ యొక్క $\frac{dy}{dx}$ ను కనుక్కోండి.

17. $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ యొక్క $\frac{dy}{dx}$ ను కనుక్కోండి.

18. x దృష్ట్యా $(\log x)^{\log x}, x > 1$ ను అవకలనం చేయండి.

19. $\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} dx$ ను కనుక్కోండి.

20. $\frac{1}{1-\tan x}$ యొక్క సమాకలనాన్ని కనుక్కోండి.

21. $\cos 2x \cos 4x \cos 6x$ యొక్క సమాకలనాన్ని కనుక్కోండి.

22. $\frac{1}{\cos(x-a)\cos(x-b)}$ యొక్క సమాకలనాన్ని కనుక్కోండి.

23. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ దీర్ఘవృత్తంచే పరిబద్ధమయ్యే ప్రదేశ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.

BABY BULLET-Q AP

SAQ PQ SOLUTIONS

విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు

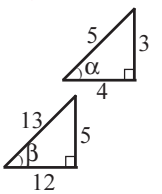
1. $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{33}{65}\right)$ అని నిరూపించండి.

HINT BOX
- PT_1: (3,4,5)
- PT_2: (5,12,13)

Sol: $\sin^{-1}\frac{3}{5}=\alpha$ మరియు $\cos^{-1}\frac{12}{13}=\beta$ అని రాయగా

నిరూపితాంశం: $\alpha+\beta=\cos^{-1}\frac{33}{65}\Rightarrow\cos(\alpha+\beta)=\frac{33}{65}$

అప్పుడు, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ మరియు $\cos\beta=\frac{12}{13}$



$\therefore\cos\alpha=\frac{4}{5},\sin\beta=\frac{5}{13}$

ఇప్పుడు, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{48-15}{13}=\frac{33}{65}$.

కావున నిరూపించబడినది.

---

2. $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x-x^3}{a^3-3ax^2}\right), a>0; \frac{-a}{\sqrt{3}}<x<\frac{a}{\sqrt{3}}$ ప్రమేయమును సూక్ష్మరూపంలో రాయండి.

Sol: $x=a\tan\theta\Rightarrow\tan\theta=\frac{x}{a}\Rightarrow\theta=\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$$\therefore\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x-x^3}{a^3-3ax^2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{3a^2\cdot(a\tan\theta)-a^3\tan^3\theta}{a^3-3a.(a^2\tan^2\theta)}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{3a^3\tan\theta-a^3\tan^3\theta}{a^3-3a^3\tan^2\theta}\right)=\tan^{-1}(\tan3\theta)=3\theta=3\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

BABY BULLET AP

మాత్రికలు

3. మాత్రిక $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ను ఒక సౌష్ఠవ, ఒక వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రికల మొత్తంగా వ్యక్తీకరించండి.

Sol: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

ఇప్పుడు, $A + A' = \begin{bmatrix} 3+3 & 5+1 \\ 1+5 & -1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

$P = \frac{1}{2}(A + A') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ అనుకుందాం.

కావున, $P' = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = P$. P అనేది సౌష్ఠవ మాత్రిక.

అలాగే, $A - A' = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

$Q = \frac{1}{2}(A - A') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ అనుకుందాం.

కావున, $Q' = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -Q$. P అనేది వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రిక.

A ని P మరియు Qల మొత్తంగా వ్యక్తపరచగా:

$P + Q = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A$ కావున నిరూపించబడినది.

BABY BULLET-Q AP

4. మాత్రిక $B=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}$ ను ఒక సౌష్ఠవ, ఒక వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రికల మొత్తంగా వ్యక్తీకరించండి.

Sol: ఇచ్చినది, $B=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}\Rightarrow B'=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-2&3&-2\\-4&4&-3\end{bmatrix}$

$$(B+B')=\begin{bmatrix}2+2&-2-1&-4+1\\-1-2&3+3&4-2\\1-4&-2+4&-3-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-3&-3\\-3&6&2\\-3&2&-6\end{bmatrix}$$

$P=\frac{1}{2}(B+B')=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4&-3&-3\\-3&6&2\\-3&2&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&\frac{-3}{2}&\frac{-3}{2}\\\frac{-3}{2}&3&1\\\frac{-3}{2}&1&-3\end{bmatrix}$ అనుకుందాం.

ఇప్పుడు, $P'=\begin{bmatrix}2&\frac{-3}{2}&\frac{-3}{2}\\\frac{-3}{2}&3&1\\\frac{-3}{2}&1&-3\end{bmatrix}=P$ Q అనేది సౌష్ఠవ మాత్రిక.

అలాగే, $Q=\frac{1}{2}(B-B')=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&-1&-5\\1&0&6\\5&-6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{-1}{2}&\frac{-5}{2}\\\frac{1}{2}&0&3\\\frac{5}{2}&-3&0\end{bmatrix}$ అనుకుందాం.

కావున, $Q'=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{5}{2}\\\frac{-1}{2}&0&-3\\\frac{-5}{2}&3&0\end{bmatrix}=-Q$. Q అనేది వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రిక.

ఇప్పుడు, $P+Q=\begin{bmatrix}2&\frac{-3}{2}&\frac{-3}{2}\\\frac{-3}{2}&3&1\\\frac{-3}{2}&1&-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&\frac{-1}{2}&\frac{-5}{2}\\\frac{1}{2}&0&3\\\frac{5}{2}&-3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}=B$

కావున, B ని ఒక సౌష్ఠవ, ఒక వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రికల మొత్తంగా వ్యక్తపరచడమైనది.

BABY BULLET-Q AP

నిర్ధారకాలు

5. (2, 7), (1, 1), (10, 8) శీర్షాలు కలిగిన త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం కనుక్కోండి.

Sol: $A(x_1, y_1)= (2, 7), B(x_2, y_2) = (1, 1), C(x_3,y_3) = (10, 8)$ శీర్షాలుగా కలిగిన త్రిభుజ వైశాల్యం

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|[2(1-8)-7(1-10)+1(8-10)]|$$

$$= \frac{1}{2}|[2(-7)-7(-9)+1(-2)]| = \frac{1}{2}|-14+63-2| = \frac{1}{2}[47] = \frac{47}{2}$$ యూనిట్లు

---

6. (3, 1) మరియు(9, 3) బిందువులను కలిపే రేఖ యొక్క సమీకరణాన్ని నిర్ధారకాలు వినియోగించి కనుక్కోండి.

Sol: $P(x, y)$ అనేది $A(x_1,y_1) = (3, 1)$ మరియు $B(x_2, y_2) = (9, 3)$ అనే బిందువులను కలిపే రేఖపై ఉన్న ఒక బిందువు అనుకుందాం.

అప్పుడు A, B మరియు P బిందువులు సరేఖీయాలు అవుతాయి.

కాబట్టి, ABP యొక్క వైశాల్యం శూన్యం (సున్నా) అవుతుంది.

$$\therefore \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}[3(3-y)-1(9-x)+1(9y-3x)] = 0$$

$$\Rightarrow 9-3y-9+x+9y-3x = 0 \Rightarrow 6y-2x = 0 \Rightarrow x-3y = 0$$

$\therefore$ దత్త బిందువులను కలిపే సరళరేఖ సమీకరణం $x - 3y = 0$

---

7. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ **మాత్రిక యొక్క విలోమాన్ని (వ్యవస్థితమైతే) కనుక్కోండి.**

Sol: $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ అనుకుంటే,

అప్పుడు, $|A| = 1(8-6)-0+3(3-4) = 2-3 = -1 \neq 0.$

కాబట్టి, A సాధారణ మాత్రిక, కావున A^{-1} వ్యవస్థితం అగును.

$A_{11} = 2;\ A_{12} = -9\ ;\ A_{13} = -6$

$A_{21} = 0;\ A_{22} = -2;\ A_{23} = -1$

$A_{31} = -1;\ A_{32} = 3;\ A_{33} = 2$

కాబట్టి, $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -9 & -2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A = -1\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -9 & -2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

BABY BULLET-Q AP

8. $A=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ మరియు $B=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 7 & 9\end{bmatrix}$ అయితే, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ అని సరి చూడండి.

Sol: $A=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ అనుకుంటే,

అప్పుడు, $|A|=15-14=1$

ఇప్పుడు, $A_{11}=5;\ A_{12}=-2;\ A_{21}=-7\quad A_{22}=3;$

కాబట్టి, $\text{adj } A=\begin{bmatrix}5 & -7\\ -2 & 3\end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{adj}A=\begin{bmatrix}5 & -7\\ -2 & 3\end{bmatrix}$

ఇప్పుడు, Let $B=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 7 & 9\end{pmatrix}$ అనుకుందాం. అప్పుడు, $|B|=54-56=-2$

ఇప్పుడు, $A_{11}=9;\ A_{12}=-7;\ A_{21}=-8;\ A_{21}=-8;\quad A_{22}=6$ అందువల్ల, $\text{adj } B=\begin{bmatrix}9 & -8\\ -7 & 6\end{bmatrix}$

$$\therefore B^{-1}=\frac{1}{|B|}\text{adj}B=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}9 & -8\\ -7 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{9}{2} & 4\\ \frac{7}{2} & -3\end{bmatrix}$$

ఇప్పుడు, $B^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{9}{2} & 4\\ \frac{7}{2} & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -7\\ -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{45}{2}-8 & \frac{63}{2}+12\\ \frac{35}{2}+6 & -\frac{49}{2}-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{61}{2} & \frac{87}{2}\\ \frac{47}{2} & \frac{-67}{2}\end{bmatrix}$ .....(1)

అంతే కాకుండా, $AB=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 8\\ 7 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18+49 & 24+63\\ 12+35 & 16+45\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}67 & 87\\ 47 & 61\end{bmatrix}$

ఇప్పుడు, మనకు $|AB|=67(61)-87(47)=4087-4089=-2$ వస్తుంది.

$\text{adj }(AB)=\begin{bmatrix}61 & -87\\ -47 & 67\end{bmatrix}$

కాబట్టి, $(AB)^{-1}=\frac{1}{|AB|}\text{adj}(AB)=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}61 & -87\\ -47 & 67\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{61}{2} & \frac{87}{2}\\ \frac{47}{2} & -\frac{67}{2}\end{bmatrix}$.....(2)

(1), (2) ల నుండి $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

BABY BULLET-Q

సదిశా బీజగణితం

9. $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ అయితే, $(\vec{a}+\vec{b}),(\vec{a}-\vec{b})$ సదిశలకు లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $\vec{a}+\vec{b}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ మరియు $\vec{a}-\vec{b}=-\hat{j}-2\hat{k}$

$\vec{a}+\vec{b}$ మరియు $\vec{a}-\vec{b}$ రెండింటికీ లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశ

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & -2\end{vmatrix}=-2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}\ \ (=\vec{c},\text{ say})$$ అనుకుందాం.

ఇప్పుడు, $|\vec{c}|=\sqrt{4+16+4}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

$\therefore$ కావలసిన యూనిట్ సదిశ $\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{6}}\hat{i}+\dfrac{2}{\sqrt{6}}\hat{j}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$

---

10. $A(-2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k})$, $B(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$ మరియు $C(7\hat{i}-\hat{k})$ బిందువులు సరేఖీయాలని చూపండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $\overrightarrow{AB}=(1+2)\hat{i}+(2-3)\hat{j}+(3-5)\hat{k}=3\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}\Rightarrow|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$

$\overrightarrow{BC}=(7-1)\hat{i}+(0-2)\hat{j}+(-1-3)\hat{k}=6\hat{i}-2\hat{j}-4\hat{k}\Rightarrow|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{6^2+(-2)^2+(-4)^2}=2\sqrt{14}$

$\overrightarrow{AC}=(7+2)\hat{i}+(0-3)\hat{j}+(-1-5)\hat{k}=9\hat{i}-3\hat{j}-6\hat{k}\Rightarrow|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{9^2+(-3)^2+(-6)^2}=3\sqrt{14}$

ఇక్కడ, $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$.

కాబట్టి, A, B మరియు C బిందువులు సరేఖీయాలు.

BABY BULLET-Q AP

సంభావ్యత

11. $P(A)=\frac{1}{4}, P(B)=\frac{1}{2}$ మరియు $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$ అయ్యేటట్లుగా A మరియు B రెండు ఘటనలు అయితే P(A సంభవించదు మరియు B సంభవించదు) ను కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చినది, $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{1}{2}$ మరియు $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$

P(A సంభవించదు మరియు B సంభవించదు) $=P(A'\cap B')=P[(A\cup B)']$ $[\because A'\cap B=(A\cup B)']$

$=1-P(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]$

$=1-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right]=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

---

12. ఒకే నాణేన్ని మూడుసార్లు ఎగురవేసినప్పుడు P(E|F) ను కనుక్కోండి. ఇక్కడ
E : మూడవసారి ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మ రావడం,
F : మొదటి రెండు సార్లు ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మలు రావడం

Sol: ఒకే నాణేన్ని మూడుసార్లు ఎగురవేసినప్పుడు S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

$\Rightarrow n(S) = 8$

E: మూడవసారి ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మ రావడం, $\Rightarrow$ E = {HHH, HTH, THH, TTH} $\Rightarrow n(E) = 4$

F: మొదటి రెండు సార్లు ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మలు రావడం $\Rightarrow$ F = {HHH, HHT} $\Rightarrow n(F) = 2$

కావున, $E\cap F = \{HHH\} \Rightarrow n(E\cap F) = 1$

ఇప్పుడు, $P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, $P(F)=\frac{n(F)}{n(S)}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, $P(E\cap F)=\frac{1}{8}$

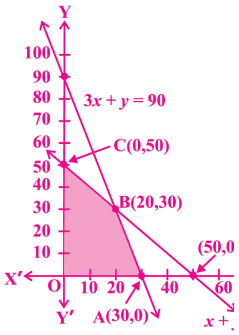
$\therefore P(E/F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{1/8}{1/4}=\frac{1}{8}\times\frac{4}{1}=\frac{1}{2}$

BABY BULLET-Q AP

ఏకఘాత ప్రణాళిక

13. రేఖీయ పద్ధతి ద్వారా ఏకఘాత ప్రణాళిక సమస్యను సాధించండి. [BMP]
గరిష్ఠీకరించండి $Z = 4x + y$ క్రింది నియమాలకు లోబడి $x + y \le 50,\ 3x + y \le 90,\ x \le 0,\ y \le 0.$

Sol: నిర్బంధాల వ్యవస్థ $x + y \le 50,\ 3x + y \le 90, x \ge 0, y \ge 0$ ద్వారా నిర్దేశించబడిన అనుకూల ప్రాంతం షేడ్ చేసిన ప్రాంతంలో చూపబడింది.



అనుకూల ప్రాంతం యొక్క శీర్ష బిందువులు : A(30, 0), B (20, 30), C(0, 50).

ఈ శీర్ష బిందువుల వద్ద Z యొక్క విలువలు క్రింది విధంగా ఉన్నాయి:

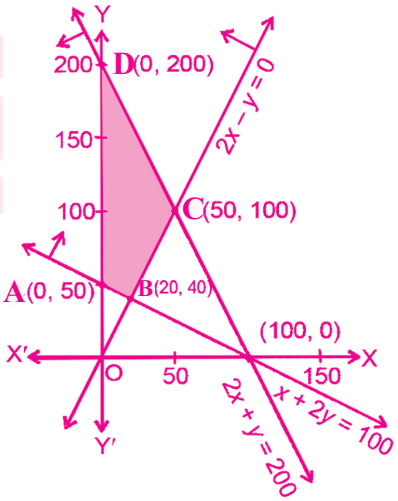
శీర్ష బిందువు	Z యొక్క విలువ	
(0,0)	0	
(30,0)	120	← గరిష్ఠ
(20,30)	110	
(0,50)	50	

కావున, బిందువు A(30, 0) వద్ద Z యొక్క గరిష్ఠ విలువ 120.

---

14. $x + 2y \ge 100, 2x - y \le 0, 2x + y \le 200;\ x, y \ge 0$.లకు లోబడి $Z = x + 2y$ కనిష్ఠీకరించండి మరియు గరిష్ఠీకరించండి.

Sol: నిర్బంధాల వ్యవస్థ $x + 2y \ge 100,\ 2x - y \le 0,\ 2x + y \le 200$ మరియు $x, y \ge 0$ ద్వారా నిర్దేశించబడిన అనుకూల ప్రాంతం షేడ్ చేసిన ప్రాంతంలో చూపబడింది.



అనుకూల ప్రాంతం యొక్క శీర్ష బిందువులు :
A(0, 50), B(20, 40), C(50, 100), D(0, 200)

ఈ శీర్ష బిందువుల వద్ద Z యొక్క విలువలు క్రింది విధంగా ఉన్నాయి:

శీర్ష బిందువు	$Z = x + 2y$	
A(0,50)	100	→ కనిష్ఠం
B(20,40)	100	→ కనిష్ఠం
C(50,100)	250	
D(0,200)	400	→ గరిష్ఠం

కావున, బిందువు A (0,50) వద్ద Z యొక్క కనిష్ఠ విలువ 100
మరియు బిందువు D(0,200) వద్ద Z యొక్క గరిష్ఠ విలువ 400.

BABY BULLET AP

అవిచ్ఛిన్నత, అవకలనీయత

15. $f(x)=\begin{cases}kx+1, & x\le 5 \text{ అయితే}\\ 3x-5, & x>5 \text{ అయితే}\end{cases}$ $x=5$ వద్ద f ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నమయ్యేందుకు గల k విలువలను కనుక్కోండి.

Sol: దత్త ప్రమేయం $f(x)=\begin{cases}kx+1, & x\le 5 \text{ అయితే}\\ 3x-5, & x>5 \text{ అయితే}\end{cases}$

$x=5$ వద్ద f నిర్వచించబడిందని మరియు $f(5)=kx+1=5k+1$ అని స్పష్టమవుతుంది.

ఇచ్చిన ప్రమేయం $f(x)$, $x=5$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం కావడానికి

$$\lim_{x\to 5-} f(x)=\lim_{x\to 5+} f(x)=f(5) \Rightarrow \lim_{x\to 5-}(kx+1)=\lim_{x\to 5+}(3x-5)=5k+1$$

$$\Rightarrow 5k+1=3(5)-5=5k+1 \Rightarrow 5k+1=15-5=5k+1$$

$$\Rightarrow 5k+1=10=5k+1 \Rightarrow 5k+1=10\Rightarrow 5k=9\Rightarrow k=\frac{9}{5}$$ $\therefore$ k యొక్క విలువ = 9/5.

---

16. $y=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0<x<1$ యొక్క $\frac{dy}{dx}$ ను కనుక్కోండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $y=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0<x<1$ $x=\tan\theta$ అని రాయగా.

$$\therefore \quad y=\cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)=\cos^{-1}(\cos 2\theta)$$

$$y=2\theta=2\tan^{-1}x (: \quad x=\tan\theta\Rightarrow\theta=\tan^{-1}x) \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=2\frac{1}{1+x^2}=\frac{2}{1+x^2}$$

---

17. $y=\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ యొక్క $\frac{dy}{dx}$ ను కనుక్కోండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $y=\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ $x=\tan\theta$. అని రాయగా.

$$\therefore \quad y=\sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)=\sin^{-1}(\sin 2\theta)=2\theta$$

$$\Rightarrow y=2\tan^{-1}x \qquad (\because x=\tan\theta\Rightarrow\theta=\tan^{-1}x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=2\frac{1}{1+x^2}=\frac{2}{1+x^2}$$

BABY BULLET-Q AP

18. x దృష్ట్యా $(\log x)^{\log x}$, $x > 1$ ను అవకలనం చేయండి.

Sol: $y = (\log x)^{\log x}, x > 1$ .....(i) అనుకొందాం.

(i) కి ఇరువైపులా log తీసుకోగా, $\log y = \log(\log x)^{\log x} = \log x \log(\log x)$

ఇరువైపులా అవకలనం చేయగా $\frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}(\log x \log(\log x))$

$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log x \frac{d}{dx}\log(\log x) + \log(\log x)\frac{d}{dx}\log x$ (లబ్ధ నియమం)

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cancel{\log x}\,\frac{1}{\cancel{\log x}}\frac{d}{dx}\log x + \log(\log x)\frac{1}{x}$ $\left[\because \frac{d}{dx}\log f(x) = \frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)\right]$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{\log(\log x)}{x} = \frac{1+\log(\log x)}{x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{1+\log(\log x)}{x}\right)$

BABY BULLET-Q AP

సమాకలనం

19. $\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)}dx$ ను కనుక్కోండి.

Sol: $\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+3} = \frac{A(x+1)(x+3)+B(x+3)+C(x+1)^2}{(x+1)^2(x+3)}$ అనుకొనుము.

$\Rightarrow A(x+1)(x+3) + B(x+3) + C(x+1)^2 = 3x - 2$ .....(1)

(1) లో $x = -1$ ను ప్రతిక్షేపించగా,

$\Rightarrow A(0) + B(-1+3) + C(0)^2 = 3(-1) - 2 \Rightarrow 2B = -5 \Rightarrow B = -5/2$

(1) లో $x = -3$ ను ప్రతిక్షేపించగా,

$\Rightarrow A(0) + B(0) + C(9-6+1) = -9 - 2 \Rightarrow 4C = -11 \Rightarrow C = -11/4$

(1) నుండి x^2 గుణకాన్ని పోల్చగా, $A + C = 0 \Rightarrow A = -C \Rightarrow A = \frac{11}{4}$

$\therefore \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{11}{4(x+1)} - \frac{5}{2(x+1)^2} - \frac{11}{4(x+3)}$

$\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{11}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{11}{4}\int \frac{dx}{x+3}$

$= \frac{11}{4}\log|x+1| + \frac{5}{2(x+1)} - \frac{11}{4}\log|x+3| + C = \frac{11}{4}\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + \frac{5}{2(x+1)} + C$

---

20. $\frac{1}{1-\tan x}$ యొక్క సమాకలనాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: $I = \int \frac{1}{1-\tan x}dx = \int \frac{1}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}dx = \int \frac{\cos x}{\cos x - \sin x}dx$ అనుకొనుము.

$= \frac{1}{2}\int \frac{2\cos x}{\cos x - \sin x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(\cos x - \sin x) + (\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)}dx$

$= \frac{1}{2}\int 1dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}dx$

$\cos x - \sin x = t$ ప్రతిక్షేపించగా

$\Rightarrow (-\sin x - \cos x)dx = dt$

$\therefore I = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{-(dt)}{t} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log|t| + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log|(\cos x - \sin x)| + C$

BABY BULLET-Q AP

21. **$\cos 2x \cos 4x \cos 6x$ యొక్క సమాకలనాన్ని కనుక్కోండి.**

Sol: $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$ అని తెలుసు

$$\therefore \int \cos 2x(\cos 4x \cos 6x)dx = \int \cos 2x\left[\frac{1}{2}[\cos(4x+6x)+\cos(4x-6x)]\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int[\cos 2x \cos 10x + \cos 2x \cos(-2x)]\,dx = \frac{1}{2}\int[\cos 2x \cos 10x + \cos^2 2x]\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{1}{2}\cos(2x+10x)+\frac{1}{2}\cos(2x-10x)\right)+\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\right]dx$$

$$= \frac{1}{4}\int(\cos 12x + \cos 8x + 1 + \cos 4x)dx = \frac{1}{4}\left[\frac{\sin 12x}{12}+\frac{\sin 8x}{8}+x+\frac{\sin 4x}{4}\right]+C$$

---

22. **$\frac{1}{\cos(x-a)\cos(x-b)}$ యొక్క సమాకలనాన్ని కనుక్కోండి.**

Sol: $$\frac{1}{\cos(x-a)\cos(x-b)} = \frac{1}{\sin(a-b)}\left[\frac{\sin(a-b)}{\cos(x-a)\cos(x-b)}\right]$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\left[\frac{\sin[(x-b)-(x-a)]}{\cos(x-a)\cos(x-b)}\right]$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\frac{[\sin(x-b)\cos(x-a)-\cos(x-b)\sin(x-a)]}{\cos(x-a)\cos(x-b)}$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}[\tan(x-b)-\tan(x-a)]$$

$$\therefore \int \frac{1}{\cos(x-a)\cos(x-b)}dx = \frac{1}{\sin(a-b)}\int[\tan(x-b)-\tan(x-a)]dx$$

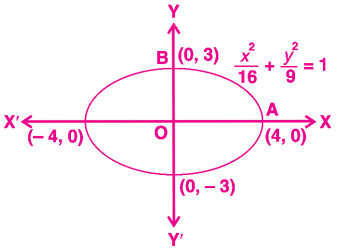
$$= \frac{1}{\sin(a-b)}[-\log|\cos(x-b)|+\log|\cos(x-a)|] = \frac{1}{\sin(a-b)}\left[\log\left|\frac{\cos(x-a)}{\cos(x-b)}\right|\right]+C$$

BABY BULLET-Q APP

సమాకలనం అనువర్తనాలు

23. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ దీర్ఘవృత్తంచే పరిబద్ధమయ్యే ప్రదేశ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{9}=1-\frac{x^2}{16} \Rightarrow y^2=9\left(\frac{16-x^2}{16}\right) \Rightarrow y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$



దీర్ఘవృత్తం వైశాల్యం $= 4 \times$ OAB వైశాల్యం

$$A = 4\int_0^4 y\,dx = 4\left(\frac{3}{4}\right)\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$= 3\left[\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2}+\frac{16}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_0^4 = 3\left[2\sqrt{16-16}+8\sin^{-1}(1)-0-8\sin^{-1}(0)\right]$$

$$= 3\left[\frac{8\pi}{2}\right] = 3[4\pi] = 12\pi$$

BABY BULLET AP