SHINING STARS'

# LAQ స్టార్ ప్లస్ ప్రశ్నలు

## మాత్రికలు

1. $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&-3\\2&-1&3\end{bmatrix}$ అయితే $A^3-6A^2+5A+11I=O$ అని చూపి $A^{-1}$ ను కనుగొనండి.

2. $A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$ అయితే $A^3-6A^2+9A-4I=O$ అని చూపి $A^{-1}$ ను కనుగొనండి.

## త్రిపరిమాణ జ్యామితి

3. $(1,2,-4)$ బిందువు గుండాపోతూ $\frac{x-8}{3}=\frac{y+19}{-16}=\frac{z-10}{7}$ and $\frac{x-15}{3}=\frac{y-29}{8}=\frac{z-5}{-5}$ రేఖలకు లంబంగా ఉండే సదిశా సమీకరణంను కనుక్కోండి.

## సంభావ్యత

4. A మరియు B లు ఒకరి తరువాత ఒకరుగా ఒక పాచికను, వారిలో ఒకరికి 6 వచ్చేవరకు దొర్లిస్తారు. A ఆటను మొదట ప్రారంభిస్తే, వారు గెలిచే సంభవ్యతలను కనుక్కోండి.

## అవకలజాల అనువర్తనం

5. ఒక ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం సెకనుకు 8 సెం.మీ3 చొప్పున ఏకరీతిగా పెరుగుతోంది. దాని అంచు పొడవు 12 సెం.మీ. అయినప్పుడు, దాని ఉపరితల వైశాల్యం ఎంత వేగంగా పెరుగుతుంది?

6. గాలితో ఉబ్బినప్పుడు సర్వదా గోళాకారంలోనే ఉండే ఒక గాలి బుడగ (బెలూన్) సెకనుకు 900 ఘనసెం.మీల చొప్పున లోపలకు గాలిని ఊదడం ద్వారా ఉబ్బుతుంది. వ్యాసార్ధం 15 సెం.మీ. లు అయినప్పుడు, గాలి బుడగ వ్యాసార్ధం ఏ రేటులో పెరుగుతుందో కనుక్కోండి.

7. 6 మీటర్ల ఎత్తు గల ఒక దీపస్తంభం నుండి దూరంగా, గంటకు 5 కి.మీ.ల వేగంతో 2 మీ. ఎత్తుగల ఒక వ్యక్తి నడుస్తుంటే అతని నీడ పొడవు ఏ రేటులన పెరుగుతుందో కనుక్కోంది.

8. ఒక కిటికి, ఒక దీర్ఘ చతురస్రంపై దాని భుజంతో సమానమైన వ్యాసాన్ని కలిగిన అర్ధ వృత్తాన్ని నిలబెట్టినట్లు ఉన్న రూపంలో ఉంది. కిటికీ యొక్క మొత్తం చుట్టుకొలత 10 మీ. అట్లాంటి తెరిచి యున్న అంతటి నుండి గరిష్ఠ వెలుతురును పొంద గలిగేటట్లు ఆ కిటికీ కొలతలను కనుక్కోండి

## సమాకలనం

9. $\int_0^{\pi}\frac{x\,dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}$ ను గణన చేయండి.

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2x\,dx}{\cos^2x+4\sin^2x}$ యొక్క విలువను కనుక్కోండి.

11. $\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$. ను కనుక్కోండి.

12. $\int\left[\sqrt{\cot x}+\sqrt{\tan x}\right]dx$ ను కనుక్కోండి.

13. $\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}$ ను కనుక్కోండి.

14. $\frac{1}{x^4-1}$ ను కనుక్కోండి.

BABU BULLET-Q

## నిర్ధారకాలు

***1.** $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&-3\\2&-1&3\end{bmatrix}$ అయితే $A^3-6A^2+5A+11I=O$ అని చూపి $A^{-1}$ ను కనుగొనండి.

**Sol:** $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&-3\\2&-1&3\end{bmatrix}$

$$A^2=A.A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&-3\\2&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&-3\\2&-1&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+1+2&1+2-1&1-3+3\\1+2-6&1+4+3&1-6-9\\2-1+6&2-2-3&2+3+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2&1\\-3&8&-14\\7&-3&14\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2.A=\begin{bmatrix}4&2&1\\-3&8&-14\\7&-3&14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&-3\\2&-1&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4+2+2&4+4-1&4-6+3\\-3+8-28&-3+16+14&-3-24-42\\7-3+28&7-6-14&7+9+42\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&7&1\\-23&27&-69\\32&-13&58\end{bmatrix}$$

$$A^3-6A^2+5A+11I=\begin{bmatrix}8&7&1\\-23&27&-69\\32&-13&58\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}4&2&1\\-3&8&-14\\7&-3&14\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&-3\\2&-1&3\end{bmatrix}+11\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8&7&1\\-23&27&-69\\32&-13&58\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}24&12&6\\-18&48&-84\\42&-18&84\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&5&5\\5&10&-15\\10&-5&15\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}11&0&0\\0&11&0\\0&0&11\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}24&12&6\\-18&48&-84\\42&-18&84\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}24&12&6\\-18&48&-84\\42&-18&84\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=0$$

కావున $A^3-6A^2+5A+11I=O$

ఇప్పుడు $A^3-6A^2+5A+11I=O$

$\Rightarrow (AAA)A^{-1}-6(AA)A^{-1}+5AA^{-1}+11IA^{-1}=O$ $\left[\text{Post-multiplying by } A^{-1} \text{ as } |A|\neq 0\right]$

BABY BULLET-Q

$\Rightarrow AA(AA^{-1})-6A(AA^{-1})+5(AA^{-1})=-11(IA^{-1})$

$\Rightarrow A^2-6A+5I=-11A^{-1}$

$\Rightarrow A^{-1}=-\frac{1}{11}(A^2-6A+5I).....(1)$

ఇప్పుడు $A^2-6A+5I=\begin{bmatrix}4&2&1\\-3&8&-14\\7&-3&14\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&-3\\2&-1&3\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4&2&1\\-3&8&-14\\7&-3&14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&6&6\\6&12&-18\\12&-6&18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}9&2&1\\-3&13&-14\\7&-3&19\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&6&6\\6&12&-18\\12&-6&18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4&-5\\-9&1&4\\-5&3&1\end{bmatrix}$.....(2)

(1) , (2) నుండి

$A^{-1}=-\frac{1}{11}\begin{bmatrix}3&-4&-5\\-9&1&4\\-5&3&1\end{bmatrix}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-3&4&5\\9&-1&-4\\5&-3&-1\end{bmatrix}$

---

***2.** $A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$ **అయితే $A^3-6A^2+9A-4I=O$ అని చూపి $A^{-1}$ ను కనుగొనండి.**

**Sol:** $A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$

$A^2=A.A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}4+1+1&-2-2-1&2+1+2\\-2-2-1&1+4+1&-1-2-2\\2+1+2&-1-2-2&1+1+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-5&5\\-5&6&-5\\5&-5&6\end{bmatrix}$

$A^3=A^2.A=\begin{bmatrix}6&-5&5\\-5&6&-5\\5&-5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}12+5+5&-6-10-5&6+5+10\\-10-6-5&5+12+5&-5-6-10\\10+5+6&-5-10-6&5+5+12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22&-21&21\\-21&22&-21\\21&-21&22\end{bmatrix}$

BABY BULLET-Q AP

$$A^3-6A^2+9A-4I=\begin{bmatrix}22&-21&21\\-21&22&-21\\21&-21&22\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}6&-5&5\\-5&6&-5\\5&-5&6\end{bmatrix}+9\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}22&-21&21\\-21&22&-21\\21&-21&22\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}36&-30&30\\-30&36&-30\\30&-30&36\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}18&-9&9\\-9&18&-9\\9&-9&18\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}40&-30&30\\-30&40&-30\\30&-30&40\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}40&-30&30\\-30&40&-30\\30&-30&40\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=0$$

$A^3-6A^2+9A-4I=O$

$\Rightarrow (AAA)A^{-1}-6(AA)A^{-1}+9AA^{-1}-4IA^{-1}=O$ [Post-multiplying by $A^{-1}$ as $|A|\neq 0$]

$\Rightarrow AA(AA^{-1})-6A(AA^{-1})+9(AA^{-1})=4(IA^{-1})$

$\Rightarrow AAI-6AI+9I=4A^{-1}\Rightarrow A^2-6A+9I=4A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}(A^2-6A+9I)$.....(1)

$$A^2-6A+9I=\begin{bmatrix}6&-5&5\\-5&6&-5\\5&-5&6\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}+9\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6&-5&5\\-5&6&-5\\5&-5&6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}12&-6&6\\-6&12&-6\\6&-6&12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1&-1\\1&3&1\\-1&1&3\end{bmatrix}$$.....(2)

(1) , (2) నుండి $A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&1&-1\\1&3&1\\-1&1&3\end{bmatrix}$

BABY BULLET-Q AP

## త్రిపరిమాణ జ్యామితి

**3.** **(1, 2, – 4) బిందువు గుండాపోతూ** $\frac{x-8}{3}=\frac{y+19}{-16}=\frac{z-10}{7}$ and $\frac{x-15}{3}=\frac{y-29}{8}=\frac{z-5}{-5}$ **రేఖలకు లంబంగా ఉండే సదిశా సమీకరణంను కనుక్కోండి.**

**Sol:** $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}, \vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ అనుకొనుము

(1,2,–4) బిందువు గుండా పోతూ మరియు $\vec{b}$ సదిశకు సమాంతరంగా ఉండే రేఖా సమీకరణం

$\Rightarrow \vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b} \Rightarrow \vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k})+\lambda(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})$.....(1)

దత్త రేఖల సమీకరణాలు

$\frac{x-8}{3}=\frac{y+19}{-16}=\frac{z-10}{7}$.....(2) , $\frac{x-15}{3}=\frac{y-29}{8}=\frac{z-5}{-5}$.....(3)

(1) మరియు (2) సమీకరణాల రేఖలు ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉన్నాయి కాబట్టి,

$3b_1-16b_2+7b_3=0$...(4)

అలాగే, (1) మరియు (3) రేఖలు కూడా ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉన్నాయి $\Rightarrow 3b_1+8b_2-5b_3=0$.....(5)

(4) మరియు (5) సమీకరణాలను సాధించగా, మనకు:

$$\frac{b_1}{(-16)\times(-5)-8\times7}=\frac{b_2}{7\times3-3\times(-5)}=\frac{b_3}{3\times8-3\times(-16)} \Rightarrow \frac{b_1}{24}=\frac{b_2}{36}=\frac{b_3}{72} \Rightarrow \frac{b_1}{2}=\frac{b_2}{3}=\frac{b_3}{6}$$

$\vec{b}$ సదిశ యొక్క దిక్ నిష్పత్తులు 2,3, 6

$\therefore \vec{b}=2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}$

(1)లో $\vec{b}=2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}$ అని రాయగా, $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k})+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$

$\therefore$కావున కావలసిన రేఖ యొక్క సదిశా సమీకరణం $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k})+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$

BABY BULLET-Q AP

## సంభావ్యత

**4.** **A మరియు B లు ఒకరి తరువాత ఒకరుగా ఒక పాచికను, వారిలో ఒకరికి 6 వచ్చేవరకు దొర్లిస్తారు. A ఆటను మొదట ప్రారంభిస్తే, వారు గెలిచే సంభవ్యాతలను కనుక్కోండి.**

**Sol:** '6' రావడాన్ని గెలుపు (S) అని, '6' రాకపోవడాన్ని ఓటమి (F) అని అనుకుందాం).

$$P(S)=\frac{1}{6}, P(F)=\frac{5}{6}$$

P( మొదటిసారి దొర్లించినప్పుడు A గెలవడం) = $P(S)=\frac{1}{6}$

A మొదటిసారి మరియు B రెండవసారి ఎగురవేసి విఫలమైతే, A మూడవసారి ఎగురవేయవచ్చు.

$\therefore$ P( మూడవ సారి దొర్లించినప్పుడు A గెలవడం) = $P(FFS)=P(F)\,P(F)\,P(S)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}$

P(ఐదవ సారి దొర్లించినప్పుడు A గెలవడం) = $P(FFFFS)=\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)$ అలా కొనసాగిస్తే

(i) $P(A\text{గెలవడం})=\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)+..=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{25}{36}}=\frac{6}{11}$ $\left[\because S_\infty=\frac{a}{1-r}\right]$

(ii) $P(B\text{గెలవడం})=1-P(A\text{గెలవడం})=1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}$

BABY BULLET-Q AP

# అవకలజాల అనువర్తనం

**5.** ఒక ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం సెకనుకు 8 సెం.మీ$^3$ చొప్పున ఏకరీతిగా పెరుగుతోంది. దాని అంచు పొడవు 12 సెం.మీ. అయినప్పుడు, దాని ఉపరితల వైశాల్యం ఎంత వేగంగా పెరుగుతుంది?

**Sol:** ఒక ఘనం కొరకు అంచు పొడవు =x , ఘనపరిమాణం=V, ఉపరితల వైశాల్యం=S

దత్తాంశం నుండి $\frac{dV}{dt}=8cm^3/s$, x=12 cm

ఘనం ఘనపరిమాణం $V=x^3$ 't', దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా $\frac{dV}{dt}=3x^2\frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow 8=3x^2\frac{dx}{dt}\Rightarrow\frac{dx}{dt}=\frac{8}{3x^2}$

ఉపరితల వైశాల్యం $S=6x^2$

't', దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా $\frac{dS}{dt}=12x\frac{dx}{dt}=12\cancel{x}\left(\frac{8}{3\cancel{x^2}}\right)=\frac{32}{x}$

x=12 cm అయితే $\Rightarrow\frac{ds}{dt}=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}cm^2/s$

---

**6.** గాలితో ఉబ్బినప్పుడు సర్వదా గోళాకారంలోనే ఉండే ఒక గాలి బుడగ (బెలూన్) సెకనుకు 900 ఘనసెం.మీల చొప్పున లోపలకు గాలిని ఊదడం ద్వారా ఉబ్బుతుంది. వ్యాసార్ధం 15 సెం.మీ. లు అయినప్పుడు, గాలి బుడగ వ్యాసార్ధం ఏ రేటులో పెరుగుతుందో కనుక్కోండి.

**Sol:** గోళం కొరకు మనం వ్యాసార్ధం= r మరియు ఘనపరిమాణం=V అనుకొనుము.

దత్తాంశం నుండి $\frac{dV}{dt}=900$ c.c/s , r = 15 cm

గోళం యొక్క ఘనపరిమాణం $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 't', దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా we get $\frac{dV}{dt}=\frac{4}{\cancel{3}}\pi\cancel{3}r^2\frac{dr}{dt}$

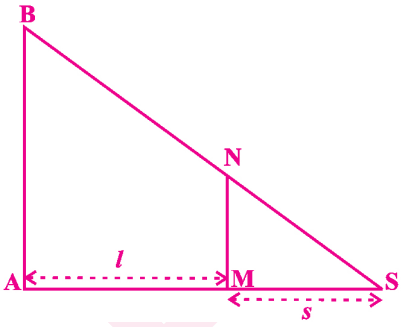
$\Rightarrow 900=4\pi(15)^2\frac{dr}{dt}\Rightarrow\frac{dr}{dt}=\frac{900}{4\pi\times15\times15}=\frac{\cancel{900}}{\cancel{900}\pi}=\frac{1}{\pi}$ cm/s

BABY BULLET-Q AP

**7.** **6 మీటర్ల ఎత్తు గల ఒక దీపస్తంభం నుండి దూరంగా, గంటకు 5 కి.మీ.ల వేగంతో 2 మీ. ఎత్తుగల ఒక వ్యక్తి నడుస్తుంటే అతని నీడ పొడవు ఏ రేటులన పెరుగుతుందో కనుక్కోంది.**

**Sol:** AB ను దీపస్తంభం అని, B వద్ద దీపం ఉందని, మరియు ఏదైనా ఒక సమయం 't' వద్ద MN ను మనిషి స్థానంగా అనుకుందాం. ఇంకా $AM = l$ మీటర్లు అనుకొనుము:

అప్పుడు MS అనేది ఆ మనిషి యొక్క నీడ అవుతుంది. $MS = s$ మీటర్లు అనుకొందాం.




ఇక్కడ $\Delta MSN \sim \Delta ASB$ (సరూప త్రిభుజాలు)

$$\frac{MS}{AS} = \frac{MN}{AB}$$

$AS = 3s$ ($MN = 2$ మరియు $AB = 6$ (given))

కావున $AM = 3s - s = 2s$. కానీ $AM = l$

కాబట్టి $l = 2s$

$$\therefore \frac{dl}{dt} = 2\frac{ds}{dt}. \qquad \because \frac{dl}{dt} = \frac{5}{2}\text{ km/h.}$$

అందువల్ల నీడ పొడవు $\frac{5}{2}$ km/h రేటుతో పెరుగుతుంది.

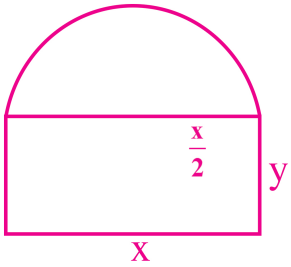
BABY BULLET AP

8. ఒక కిటికి, ఒక దీర్ఘ చతురస్రంపై దాని భుజంతో సమానమైన వ్యాసాన్ని కలిగిన అర్ధ వృత్తాన్ని నిలబెట్టినట్లు ఉన్న రూపంలో ఉంది. కిటికీ యొక్క మొత్తం చుట్టుకొలత **10** మీ. అట్లాంటి తెరిచి యున్న అంతటి నుండి గరిష్ఠ వెలుతురును పొంద గలిగేటట్లు ఆ కిటికీ కొలతలను కనుక్కోండి

**Sol:** దీర్ఘచతురస్రాకార కిటికీ యొక్క పొడవు మరియు వెడల్పులను x మరియు y అనుకుందాం.

అర్ధవృత్తాకార ద్వారం యొక్క వ్యాసార్ధం x/2 అవుతుంది.

కిటికీ యొక్క చుట్టుకొలత 10m అని ఇవ్వబడింది.




$$\therefore x+2y+\frac{\pi x}{2}=10 \Rightarrow x\left(1+\frac{\pi}{2}\right)+2y=10$$

$$\Rightarrow 2y=10-x\left(1+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y=5-x\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

కిటికీ (A) యొక్క వైశాల్యం ,

$$A=xy+\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2=x\left[5-x\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]+\frac{\pi}{8}x^2=5x-x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{8}x^2$$

$$\therefore \frac{dA}{dx}=5-2x\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}x=5-x-\frac{\pi}{4}x$$

$$\frac{d^2A}{dx^2}=-1-\frac{\pi}{4}=-\left(1+\frac{\pi}{4}\right)<0$$

ఇప్పుడు $\frac{dA}{dx}=0$

$$\Rightarrow 5-x-\frac{\pi}{4}x=0 \Rightarrow x\left(1+\frac{\pi}{4}\right)=5 \Rightarrow x=\frac{5}{\left(1+\frac{\pi}{4}\right)} \Rightarrow x=\frac{20}{\pi+4}$$

$x=\frac{20}{\pi+4}$ అయితే $\frac{d^2A}{dx^2}<0$ అగును.

∴రెండవ అవకలన పరీక్ష ద్వారా పొడవు $\frac{20}{\pi+4}$ m అయినప్పుడు వైశాల్యం గరిష్టం అవుతుంది

ఇప్పుడు $y=5-\frac{20}{\pi+4}\left(\frac{2+\pi}{4}\right)=5-\frac{5(2+\pi)}{\pi+4}=\frac{10}{\pi+4}$

గరిష్ఠ వెలుతురును పొంద గలిగేటట్లు ఆ కిటికీ కొలతలు పొడవు $\frac{20}{\pi+4}$ m మరియు వెడల్పు $\frac{10}{\pi+4}$ m గా ఉండును.

BABY BULLET AP

## సమాకలనం

**9.** $\int_0^{\pi} \frac{xdx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$ ను గణన చేయండి.

**Sol:**

$$I = \int_0^{\pi} \frac{xdx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)dx}{a^2\cos^2(\pi - x) + b^2\sin^2(\pi - x)}$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{xdx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} - I$$

$$\Rightarrow 2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

$$= \pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\right]$$

$$= \pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x dx}{a^2 + b^2\tan^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{cosec}^2 x dx}{a^2\cot^2 x + b^2}\right]$$

$$= \pi\left[\int_0^1 \frac{dt}{a^2 + b^2t^2} - \int_1^0 \frac{du}{a^2u^2 + b^2}\right] \quad [\tan x = t \text{ , } \cot x = u \text{ అని తీసుకొనగా}]$$

$$= \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{bt}{a}\right]_0^1 - \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{au}{b}\right]_1^0$$

$$= \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{b}{a} + \cot^{-1}\frac{b}{a}\right] = \frac{\pi}{ab}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2ab} \quad \left[\because \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right]$$

BABY BULLET-Q AP

**10.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x dx}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}$ యొక్క విలువను కనుక్కోండి.

**Sol:** $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 4\sin^2 x} dx$ అనుకొనుము

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 4(1-\cos^2 x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 4 - 4\cos^2 x} dx$$

$$= \frac{-1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-3\cos^2 x}{4-3\cos^2 x} dx = \frac{-1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4-3\cos^2 x-4}{4-3\cos^2 x} dx$$

$$= \frac{-1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4-3\cos^2 x}{4-3\cos^2 x} dx + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{4-3\cos^2 x} dx$$

$$= \frac{-1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sec^2 x}{4\sec^2 x - 3} dx = -\frac{1}{3}[x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sec^2 x}{4(1+\tan^2 x)-3} dx$$

$$= -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sec^2 x}{1+4\tan^2 x} dx \ldots\ldots(1)$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sec^2 x}{1+4\tan^2 x} dx$ అనుకొనుము

$2\tan x = t \Rightarrow 2\sec^2 x dx = dt$

$x = 0$ అయితే $t = 0$ మరియు $x = \frac{\pi}{2}$ అయితే $t = \infty$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sec^2 x}{1+4\tan^2 x} dx = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \left[\tan^{-1} t\right]_0^{\infty} = \left[\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(0)\right] = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ (1) నుండి $I = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\left[\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

BABY BULLET-Q AP

**11.** $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx.$ ను గణన చేయండి.

**Sol:** $\tan\frac{x}{2}=t \Rightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2}; \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ and $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

$$\therefore I=\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\left(\frac{2dt}{1+t^2}\right)}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)+2t+(1-t^2)}$$

$$=2\int\frac{1}{2+2t}dt=\int\frac{1}{1+t}dt=\log|1+t|+C=\log\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+C$$

---

**12.** $\int\left[\sqrt{\cot x}+\sqrt{\tan x}\right]dx$ ను కనుక్కోండి.

**Sol:** $I=\int[\sqrt{\cot x}+\sqrt{\tan x}]\,dx=\int\sqrt{\tan x}(1+\cot x)\,dx$

$\tan x=t^2 \Rightarrow \sec^2 x\,dx=2t\,dt$ or $dx=\frac{2tdt}{1+t^4}$

అప్పుడు $I=\int t\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\frac{2t}{(1+t^4)}dt=2\int\frac{(t^2+1)}{t^4+1}dt=2\int\frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt}{\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)}=2\int\frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2}$

$t-\frac{1}{t}=y\Rightarrow\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=dy.$

$$\mathbf{I}=2\int\frac{dy}{y^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{2}}+\mathbf{C}=\sqrt{2}\tan^{-1}\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{2}}+\mathbf{C}$$

$$=\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t}\right)+\mathbf{C}=\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x-1}{\sqrt{2}\tan x}\right)+\mathbf{C}$$

BABY BULLET-Q

**13.** $\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}$ యొక్క సమాకలనిని కనుక్కోండి.

**Sol:** $\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}=\frac{x^4+3x^2+2}{x^4+7x^2+12}=\frac{(x^4+7x^2+12)-4x^2+10}{x^4+7x^2+12}=1-\frac{(4x^2+10)}{(x^2+3)(x^2+4)}$ ...(1)

$x^2=y$ అని రాయగా

$$\frac{(4y+10)}{(y+3)(y+4)}=\frac{A}{(y+3)}+\frac{B}{(y+4)}=\frac{A(y+4)+B(y+3)}{(y+3)(y+4)}$$

$\Rightarrow A(y+4)+B(y+3)=(4y+10)$ ....(1)

(1) లో $y=-3$ అని రాయగా $\Rightarrow A(-3+4)+B(0)=-12+10=-2\Rightarrow A=-2$

(1) లో $y=-4$ అని రాయగా $\Rightarrow A(0)+B(-4+3)=-16+10=-6\Rightarrow B=6$

(1) నుండి,

$$\int\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}dx=\int 1-\left[\frac{-2}{(x^2+3)}+\frac{6}{(x^2+4)}\right]dx=\int\left[1+\frac{2}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}-\frac{6}{x^2+2^2}\right]dx$$

$$=x+2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right)-6\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\right)+C=x+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}-3\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$$

BABY BULLET-Q AP

**14.** $\frac{1}{x^4-1}$ యొక్క సమాకలనంను కనుక్కోండి.

**Sol:** $G.E = \frac{1}{(x^4-1)} = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)}$$

$$= \frac{A(x-1)(1+x^2)+B(x+1)(1+x^2)+(Cx+D)(x^2-1)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$$

$$A(x-1)(1+x^2)+B(x+1)(1+x^2)+(Cx+D)(x^2-1)=1 \ldots\ldots(1)$$

$$\Rightarrow A(x^3+x-x^2-1)+B(x^3+x+x^2+1)+Cx^3+Dx^2-Cx-D=1$$

$$\Rightarrow (A+B+C)x^3+(-A+B+D)x^2+(A+B-C)x+(-A+B-D)=1$$

(1) లో $x=-1$ అని రాయగా $\Rightarrow A(-1-1)(1+1)+0+0=1 \Rightarrow -4A=1 \Rightarrow A=-1/4$

(1) లో $x=1$ అని రాయగా $\Rightarrow 0+B(1+1)(1+1)+0=1 \Rightarrow 4B=1 \Rightarrow B=1/4$

$x^3$ గుణకాలను సమానం చేయగా

$$A+B+C=0 \Rightarrow C=-A-B=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

$x^2$ గుణకాలను సమానం చేయగా

$$-A+B-D=1 \Rightarrow D=A-B=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore A=-\frac{1}{4}, B=\frac{1}{4}, C=0, D=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{(x^4-1)} = \frac{-1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{2(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(x^4-1)}dx = \int \frac{-1}{4(x+1)}dx + \int \frac{1}{4(x-1)}dx - \int \frac{1}{2(1+x^2)}dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(x^4-1)}dx = -\frac{1}{4}\log|x+1| + \frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C \qquad \left[\because \log a - \log b = \log\left(\frac{a}{b}\right)\right]$$

BABY BULLET-Q AP