Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH -2025 (TS)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2025(TS)

Time : 3 Hours

MATHS-2B

Max.Marks : 75

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: **$10 \times 2 = 20$**

1. $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$ వృత్తము యొక్క కేంద్రము మరియు వ్యాసార్ధము కనుగొనుము.
2. $2x^2 + 2y^2 - 5x - 4y - 3 = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా P(4,2) బిందువు స్థితిని తెలపండి.
3. $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ అనే వృత్తాల ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ సమీకరణము కనుగొనుము.
4. నాభి దూరము 5/2 గా కలిగిన $y^2 = 2x$ పరావలయంపై బిందునిరూపకాలు కనుగొనుము.
5. $16y^2 - 9x^2 = 144$ అనే అతిపరావలయం యొక్క కేంద్రం, ఉత్కేంద్రత, నాభులు, నియత రేఖ సమీకరణం, నాభిలంబం పొడవులను కనుగొనుము.
6. $\int \sqrt[3]{2x^2}\, dx$ on $x \in (0,\infty)$ ను గణించండి.
7. $\int 2x\, e^{x^2} dx$ ను గణించండి.
8. $\int_0^4 |2 - x|\, dx$ ను గణించండి.
9. $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x\, dx$ ను గణించండి.
10. మూల బిందువు కేంద్రంగా గల వృత్తాలు కుటుంబపు అవకలన సమీకరణం మరియు దాని పరిమాణం కనుక్కోండి.

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. **$5 \times 4 = 20$**

11. $x^2 + y^2 - x - 3y - 4 = 0$ అనే వృత్తం మీద P(3, 2) అనే బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖ సమీకరణం కనుగొనుము.
12. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$ అనే వృత్తాలను లంబంగా ఖండిస్తూ మూలబిందువు గుండా పోవు వృత్త సమీకరణమును కనుగొనుము.
13. దీర్ఘవృత్తం యొక్క దీర్ఘాక్షం పొడవు, హ్రస్వాక్షం పొడవుకు మూడు రెట్లు ఉంటే ఉత్కేంద్రత కనుక్కోండి.
14. $x^2 + 3y^2 = 3$ దీర్ఘవృత్తానికి $4x + y + k = 0$ స్పర్శరేఖ అయితే k విలువ కనుక్కోండి.
15. ఉత్కేంద్రత 2, నాభులు (4, 2), (8, 2) గా గల అతిపరావలయ సమీకరణం కనుక్కోండి.
16. $y = x^2$ అనే పరావలయము మరియు $y = 2x$ అనే సరళరేఖల మధ్య పరిబద్ధమయ్యే ప్రదేశ వైశాల్యము కనుగొనుము.
17. $(xy^2 + x)dx + (yx^2 + y)\, dy = 0$ ను సాధించండి.

సెక్షన్-సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. **$5 \times 7 = 35$**

18. $(-2, 3)$, $(4, 5)$ బిందువులు గుండా పోతూ, వృత్తకేంద్రము x− అక్షముపై ఉండే వృత్తసమీకరణము కనుగొనుము.

19. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 28 = 0$ మరియు $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ వృత్తాలకు తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖాయుగ్మ సమీకరణము కనుగొనుము.

20. $y^2 + 4x + 4y - 3 = 0$ అనే పరావలయంనకు శీర్షం, నాభుల నిరూపకాలు, నియతరేఖ, అక్షరేఖల సమీకరణాలు కనుగొనుము.

21. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ ను గణించండి.

22. $\int \tan^n x\,dx$ ను గణించి దాని నుండి $\int \tan^5 x\,dx$, $\int \tan^6 x\,dx$ లను కనుగొనుము.

23. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}$ ను గణించండి.

24. $\frac{dy}{dx} + y\tan x = \sin x$ ను సాధించండి.

BABY BULLET-Q

IPE TS MARCH-2025
SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 41 = 0$ వృత్తము కేంద్రము మరియు వ్యాసార్థము కొనుగొనుము.

A: ఇచ్చిన వృత్తము $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 41 = 0$

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ తో పోల్చగా,

$2g = -4;\ 2f = -8;\ c = -41 \Rightarrow g = -2, f = -4, c = -41$

కేంద్రం $C = (-g, -f) = (-(-2), -(-4)) = (2, 4)$

వ్యాసార్థం $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{2^2 + (4)^2 - (-41)} = \sqrt{4 + 16 + 41} = \sqrt{61}$

---

2. $2x^2 + 2y^2 - 5x - 4y - 3 = 0$ వృత్తం దృష్ట్యా P(4, 2) బిందువు స్థితిని తెలపండి.

Sol: దత్త బిందువు $P(x_1, y_1) = (4, 2)$ మరియు వృత్తం $S \equiv 2x^2 + 2y^2 - 5x - 4y - 3 = 0$

ఇప్పుడు $S_{11} = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 2\times4^2 + 2\times2^2 - 5(4) - 4(2) - 3$

$= 32 + 8 - 20 - 8 - 3 = 9 > 0$

$\therefore$ P(4, 2) వృత్తం బయట ఉండును.

---

3. $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ అనే వృత్తాల ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ సమీకరణము కనుగొనుము.

Sol: ఇచ్చిన వృత్తాల సమీకరణాలు $S \equiv x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$, $S' \equiv x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$

ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ సమీకరణము $S - S' = 0$

$\Rightarrow (x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1) - (x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2) = 0$

$\Rightarrow 2x - 4x + 3y - 3y + 1 - 2 = 0$

$\Rightarrow -2x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x + 1 = 0$ or $x = -1/2$

---

4. నాభి దూరము 5/2 గా కలిగిన $y^2 = 2x$ పరావలయంపై బిందు నిరూపకాలు కనుగొనుము.

Sol: ఇచ్చిన పరావలయం $y^2 = 2x \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = 2/4 = 1/2$

మరియు నాభి దూరం SP = 5/2

సూత్రం:నాభి దూరం $SP = x_1 + a$

$$\Rightarrow x_1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

కాని, $y_1^2 = 2x_1 \Rightarrow y_1^2 = 2(2) = 4 \Rightarrow y_1 = \pm2$ $\qquad \therefore P(x_1, y_1) = (2, \pm2)$

BABY BULLET-Q

5. **$16y^2 - 9x^2 = 144$ అనే అతిపరావలయం యొక్క కేంద్రం, ఉత్కేంద్రత, నాభులు, నియత రేఖ సమీకరణం, నాభిలంబం పొడవులను కనుగొనుము.**

Sol: ఇచ్చిన అతిపరావలయం $16y^2 - 9x^2 = 144$

$$\Rightarrow \frac{16y^2}{144} - \frac{9x^2}{144} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$$

ఇక్కడ $a^2=16, b^2=9$

i) కేంద్రం $C = (0,0)$

ii) $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{16+9}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$

iii) నాభులు $= (0, \pm be) = (0, \pm 3(5/3)) = (0, \pm 5)$

iv) నియతరేఖల సమీకరణం $y = \pm\frac{b}{e} \Rightarrow y = \pm\frac{3}{\frac{5}{3}} \Rightarrow y = \pm\frac{9}{5}$

v) నాభిలంబం పొడవు $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2(16)}{3} = \frac{32}{3}$

---

6. **$\int \sqrt[3]{2x^2}\, dx$ on $x \in (0, \infty)$ ను గణించండి.**

Sol: $$I = \int \sqrt[3]{2x^2}\, dx = \sqrt[3]{2}\int x^{2/3} dx = \sqrt[3]{2}\, \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = \sqrt[3]{2}\, \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \sqrt[3]{2}.\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c$$

---

7. **$\int 2x e^{x^2} dx$ ను కనుగొనండి.**

Sol: $x^2 = t \Rightarrow 2x\, dx = dt$

$$\therefore I = \int 2x e^{x^2} dx = \int e^t dt \quad = \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2} + c$$

8. $\int_0^4 |2-x|\,dx$ ను గణించండి.

Sol: మాప ప్రమేయ నిర్వచనం నుండి

$2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$ అయినప్పుడు $|2-x| = 2-x$;

మరియు $2-x < 0 \Rightarrow x > 2$ అయినప్పుడు

$|2-x| = (-2-x) = x-2$

$$\therefore \int_0^4 |2-x|\,dx = \int_0^2 |2-x|\,dx + \int_2^4 |2-x|\,dx$$

$$= \int_0^2 (2-x)dx + \int_2^4 (x-2)dx$$

$$= \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^4$$

$$= \left(4 - \frac{4}{2}\right) + [(8-8)-(2-4)]$$

$$= 2+0+2 = 4$$

---

9. $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x\,dx$ ను కనుగొనండి.

Sol: n సరి సంఖ్య అయినప్పుడు,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{(n-1)(n-3)....}{n(n-2)....}\frac{2}{3}.1$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \sin^7 x\,dx = \frac{(6)(4)(2)}{(7)(5)(3)}(1) = \frac{16}{35}$$

---

10. మూల బిందువు కేంద్రంగా గల వృత్తాలు కుటుంబపు అవకలన సమీకరణం మరియు దాని పరిమాణం కనుక్కోండి

Sol: మూలబిందువు కేంద్రంగా గల వృత్తాల కుటుంబపు సమీకరణం $x^2 + y^2 = r^2$, r పరామితి

x పరంగా అవకలనం చేయగా,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

అవకలజ సమీకరణం యొక్క పరిమాణం 1.

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-బి

11. (3, 2) బిందువు వద్ద $x^2 + y^2 - x - 3y - 4 = 0$ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖ సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

Sol: $S = x^2 + y^2 - x - 3y - 4 = 0$ వృత్తం మీద (3,2) వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరణం $S_1=0$

$\Rightarrow 3x + 2y - \frac{1}{2}(x+3) - \frac{3}{2}(y+2) - 4 = 0 \Rightarrow 6x + 4y - x - 3 - 3y - 6 - 8 = 0 \Rightarrow 5x+y-17=0$

పై స్పర్శరేఖ వాలు $-5 \Rightarrow$ దాని అభిలంబరేఖ వాలు 1/5

$\therefore$ (3,2) వద్ద వాలు $\frac{1}{5}$ గా గల అభిలంబరేఖ సమీకరణం $y-2 = \frac{1}{5}(x-3) \Rightarrow 5y-10 = x-3 \Rightarrow x-5y+7=0$

---

12. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$ అనే వృత్తాలను లంబంగా ఖండిస్తూ మూలబిందువు గుండా పోవు వృత్త సమీకరణమును కనుగొనుము.

Sol: కావలసిన వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ అనుకొనుము.

$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$; $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$

$g_1 = -2, f_1 = -3, c_1 = -3$ $\quad g_2 = 0, f_2 = -4, c_2 = 12$

g, f, c లు కావలసిన వృత్తం యొక్క స్థిరపదాలు అనుకొనుము.

కావలసిన సమీకరణం ఆదిబిందువు గుండా పోవును $\quad \therefore c = 0$

రెండు వృత్తాలకు కావలసిన వృత్తం లంబంగా ఉండును.

$\therefore 2g(-2) + 2f(-3) = -3 + 0$ .... (i)

$2g(0) + 2f(-4) = 12 + 0$........ (ii)

(i) & (ii) లను సాధించగా $2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$

లంబచ్ఛేదన నియమం $f = -\frac{3}{2}, g = \frac{6}{2}$

కావలసిన వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 + 6x - 3y = 0$

---

13. దీర్ఘవృత్తం యొక్క దీర్ఘాక్షం పొడవు, హ్రస్వాక్షం పొడవుకు మూడు రెట్లు ఉంటే ఉత్కేంద్రత కనుక్కోండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి దీర్ఘాక్షం పొడవు = 3 (హ్రస్వాక్షం పొడవు) $\Rightarrow 2a = 3(2b) \Rightarrow a = 3b \Rightarrow a^2 = 9b^2$

ఇప్పుడు, $b^2 = a^2(1-e^2) \Rightarrow \cancel{b^2} = 9\cancel{b^2}(1-e^2)$

$\Rightarrow 1=9(1-e^2) \Rightarrow 1-e^2=\frac{1}{9} \Rightarrow e^2 = 1-\frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

---

14. $x^2 + 3y^2 = 3$ దీర్ఘవృత్తానికి $4x + y + k = 0$ స్పర్శరేఖ అయితే k విలువ కనుక్కోండి.

Sol: దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం $x^2 + 3y^2 = 3 \Rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1$.....(1) $\Rightarrow a^2 = 3, b^2 = 1$

ఇచ్చిన సరళరేఖ $4x + y + k = 0 \Rightarrow y = -4x - k$ ....(2)

పై సరళరేఖను $y = mx+c$ తో పోల్చగా $m = -4$ మరియు $c = -k$

ఇప్పుడు $c^2 = a^2m^2 + b^2$ అను స్పర్శరేఖా నియమంను అనువర్తించగా,

$k^2 = 3(-4)^2 + 1^2 = 3(16) + 1 = 48 + 1 = 49 \Rightarrow k = \pm 7$

BABY BULLET-Q

15. ఉత్కేంద్రత 2, నాభులు (4, 2), (8, 2) గా గల అతిపరావలయ సమీకరణం కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చిన నాభులు S (4,2) మరియు S' (8,2).

కేంద్రం C అనునది నాభి యొక్క మధ్య బిందువు

$$\therefore C = \left(\frac{4+8}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (6,2) = (h, k)$$

C(6, 2) మరియు S(4, 2) ల మధ్య దూరం $ae = \sqrt{(6-4)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

ఇచ్చిన ఉత్కేంద్రత $e = 2 \quad \therefore ae = 2 \quad \Rightarrow a(2) = 2 \Rightarrow a = 1$

ఇప్పుడు, $b^2 = a^2(e^2-1) = 1(4-1) = 3$

$\therefore$అతిపరావలయ సమీకరణం $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{(x-6)^2}{1} - \dfrac{(y-2)^2}{3} = 1$

$$\Rightarrow 3(x-6)^2 - (y-2)^2 = 3 \Rightarrow 3(x^2 - 12x + 36) - (y^2 - 4y + 4) = 3$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 36x + 108 - y^2 + 4y - 4 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 - y^2 - 36x + 4y + 101 = 0$$

---

16. $y = x^2$ అనే పరావలయము మరియు $y = 2x$ అనే సరళరేఖల మధ్య పరిబద్ధమయ్యే ప్రదేశ వైశాల్యము కనుగొనుము.

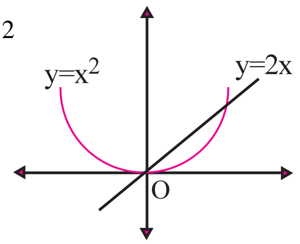
Sol: దత్త వక్రములు $y = x^2$.....(1); $y = 2x$ ....(2)

(1),(2) లను సాధించగా, $x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$

ఎగువవు వక్రము y=2x మరియు దిగువన ఉన్న వక్రము $y=x^2$

$\therefore$రెండు వక్రముల మధ్య వైశాల్యము

$$A = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left[2.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \text{ sq.units}$$



---

17. $(xy^2 + x)\,dx + (yx^2 + y)\,dy = 0$ ను సాధించండి.

Sol: ఇచ్చిన సమీకరణము 'విభజనీయ చలరాశుల' అవకలన సమీకరణము.

$$\therefore (xy^2 + x)dx + (yx^2 + y)dy = 0 \Rightarrow (xy^2 + x)dx = -(yx^2 + y)dy$$

$$\Rightarrow x(y^2 + 1)dx = -y(x^2 + 1)dy \Rightarrow \frac{x}{x^2+1}dx = -\frac{y}{y^2+1}dy$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x}{x^2+1}dx = -\int \frac{2y}{y^2+1}dy \Rightarrow \log(x^2+1) = -\log(y^2+1) + \log c$$

$$\Rightarrow \log(x^2+1) + \log(y^2+1) = \log c \Rightarrow \log(x^2+1)(y^2+1) = \log c \Rightarrow (x^2+1)(y^2+1) = c$$

$\therefore$ సాధన $(x^2+1)(y^2+1) = c$

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-సి

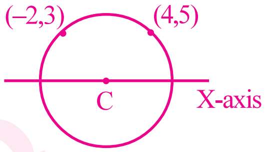
18. (–2, 3) , (4, 5) బిందువులు గుండా పోతూ, వృత్తకేంద్రము x-అక్షముపై ఉండే వృత్త సమీకరణము కనుగొనుము.

Sol: A = (–2, 3), B = (4, 5) అనుకోండి. $S(x_1,y_1)$ వృత్త కేంద్రం అనుకొనుము.

$\Rightarrow SA = SB \Rightarrow SA^2 = SB^2 \Rightarrow (x_1+2)^2 + (y_1-3)^2 = (x_1-4)^2 + (y_1-5)^2$

$\Rightarrow (\cancel{x_1^2} + 4x_1 + 4) + (\cancel{y_1^2} - 6y_1 + 9) = (\cancel{x_1^2} - 8x_1 + 16) + (\cancel{y_1^2} - 10y_1 + 25)$

$\Rightarrow 12x_1 + 4y_1 - 28 = 0 \Rightarrow 4(3x_1 + y_1 - 7) = 0 \Rightarrow 3x_1 + y_1 - 7 = 0$ ....(1)



కాని (x_1,y_1) కేంద్రం y=0 (X-అక్షం)పై ఉండును. $\therefore y_1 = 0$

ఇప్పుడు, (1) $\Rightarrow 3x_1 + 0 - 7 = 0 \Rightarrow 3x_1 = 7 \Rightarrow x_1 = 7/3$

$\therefore$వృత్త కేంద్రం $S(x_1,y_1) = (7/3, 0)$ మరియు A=(–2,3) వ్యాసార్థం $r = SA \Rightarrow r^2 = SA^2$.

$$\therefore r^2 = \left(\frac{7}{3}+2\right)^2 + (3-0)^2 = \left(\frac{13}{3}\right)^2 + 9 = \frac{169}{9} + 9 = \frac{169+81}{9} = \frac{250}{9}$$

$\therefore$ కేంద్రం (7/3,0) మరియు $r^2 = 250/9$ గా గల వృత్త సమీకరణం

$$\left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + (y-0)^2 = \frac{250}{9} \Rightarrow \frac{(3x-7)^2}{9} + y^2 = \frac{250}{9} \Rightarrow \frac{(3x-7)^2 + 9y^2}{\cancel{9}} = \frac{250}{\cancel{9}}$$

$\Rightarrow (3x-7)^2 + 9y^2 = 250 \Rightarrow (9x^2 - 42x + 49) + 9y^2 = 250 \Rightarrow 9x^2 + 9y^2 - 42x - 201 = 0$

$\Rightarrow 3(3x^2 + 3y^2 - 14x - 67) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 14x - 67 = 0$

---

19. $x^2+y^2-4x-10y+28=0$ మరియు $x^2+y^2+4x-6y+4=0$ వృత్తాలకు తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖాయుగ్మ సమీకరణము కనుగొనుము.

Sol: $x^2+y^2-4x-10y+28=0$, వృత్తానికి కేంద్రం $C_1=(2,5)$, వ్యాసార్థం $r_1 = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2 - 28} = \sqrt{1} = 1$

$x^2+y^2+4x-6y+4=0$, వృత్తానికి కేంద్రం $C_2=(-2,3)$, వ్యాసార్థం $r_2 = \sqrt{2^2 + (-3)^2 - 4} = \sqrt{9} = 3$

సరూప అంతరకేంద్రము I అనేది C_1C_2 ను $r_1 : r_2 = 1:3$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించును.

$$\therefore I = \left(\frac{1(-2)+3(2)}{1+3}, \frac{1(3)+3(5)}{1+3}\right) = \left(\frac{4}{4}, \frac{18}{4}\right) = \left(1, \frac{9}{2}\right)$$

తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖాయుగ్మ సమీకరణము $S_1^2 = S_{11}(S)$

$$\Rightarrow \left[x + \frac{9}{2}y - 2(x+1) - 5\left(y + \frac{9}{2}\right) + 28\right]^2 = \left(1 + \frac{81}{4} - 4 - 45 + 28\right)(x^2 + y^2 - 4x - 10y + 28)$$

$$\Rightarrow \left(-x - \frac{y}{2} + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 - 4x - 10y + 28) \Rightarrow \frac{(-2x - y + 7)^2}{\cancel{4}} = \frac{1}{\cancel{4}}(x^2 + y^2 - 4x - 10y + 28)$$

$\Rightarrow (2x + y - 7)^2 = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 28$

$\Rightarrow 4x^2 + y^2 + 49 + 4xy - 28x - 14y = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 28 \Rightarrow 3x^2 + 4xy - 24x - 4y + 21 = 0$

BABY BULLET-Q

20. $y^2+4x+4y-3=0$ **అనే పరావలయంనకు శీర్షం, నాభుల నిరూపకాలు, నియతరేఖ, అక్షరేఖల సమీకరణాలు కనుగొనుము.**

Sol: ఇచ్చిన పరావలయము $y^2+4x+4y-3=0 \Rightarrow y^2+4y=-4x+3$. ఇరువైపులా 4 ను కలుపగా

$$\Rightarrow y^2+4y+4=-4x+7 \Rightarrow (y+2)^2=-4\left(x-\frac{7}{4}\right)$$

ఇది $(y-k)^2=-4a(x-h)$ రూపంలో ఉన్న క్షితిజ సమాంతర ఎడమవైపు పరావలయం

$4a=4 \Rightarrow a=1,\ h=7/4,\ k=-2$

(i) శీర్షము $=(h, k)=\left(\frac{7}{4},-2\right)$

(ii) నాభి $=(h-a, k)=\left(\frac{7}{4}-1,-2\right)=\left(\frac{3}{4},-2\right)$

(iii) నియతరేఖ సమీకరణంis $x=h+a \Rightarrow x=\frac{7}{4}+1=\frac{7+4}{4}=\frac{11}{4} \Rightarrow 4x=11 \Rightarrow 4x-11=0$

(iv) అక్ష సమీకరణం $y=k \Rightarrow y=-2 \Rightarrow y+2=0$

---

21. $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$ **ను గణించండి.**

Sol: $\tan\frac{x}{2}=t$ అనుకుంటే $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ మరియు $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ అగును.

$$\therefore I=\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx=\int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\left(\frac{2dt}{1+t^2}\right)=\int\frac{1}{\frac{(1+t^2)+2t+(1-t^2)}{\cancel{1+t^2}}}\cdot\frac{2dt}{\cancel{1+t^2}}$$

$$=\int\frac{2dt}{2+2t}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\int\frac{dt}{1+t}=\log|1+t|+c=\log\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$$

BABY BULLET-Q

22 $\int \tan^n x dx$ ను గణించి దాని నుండి $\int \tan^5 x dx$, $\int \tan^6 x dx$ లను కనుగొనుము.

Sol: $I_n = \int \tan^n x\,dx = \int (\tan^{n-2} x)\tan^2 x\,dx$

$$= \int (\tan^{n-2} x)(\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x\,dx - \int \tan^{n-2} x\,dx$$

$$= \frac{\tan^{n-1}}{n-1} - I_{n-2} \;.....(1) \quad \left[\because f(x) = \tan x, f'(x) = \sec^2 x\right]$$

$n = 5, 3, 1$ విలువలను వరుసగా (1)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$I_5 = \int \tan^5 x\,dx = \frac{\tan^4 x}{4} - I_3$$

$$= \frac{\tan^4 x}{4} - \left(\frac{\tan^2 x}{2} - I_1\right)$$

$$= \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + \int \tan x\,dx$$

$$= \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + \log|\sec x| + c$$

$n = 6, 4, 2, 0$ విలువలను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$I_6 = \int \tan^6 x\,dx = \frac{\tan^5 x}{5} - I_4$$

$$= \frac{\tan^5 x}{5} - \left[\frac{\tan^3 x}{3} - I_2\right]$$

$$= \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - I_0$$

$$= \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + c$$

$[\because I_0 = x]$

BABY BULLET-Q

23. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ ను గణించండి.

Sol: $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ అని మనకు తెలుసు

$\therefore I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx \quad = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)}dx$

$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$= \int_0^{\pi} \frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx - \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$= \int_0^{\pi} \frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx - I$

$\Rightarrow I + I = \int_0^{\pi} \frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$\Rightarrow 2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$\cos x = t \Rightarrow \sin x dx = -dt$

మరియు $x = 0 \Rightarrow t = \cos 0 = 1$

$x = \pi \Rightarrow t = \cos\pi = -1$

$\therefore I = \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}[Tan^{-1}t]_{-1}^{1}$

$= \frac{\pi}{2}[Tan^{-1}(1) - Tan^{-1}(-1)]$

$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$

---

24. $\frac{dy}{dx} + y\tan x = \sin x$ ను సాధించండి.

Sol: దత్త సమీకరణము $\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x)$.అనే రూపంలో కలదు. ఇది y లో రేఖీయ అవకలజ సమీకరణము.

ఇక్కడ $P = \tan x \Rightarrow \int P dx = \int \tan x dx = \log\sec x \qquad \therefore I.F = e^{\int P dx} = e^{\log\sec x} = \sec x$

కావున సాధన $y.(I.F) = \int (I.F)Q dx \quad \Rightarrow \quad y.\sec x = \int \sec x.\sin x dx = \int \tan x dx = \log\sec x + c$

BABY BULLET-Q