LAQ PQ QUESTIONS

1. మాత్రికా పద్ధతి ద్వారా ఈ కింది సమీకరణాల వ్యవస్థను సాధించండి.
$x - y + z = 4, 2x + y - 3z = 0, x + y + z = 2$

2. $\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ మరియు $\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$ రేఖల మధ్య అల్పతమ దూరం కనుక్కోండి.

3. $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$, $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ గా ఇవ్వబడిన రేఖలు l_1, l_2 ల మధ్య దూరంను కనుక్కోండి.

4. సమాంతర రేఖలు $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}$ మరియు $\frac{x+2}{-1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{3}$ ల మధ్య దూరం కనుక్కోండి.

5. I వ సంచిలో 3 ఎర్రని మరియు 4 నల్లని బంతులు మరియు II వ సంచిలో 4 ఎర్రని మరియు 5 నల్లని బంతులు కలవు. ఒక బంతిని I వ సంచి నుండి II వ సంచిలోనికి బదిలీచేసిన తరువాత II వ సంచి నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక బంతిని తీసారు.అట్లా తీసిన తరువాత అది ఎరుపు రంగుదని గుర్తించారు. అయితే బదిలీ చేసిన బంతి నల్లనిది కావడానికి గల సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

6. ఒక వ్యక్తి నాలుగు సార్లు మాట్లాడితే దానిలో మూడుసార్లు నిజం మాట్లాడతాడని తెలుసు. అతడు ఒక పాచికను దొర్లించి, అది ఆరు అని ప్రకటిస్తాడు. అది నిజంగా ఆరు అయ్యే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

7. ఒక బహుళైచ్ఛిక పరీక్షలోని ఏదైనా ఒక ప్రశ్నకు ఒక విద్యార్థి సమాధానం తెలియడం వల్ల గాని లేదా ఊహించడం వల్ల గాని సమాధానమిస్తాడు. అతడికి సమాధానం తెలిసి ఉండడానికి సంభావ్యత 3/4 మరియు అతడు సమాధానాన్ని ఊహించడానికి సంభావ్యత 1/4 అనుకుందాం. ఆ విద్యార్థి సమాధానాన్ని ఊహించినప్పుడు, అది ఒప్పుకోవడానికి సంభావ్యత అనుకుందాం. ఆ విద్యార్థి ఇచ్చిన సమాధానం ఒప్పు అని తెలిసినప్పుడు, అతడికి సమాధానం తెలిసి ఉండడానికి సంభావ్యత ఎంత?

8. రెండు ధన సంఖ్యలను, వాటి మొత్తం 16 మరియు వాటి ఘనాల మొత్తం కనిష్ఠమయ్యేట్లుగా కనుక్కోండి.

9. 3మీ × 8 మీ.ల కొలతలు గల ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకారపు అల్యూమినియం షీట్ యొక్క ప్రతి మూల నుండి సమానమైన చతురస్రాలను తొలగించి, దాని భుజాలను పైకి మడవడం ద్వారా మూతలేని ఒక పెట్టెను నిర్మించాలి. అట్లాంటి పెట్టె యొక్క గరిష్ఠ ఘన పరిమాణాన్ని కనుక్కోండి.

10. రెండు ధన సంఖ్యలు x మరియు y లు మొత్తం 35 మరియు లబ్దం $x^2 y^5$ గరిష్ఠమయ్యేట్లుగా కనుక్కోండి.

11. 28 మీ. పొడవు గల ఒక తీగను రెండు ముక్కలుగా చేసారు. ఒక ముక్కతో చతురస్రాన్ని, మరొక ముక్కతో వృత్తాన్ని తయారుచేయాలి. చతురస్రము మరియు వృత్తాల మొత్తం (సంయుక్త) వైశాల్యం కనిష్ఠంగా ఉండాలంటే, ఆ రెండు ముక్కల పొడవులు ఎంత ఉండాలి?

12. R వ్యాసార్ధంగా గల గోళంలో అంతర్లిఖించగలిగే గరిష్ఠ ఘనపరిమాణం గల స్థూపం యొక్క ఎత్తు $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ అని చూపండి. ఇంకా ఆ గరిష్ఠ ఘనపరిమాణాన్ని కనుక్కోండి.

13. $\int_0^{\pi} \log(1+\cos x)\,dx$ ను గణన చేయండి.

14. $(x - y)\,dy - (x + y)\,dx = 0$ అవకలన సమీకరణం సమఘాతమని చూపండి మరియు దీనిని సాధించండి.

BABY BULLETIN AP

LAQ PQ SOLUTIONS

నిర్ధారకాలు

1. **మాత్రికా పద్ధతి ద్వారా ఈ కింది సమీకరణాల వ్యవస్థను సాధించండి.**

$x - y + z = 4,\ 2x + y - 3z = 0,\ x + y + z = 2$

Sol: ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థను, $AX = B$ రూపంలో రాయగా,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ మరియు } B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ఇప్పుడు, $|A| = 1(1+3)+1(2+3)+1(2-1) = 4+5+1 = 10 \neq 0$

కాబట్టి, A సాధారణ మాత్రిక, కావున విలోమం A^{-1} వ్యవస్థితం.

మాత్రిక A యొక్క సహగుణావయవాలు :

$A_{11} = 4;\ A_{12} = -5;\ A_{13} = 1$

$A_{21} = 2;\ A_{22} = 0\ ;\ A_{23} = -2$

$A_{31} = 2;\ A_{32} = 5\ ;\ A_{33} = 3$

కావున, $\text{adj}A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

ఇప్పుడు, $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 16+0+4 \\ -20+0+10 \\ 4+0+6 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = 2, y = -1$ మరియు $z = 1$

BABY BULLET-Q AP

త్రిపరిమాణ జ్యామితి

2. $\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ మరియు $\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$ రేఖల మధ్య అల్పతమ దూరం కనుక్కోండి.

Sol: దత్త రెండు అసౌష్ఠవ రేఖలను పోల్చగా $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ మరియు $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$

$\vec{a_1} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{a}_2 = -4\hat{i} - \hat{k}$ మరియు $\vec{b}_1 = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b}_2 = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

ఇప్పుడు, $\vec{a_1} - \vec{a_2} = (6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) - (-4\hat{i} - \hat{k}) = 10\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$$\vec{b_1} \times \vec{b_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (4+4)\hat{i} - (-2-6)\hat{j} + (-2+6)\hat{k} = 8\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$|\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{(8)^2 + (8)^2 + (4)^2} = \sqrt{64+64+16} = \sqrt{144} = 12$$

రేఖల మధ్య అల్పతమ దూరం $d = \dfrac{|(\vec{a_1} - \vec{a_2}).(\vec{b_1} \times \vec{b_2})|}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|}$

$$\Rightarrow d = \frac{|(10\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}).(8\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k}))|}{12} = \frac{|80+16+12|}{12} = \frac{108}{12} = 9 \text{ యూనిట్లు.}$$

---

3. $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$, $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ గా ఇవ్వబడిన రేఖలు l_1, l_2 ల మధ్య దూరంను కనుక్కోండి.

Sol: దత్త రెండు సమాంతర రేఖలను $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ .....(1)

$\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ .....(2)

(1), (2) లను $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}$ మరియు $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}$ లతో పోల్చగా,

$\vec{a}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{a}_2 = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ మరియు $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$

ఇక్కడ, $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = (\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) - (3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) = -2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$$\therefore (\vec{a}_1 - \vec{a}_2) \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = (-6-3)\hat{i} - (-12-2)\hat{j} + (-6+2)\hat{k} = -9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}$$

అలాగే, $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$

$\therefore$ ఇచ్చిన సమాంతర రేఖల మధ్య దూరం $d = \dfrac{|(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)\vec{b}|}{|\vec{b}|} = \dfrac{|-9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}|}{7} = \dfrac{\sqrt{293}}{7}$

BABY BULLET-Q AP

4. సమాంతర రేఖలు $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-3}$ మరియు $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{3}$ ల మధ్య దూరం కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చిన రేఖలు $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-3}$ మరియు $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{3}$

కావున, $\vec{a}_1=(1,2,3)=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$

$\vec{a}_2=(-2,-1,-2)=-2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}$

$\Rightarrow \vec{a}_1-\vec{a}_2=(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})-(-2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k})=3\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$

$\vec{b}=(1,2,-3)=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ అనుకుందాం

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$

ఇప్పుడు, $(\vec{a}_1-\vec{a}_2)\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\3&3&5\\1&2&-3\end{vmatrix}=(-9-10)\hat{i}-(-9-5)\hat{j}+(6-3)\hat{k}=-19\hat{i}+14\hat{j}+3\hat{k}$

$|(\vec{a}_1-\vec{a}_2)\times\vec{b}|=\sqrt{(-19^2)+(14)^2+3^2}=\sqrt{381+256+9}=\sqrt{566}$

ఇచ్చిన సమాంతర రేఖల మధ్య దూరం $d=\frac{|(\vec{a}_1-\vec{a}_2)\times\vec{b}|}{|\vec{b}|}=\frac{\sqrt{566}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{283}{7}}$

BABY BULLET-Q AP

సంభావ్యత

5. **I వ సంచిలో 3 ఎర్రని మరియు 4 నల్లని బంతులు మరియు IIవ సంచిలో 4 ఎర్రని మరియు 5 నల్లని బంతులు కలవు. ఒక బంతిని I వ సంచి నుండి II వ సంచిలోనికి బదిలీచేసిన తరువాత II వ సంచి నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక బంతిని తీసారు. అట్లా తీసిన తరువాత అది ఎరుపు రంగుదని గుర్తించారు. అయితే బదిలీ చేసిన బంతి నల్లనిది కావడానికి గల సంభావ్యతను కనుక్కోండి.**

Sol: I వ సంచి నుండి II వ సంచికి ఒక ఎర్రని బంతి బదిలీ అయ్యే ఘటనను E_1 అని, మరియు నల్లని బంతి బదిలీ అయ్యే ఘటనను E_2 అని అనుకుందాం.

$P(E_1)=\frac{3}{7}$ మరియు $P(E_2)=\frac{4}{7}$

ఎర్రని బంతిని తీసే ఘటనను A అనుకుందాం.

సంచి I నుండి II ఎర్రని బంతి బదిలీ అయినప్పుడు, $P(A|E_1)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

సంచి I నుండి II నల్లని బంతి బదిలీ అయినప్పుడు, $P(A|E_2)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

$$P(E_2|A)=\frac{P(E_2)P(A|E_2)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)}=\frac{\frac{4}{7}\times\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{7}\times\frac{2}{5}}=\frac{16}{31}$$

---

6. **ఒక వ్యక్తి నాలుగు సార్లు మాట్లాడితే దానిలో మూడుసార్లు నిజం మాట్లాడతాడని తెలుసు. అతడు ఒక పాచికను దొర్లించి, అది ఆరు అని ప్రకటిస్తాడు. అది నిజంగా ఆరు అయ్యే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.**

Sol: పాచికను దొర్లించినప్పుడు ఆ వ్యక్తి ఆరు పడినట్లు నివేదించే ఘటనను E అనుకుందాం మరియు ఆరు పడే ఘటనను S_1 అని మరియు ఆరు పడనట్టి ఘటనను S_2 అని అనుకుందాం.

అప్పుడు, $P(S_1)$ = ఆరు పడే సంభావ్యత $=\frac{1}{6}$

$P(S_2)$ = ఆరు పడనినట్టి సంభావ్యత $=\frac{5}{6}$

$P(E|S_1)$ = పాచికపై నిజంగానే ఆరు పడినప్పుడు, ఆ వ్యక్తి ఆరు పడినట్లు నివేదించే సంభావ్యత = ఆ వ్యక్తి నిజం మాట్లాడే సంభావ్యత $=\frac{3}{4}$

$P(E|S_2)$ = పాచికపై నిజంగానే ఆరు పడనప్పుడు, ఆ వ్యక్తి ఆరు పడినట్లు నివేదించే సంభావ్యత = ఆ వ్యక్తి నిజం మాట్లాడనట్టి సంభావ్యత $=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

కాబట్టి, బేయిస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం,

ఆ వ్యక్తి ఆరు పడినట్లు నివేదించినప్పుడు అది నిజంగానే ఆరు అయ్యే సంభావ్యత $=P(S_1|E)$

$$=\frac{P(S_1)P(E|S_1)}{P(S_1)P(E|S_1)+P(S_2)P(E|S_2)}=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}}=\frac{1}{8}\times\frac{24}{8}=\frac{3}{8}$$

కాబట్టి, కావలసిన సంభావ్యత $\frac{3}{8}$

BABY BULLET-Q APP

7. ఒక బహుళైచ్ఛిక పరీక్షలోని ఏదైనా ఒక ప్రశ్నకు ఒక విద్యార్థి సమాధానం తెలియడం వల్ల గాని లేదా ఊహించడం వల్ల గాని సమాధానమిస్తాడు. అతడికి సమాధానం తెలిసి ఉండడానికి సంభావ్యత 3/4 మరియు అతడు సమాధానాన్ని ఊహించడానికి సంభావ్యత 1/4 అనుకుందాం. ఆ విద్యార్థి సమాధానాన్ని ఊహించినప్పుడు, అది ఒప్పు అవ్వడానికి సంభావ్యత అనుకుందాం. ఆ విద్యార్థి ఇచ్చిన సమాధానం ఒప్పు అని తెలిసినప్పుడు, అతడికి సమాధానం తెలిసి ఉండడానికి సంభావ్యత ఎంత?

Sol: విద్యార్థికి సమాధానం తెలిసి ఉండే మరియు అతను సమాధానాన్ని ఊహించే ఘటనను వరుసగా E_1 మరియు E_2 అనుకుందాం.

సమాధానం ఒప్పు అవ్వడానికి సంభావ్యత A అనుకుందాం. $P(E_1)=\frac{3}{4}$, $P(E_2)=\frac{1}{4}$

విద్యార్థికి సమాధానం తెలిసినప్పుడు, అతను సరైన సమాధానం ఇచ్చే సంభావ్యత 1

$\therefore P(A|E_1) = 1$

విద్యార్థి సమాధానం ఊహించినప్పుడు, సరైన సమాధానం ఇచ్చే సంభావ్యత 1/4.

$\therefore P(A|E_2) = 1/4$

విద్యార్థి సరైన సమాధానం రాశాడని తెలిసినప్పుడు, అతనికి సమాధానం తెలిసి ఉండే సంభావ్యతను $P(E_1|A)$ ద్వారా సూచిస్తాం.

కాబట్టి, బేయిస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం,

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1)\cdot P(A|E_1)}{P(E_1)\cdot P(A|E_1)+P(E_2)\cdot P(A|E_2)} = \frac{\frac{3}{4}\times 1}{\frac{3}{4}\times 1+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{16}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{13}{16}} = \frac{12}{13}$$

BABY BULLET-Q APP

అవకలజాల అనువర్తనం

8. రెండు ధన సంఖ్యలను, వాటి మొత్తం 16 మరియు వాటి ఘనాల మొత్తం కనిష్ఠమయ్యేట్లుగా కనుక్కోండి.

Sol: రెండు ధన సంఖ్యలు x, (16–x) అనుకుందాం.

ఈ రెండు సంఖ్యల ఘనాల మొత్తాన్ని S(x) తో సూచిస్తే

అప్పుడు, $S(x) = x^3 + (16-x)^3$.

$\therefore S'(x) = 3x^2 + 3(16-x)^2(-1) = 3x^2 - 3(16-x)^2 \Rightarrow S''(x) = 6x + 6(16-x)$

ఇప్పుడు, $S'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3(16-x)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - (16-x)^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 256 - x^2 + 32x = 0 \Rightarrow x = \frac{256}{32} \Rightarrow x = 8$

అలాగే, $S''(8) = 6(8) + 6(16-8) = 48 + 48 = 96 > 0$

రెండవ అవకలజ పరీక్ష ద్వారా, x = 8 అనేది S యొక్క స్థానిక కనిష్ఠ బిందువు.

కాబట్టి, ఆ సంఖ్యలు 8 మరియు (16–8) = 8.

అందువల్ల, ఆ సంఖ్యలు ఒక్కొక్కటి 8 అయినప్పుడు వాటి ఘనాల మొత్తం కనిష్ఠం అవుతుంది.

---

9. 3మీ × 8 మీ.ల కొలతలు గల ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకారపు అల్యూమినియం షీట్ యొక్క ప్రతి మూల నుండి సమానమైన చతురస్రాలను తొలగించి, దాని భుజాలను పైకి మడవడం ద్వారా మూతలేని ఒక పెట్టెను నిర్మించాలి. అట్లాంటి పెట్టె యొక్క గరిష్ఠ ఘన పరిమాణాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: తొలగించిన చతురస్రాల భుజం పొడవు x మీటర్లు అనుకుందాం.



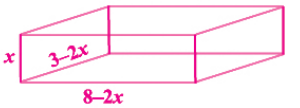
(a)

అప్పుడు, పెట్టె యొక్క ఎత్తు x, పొడవు 8 – 2x మరియు వెడల్పు 3 – 2x

V(x) అనేది పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణం అయితే, అప్పుడు

$V(x) = x(3-2x)(8-2x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x$

$V'(x) = 12x^2 - 44x + 24 = 4(x-3)(3x-2) \Rightarrow V''(x) = 24x - 44$



(b)

ఇప్పుడు, $V'(x) = 0 \Rightarrow x = 3, \frac{2}{3}$. కాని, $x \neq 3$

ఈవిధంగా, మనకు $x = \frac{2}{3}$ వస్తుంది.

ఇప్పుడు, $V''\left(\frac{2}{3}\right) = 24\left(\frac{2}{3}\right) - 44 = -28 < 0$

$\Rightarrow x = \frac{2}{3}$ అనేది గరిష్ఠ బిందువు అవుతుంది, అనగా షీట్ యొక్క ప్రతి మూల నుండి 2/3 మీటర్ల భుజం కలిగిన చతురస్రాన్ని తొలగించి, మిగిలిన షీట్ నుండి ఒక పెట్టెను తయారు చేస్తే, అలా ఏర్పడిన పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణం గరిష్ఠంగా ఉంటుంది మరియు దానిని కింది విధంగా సూచిస్తాం

$$V\left(\frac{2}{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 24\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{200}{27}\text{m}^3.$$

BABY BULLET-Q AP

10. రెండు ధన సంఖ్యలు x మరియు y లు మొత్తం 35 మరియు లబ్ధం x^2y^5 గరిష్ఠమయ్యేట్లుగా కనుక్కోండి.

Sol: రెండు ధన సంఖ్యలు x మరియు $y=(35-x)$ అనుకుందాం.

$P(x)=x^2y^5$ అనుకుందాం. అప్పుడు $P(x)=x^2(35-x)^5$

$$P'(x) = 2x(35-x)^5+x^2 5(35-x)^4(-1)=2x(35-x)^5-5x^2(35-x)^4$$

$$=x(35-x)^4[2(35-x)-5x]=x(35-x)^4(70-7x)=7x(35-x)^4(10-x)$$

$$P''(x) = 7(35-x)^4(10-x)+7x[-(35-x)^4-4(35-x)^3(10-x)]$$

$$=7(35-x)^4(10-x)-7x(35-x)^4-28x(35-x)^3(10-x)$$

$$=7(35-x)^3[(35-x)(10-x)-x(35-x)-4x(10-x)]$$

$$=7(35-x)^3[350-45x+x^2-35x+x^2-40x+4x^2]$$

$$=7(35-x)^3(6x^2-120x+350)$$

ఇప్పుడు, $P'(x)=0\Rightarrow x=0, x=35, x=10$

$x = 35$ అయినప్పుడు, $P'(x)=P(x)=0\Rightarrow y=35-35=0$

ఇది x^2y^5 లబ్ధాన్ని 0కి సమానం చేస్తుంది.

$x = 0$ అయినప్పుడు, $y = 35 – 0 = 35$. ఇది x^2y^5 లబ్ధాన్ని 0కి సమానం చేస్తుంది.

కాబట్టి, $x = 0$ మరియు $x = 35$ అనేవి x యొక్క సాధ్యమయ్యే విలువలు కావు.

$x = 10$ అయినప్పుడు, $P''(x)=7(35-10)^3(6\times100-120\times10+350)=7(25)^3(-250)<0$

రెండవ అవకలన పరీక్ష ద్వారా, $x = 10$ మరియు $y = 35–10 = 25$ అయినప్పుడు $P(x)$ గరిష్ఠం అవుతుంది.
కావలసిన ధన సంఖ్యలు 10 మరియు 25.

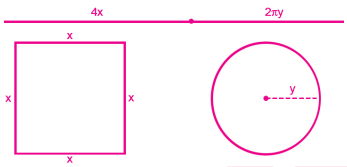
BABY BULLET-Q AP

11. **28 మీ. పొడవు గల ఒక తీగను రెండు ముక్కలుగా చేసారు. ఒక ముక్కతో చతురస్రాన్ని, మరొక ముక్కతో వృత్తాన్ని తయారుచేయాలి. చతురస్రము మరియు వృత్తాల మొత్తం (సంయుక్త) వైశాల్యం కనిష్ఠంగా ఉండాలంటే, ఆ రెండు ముక్కల పొడవులు ఎంత ఉండాలి?**

Sol: ఇచ్చిన తీగ నుండి ఒక చతురస్రాన్ని తయారు చేయడానికి l పొడవు గల ముక్కను కట్ చేసామనుకుందాం.

అప్పుడు, వృత్తంగా మార్చడానికి మిగిలిన తీగ ముక్క పొడవు $(28 - l)$ అవుతుంది.

ఇప్పుడు, చతురస్రం యొక్క భుజం = 1/4



వృత్తం యొక్క వ్యాసార్ధం r అనుకుందాం.

అప్పుడు, $2\pi r = 28 - l \Rightarrow r = \frac{1}{2\pi}(28-l)$

చతురస్రం మరియు వృత్తం యొక్క ఉమ్మడి వైశాల్యం A, ఈ విధంగా ఇవ్వబడింది.

$A = (\text{చతురస్ర వైశాల్యం})^2 + \pi r^2 = \frac{l^2}{16} + \pi\left[\frac{1}{2\pi}(28-l)\right]^2 = \frac{l^2}{16} + \frac{1}{4\pi}(28-l)^2$

కాబట్టి, $\frac{dA}{dl} = \frac{2l}{16} + \frac{2}{4\pi}(28-l)(-1) = \frac{l}{8} - \frac{1}{2\pi}(28-l)$

$\frac{d^2A}{dl^2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} > 0$

ఇప్పుడు, $\frac{d^2A}{dl^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{l}{8} - \frac{l}{2\pi}(28-l) = 0 \Rightarrow \frac{\pi l - 4(28-l)}{8\pi} = 0 \Rightarrow (\pi+4)l - 112 = 0 \Rightarrow l = \frac{112}{\pi+4}$

$l = \frac{112}{\pi+4}$ అయినప్పుడు, $\frac{d^2A}{dl^2} > 0$

రెండవ అవకలన పరీక్ష ద్వారా, $l = \frac{112}{\pi+4}$ సెం.మీ అయినప్పుడు వైశాల్యం (A) కనిష్ఠం అవుతుంది.

కాబట్టి, చతురస్రాన్ని తయారుచేయడానికి ఉపయోగించే తీగ పొడవు $l = \frac{112}{\pi+4}$ సెం.మీ

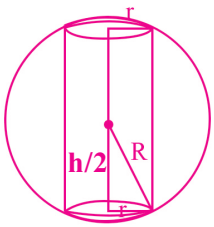
మరియు వృత్తాన్ని తయారుచేయడానికి ఉపయోగించే తీగ పొడవు $\left(28 - \frac{112}{\pi+4}\right) = \frac{28\pi}{\pi+4}$ సెం.మీ

అయినప్పుడు, చతురస్రం మరియు వృత్తాల మొత్తం (సంయుక్త) వైశాల్యం కనిష్ఠంగా ఉంటుంది.

BABY BULLET-Q AP

12. R వ్యాసార్ధంగా గల గోళంలో అంతర్లిఖించగలిగే గరిష్ఠ ఘనపరిమాణం గల స్థూపం యొక్క ఎత్తు $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ అని చూపండి. ఇంకా ఆ గరిష్ఠ ఘనపరిమాణాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: గోళం వ్యాస్థాం R



r మరియు h లు స్థూపం యొక్క వ్యాసార్ధం మరియు ఎత్తు అనుకుందాం.

ఇచ్చిన పటం నుండి మనకు $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ వస్తుంది.

స్థూపం యొక్క ఘనపరిమాణం ఈ విధంగా ఇవ్వబడింది, $V = \pi r^2 h = 2\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}$

$\therefore\ V = 2\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2} + \frac{2\pi r^2(-2r)}{2\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$= 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{2\pi r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$= \frac{4\pi r(R^2 - r^2) - 2\pi r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{4\pi r R^2 - 6\pi r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

ఇప్పుడు, $\frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{4\pi r R^2 - 6\pi r^3}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0 \Rightarrow 4\pi r R^2 = 6\pi r^3 \Rightarrow r^2 = \frac{2R^2}{3}$

అలాగే, $\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}(4\pi R^2 - 18\pi r^2) - (4\pi r R^2 - 6\pi r^3)\frac{(-2r)}{2\sqrt{R^2 - r^2}}}{(R^2 - r^2)}$

$$= \frac{(R^2 - r^2)(4\pi R^2 - 18\pi r^2) + r(4\pi r R^2 - 6\pi r^3)}{(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(4\pi R^4 - 22\pi r^2 R^2 + 12\pi r^4 + 4\pi r^2 R^2)}{(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ఇప్పుడు, $r^2 = \frac{2R^2}{3}$ వద్ద $\frac{d^2V}{dr^2} < 0$

కాబట్టి, $r^2 = \frac{2R^2}{3}$ అయినప్పుడు ఘనపరిమాణం గరిష్ఠం అవుతుంది.

అనాగే, $r^2 = \frac{2R^2}{3}$ అయినప్పుడు, స్థూపం యొక్క ఎత్తు $2\sqrt{R^2 - \frac{2R^2}{3}} = 2\sqrt{\frac{R^2}{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

కాబట్టి, స్థూపం యొక్క ఎత్తు $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ అయినప్పుడు, స్థూపం యొక్క ఘనపరిమాణం గరిష్ఠం అవుతుంది.

$\therefore$ స్థూపం యొక్క గరిష్ఠ ఘనపరిమాణం $= \pi r^2 h = 2\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2} = 2\pi\left(\frac{2R^2}{3}\right)\sqrt{R^2 - \left(\frac{2R^2}{3}\right)} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$

☺ HINT BOX ☺

$R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} \Rightarrow r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$

$\therefore\ V = \pi r^2 h = \pi h\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)$

$= \pi\left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right)$

$V' = \pi\left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right)$

$V'' = \pi\left(0 - \frac{6h}{4}\right) < 0$

కనిష్ఠ మరియు గరిష్ఠ కొరకు $V' = 0$

$R^2 = \frac{3h^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{4R^2}{3}$

$\Rightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

BABY BULLET

సమాకలనం

13. $\int_0^{\pi}\log(1+\cos x)dx$ ను గణన చేయండి.

Sol: $I=\int_0^{\pi}\log(1+\cos x)dx.....(1)$ అనుకొనుము. $\left(\because \int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx\right)$

$\Rightarrow I=\int_0^{\pi}\log(1-\cos x)dx.....(2)$

(1), (2)లను కలపగా $2I=\int_0^{\pi}[\log(1+\cos x)+\log(1-\cos x)]dx$

$2I=\int_0^{\pi}\log(1-\cos^2 x)dx \Rightarrow 2I=\int_0^{\pi}\log(\sin^2 x)dx$ $[\because \log x^n=n\log x]$

$\Rightarrow 2I=2\int_0^{\pi}\log(\sin x)dx \Rightarrow I=\int_0^{\pi}\log(\sin x)dx$ ...(3)

$\therefore \sin(\pi-x)=\sin x$

$\int_0^{2a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$ if $f(2a-x)=f(x)$ అని మనకు తెలుసు

$\therefore I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x dx$ ...(4) $\Rightarrow I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos x dx$ ...(5)

(4), (5) లను కలపగా, $2I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\log\sin x+\log\cos x dx)$

$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\log\sin x+\log\cos x+\log 2-\log 2)dx$

$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\log 2\sin x\cos x-\log 2)dx \Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin 2x dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log 2 dx$

$2x=t$ అనుకుందాం $\Rightarrow 2dx=dt$

$x=0$ అయినప్పుడు $\Rightarrow t=0; x=\frac{\pi}{2}$ అయినప్పుడు $\Rightarrow t=\pi$

$\therefore I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log(\sin t)dt-\frac{\pi}{2}\log 2=\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\int_0^{\pi/2}\log(\sin t)dt-\frac{\pi}{2}\log 2=-\frac{\pi}{2}\log 2-\frac{\pi}{2}\log 2=-\pi\log 2$

$\left[\because \int_0^{\pi/2}\log(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\log 2\right]$

BABY BULLET-Q AP

అవకలన సమీకరణాలు

14. $(x-y)\,dy-(x+y)\,dx=0$ అవకలన సమీకరణం సమఘాతమని చూపండి మరియు దీనిని సాధించండి.

Sol: ఇచ్చిన సమీకరణం $(x-y)dy-(x+y)dx=0\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$.....(1)

$F(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$ అనుకుందాం

అప్పుడు, $F(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda x+\lambda y}{\lambda x-\lambda y}=\frac{\lambda(x+y)}{\lambda(x-y)}=\lambda^0F(x,y)$

∴ ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణం ఒక సమఘాత సమీకరణం

$y=vx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(vx)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ అనుకుందాం

$$(1)\Rightarrow v+x\frac{dv}{dx}=\frac{x+vx}{x-vx}=\frac{1+v}{1-v}\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v}{1-v}-v=\frac{1+v-v(1-v)}{1-v}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{1-v}=\frac{1-v}{(1+v^2)}dv=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{1+v^2}-\frac{v}{1+v^2}\right)dv=\frac{dx}{x}$$

$$\tan^{-1}v-\frac{1}{2}\log(1+v^2)=\log x+C\Rightarrow\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\log\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]=\log x+C$$

$$\Rightarrow\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\log\left[\frac{x^2+y^2}{x^2}\right]=\log x+C$$

$$\Rightarrow\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\left[\log(x^2+y^2)-\log x^2\right]=\log x+C$$

$$\Rightarrow\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+C$$

ఇది ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణం యొక్క కావలసిన సాధారణ సాధన

BABY BULLET-Q AP