Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH -2025 (AP)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2025(AP)

Time : 3 Hours

MATHS-2B

Max.Marks : 75

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: 10 × 2 = 20

1. (2, 5), బిందువు నుండి $x^2 + y^2 - 5x + 4y + k = 0$ కు గల స్పర్శరేఖ పొడవు $\sqrt{37}$ అయితే k ను కనుక్కోండి.
2. (1, 2), (4, 6) లు వ్యాసాగ్రాలుగా కలిగిన వృత్త సమీకరణము కనుగొనుము.
3. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0, x^2 + y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$ అనే వృత్తాల ఉమ్మడిజ్యా సమీకరణమును కనుగొనుము.
4. $2y = 5x + k$ రేఖ $y^2 = 6x$ పరావలయాన్ని స్పృశిస్తే k విలువ కనుగొనుము.
5. ఒక అతిపరావలయపు ఉత్కేంద్రత 5/4 అయిన, దాని సంయుగ్మ అతిపరావలయం ఉత్కేంద్రత కనుగొనుము.
6. $\int \frac{1}{7x+3}dx$ ను గణించండి.
7. $\int \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$ ను గణించండి.
8. $\int_0^4 |2-x|\, dx$ ను గణించండి.
9. $\int_0^{\pi/2} \sin^{10}x\, dx$ ను గణించండి.
10. $\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{5/3}$ యొక్క పరిమాణము మరియు తరగతి కనుగొనుము.

సెక్షన్-బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. 5 × 4 = 20

11. $x^2+y^2-8x-2y-8=0$ వృత్తము $x+y+1=0$ సరళరేఖపై చేయు అంతరఖండం యొక్క జ్యా పొడవు కనుగొనుము.
12. $x^2+y^2-4x-6y+5=0,\ x^2+y^2-2x-4y-1=0, x^2+y^2-6x-2y=0$ అనే వృత్తాల మూలకేంద్రం కనుక్కోండి.
13. $9x^2+16y^2=144$ అనే దీర్ఘవృత్తం యొక్క ఉత్కేంద్రత, నాభిలంబం పొడవులు, కేంద్రం, నాభులు, నియత రేఖ సమీకరణాలు కనుగొనుము.
14. దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ నాభిలంబం ఒక కొన వద్ద అభిలంబ రేఖ హ్రస్వాక్షం ఒక కొన ద్వారా పోతే $e^4+e^2=1$ అని చూపండి.
15. $x + 2y = 0$ కు (i) సమాంతరంగా (ii) లంబంగా ఉంటూ అతిపరావలయం $x^2-4y^2=4$ ను స్పృశించే రేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.
16. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ ను గణించండి.
17. $\frac{dy}{dx} - x\tan(y-x)=1$ ను సాధించండి.

సెక్షన్-సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. **$5 \times 7 = 35$**

18. $x^2+y^2-6x-2y+1=0$ మరియు $x^2+y^2+2x-8y+13=0$ వృత్తాలు ఒకదానికొకటి స్పృశించుకొంటాయని చూపి ఆ స్పర్శబిందువు, ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ కనుగొనుము.

19. $(2, 0), (0, 1), (4, 5), (0, c)$ బిందువులు చక్రీయాలైన c విలువలు కనుగొనుము.

20. $y^2 = 4ax$ పరావలయంలో అంతర్లిఖించిన త్రిభుజం శీర్షాలు $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ అయితే $\frac{1}{8a}|(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)|$ చ.యూనిట్లు అని చూపండి.

21. $I_n = \int \sin^n x\, dx$ అనే లఘూకరణ సూత్రమును రాబట్టి దాని నుండి $\int \sin^4 x\, dx$ ను గణించుము.

22. $\int \frac{2\sin x + 3\cos x + 4}{3\sin x + 4\cos x + 5} dx$ ను గణించండి.

23. $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$ ను గణించండి.

24. $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}dx + xydy = 0$ ను సాధించండి.

IPE AP MARCH-2025
SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1 (2, 5) బిందువు నుండి $x^2 + y^2 - 5x + 4y + k = 0$ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ పొడవు $\sqrt{37}$ అయిన k విలువ కనుగొనుము.

Sol: (2, 5) బిందువు నుండి $S = x^2 + y^2 - 5x + 4y + k = 0$ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ పొడవు $\sqrt{S_{11}} = \sqrt{37}$;

ఇరువైపులా వర్గము చేయగా $S_{11} = 37$

$\Rightarrow (2)^2 + 5^2 - 5(2) + 4(5) + k = 37$

$\Rightarrow 4 + 25 - 10 + 20 + k = 37$

$\Rightarrow 39 + k = 37 \Rightarrow k = -2$

---

2. (1, 2), (4, 6) లు వ్యాసాగ్రాలుగా కలిగిన వృత్త సమీకరణము కనుగొనుము.

Sol: దత్త బిందువులు $A(x_1, y_1) = (1, 2)$ మరియు $B(x_2, y_2) = (4, 6)$

A(1, 2) , B(4, 6)లు వ్యాసాగ్రాలుగా కలిగిన వృత్త సమీకరణము

$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(x - 4) + (y - 2)(y - 6) = 0$

$\Rightarrow (x^2 - x - 4x + 4) + (y^2 - 6y - 2y + 12) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 5x - 8y + 16 = 0$

---

3. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$ అనే వృత్తాల ఉమ్మడిజ్యా సమీకరణమును కనుగొనుము.

A: ఇచ్చిన వృత్తాలు, $S = x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$, $S' = x^2 + y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$

ఉమ్మడి జ్యా సమీకరం, $S - S' = 0$

$\Rightarrow -4x + 5x - 4y + 6y + 3 - 4 = 0$

$\Rightarrow x + 2y - 1 = 0$

---

4. $2y = 5x + k$ రేఖ $y^2 = 6x$ పరావలయాన్ని స్పృశిస్తే k విలువ కనుగొనుము.

Sol: ఇచ్చిన పరావలయము $y^2 = 6x$

$$\Rightarrow 4a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

ఇచ్చిన రేఖ $2y = 5x + k \Rightarrow y = \frac{5}{2}x + \frac{k}{2}$

$y = mx + c$ తో పోల్చగా $m = \frac{5}{2}, c = \frac{k}{2}$

స్పర్శరేఖా నియమం $c = a/m$

$$\Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{\frac{3}{\cancel{2}}}{\frac{5}{\cancel{2}}} \Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{3}{5} \Rightarrow k = 2\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{6}{5}$$

---

5. ఒక అతిపరావలయపు ఉత్కేంద్రత 5/4 అయిన, దాని సంయుగ్మ అతిపరావలయం ఉత్కేంద్రత కనుగొనుము.

Sol: $e = \frac{5}{4}$ మరియు సంయుగ్మ అతిపరావలయపు ఉత్కేంద్రత e_1 అప్పుడు

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e_1^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{(5/4)^2} + \frac{1}{e_1^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e_1^2} = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow e_1^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow e_1 = \frac{5}{3}$$

---

6. $\int \frac{1}{7x+3}\,dx$ ను గణించండి.

Sol: $7x + 3 = t \Rightarrow 7dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{7}dx$

$$\therefore I = \int \frac{1}{7x+3}dx = \int \frac{1}{t}\left(\frac{1}{7}dt\right) = \frac{1}{7}\int \frac{1}{t}dt$$

$$= \frac{1}{7}\log|t| + c = \frac{1}{7}\log|7x+3| + c$$

---

7. $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$ ను గణించండి.

Sol: $I = \int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx = \int \sqrt{(\sin^2 x + \cos^2 x) - 2\sin x \cos x}\,dx = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\,dx$

$= \pm\int (\sin x - \cos x)\,dx = \pm(-\cos x - \sin x) + c.$ ($\pm$ As per the domain restriction.)

8. $\int_0^4 |2-x|\,dx$ **ను గణించండి.**

Sol: మాపా ప్రమేయ నిర్వచనం నుండి

$2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$ అయినప్పుడు $|2-x| = 2-x$;

మరియు $2-x < 0 \Rightarrow x > 2$ అయినప్పుడు

$|2-x| = (-2-x) = x-2$

$$\therefore \int_0^4 |2-x|\,dx = \int_0^2 |2-x|dx + \int_2^4 |2-x|dx$$

$$= \int_0^2 (2-x)dx + \int_2^4 (x-2)dx$$

$$= \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^4$$

$$= \left(4 - \frac{4}{2}\right) + [(8-8)-(2-4)]$$

$$= 2+0+2 = 4$$

---

9. $\int_0^{\pi/2} \sin^{10}x\,dx$ **ను గణించండి.**

Sol: n సరిసంఖ్య అయినప్పుడు

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{10}x\,dx = \frac{(9)(7)(5)(3)(1)}{(10)(8)(6)(4)(2)}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{63\pi}{512}$$

---

10. $\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{5/3}$ **అనే అవకలన సమీకరణపు పరిమాణము, తరగతి కనుగొనుము.**

Sol: దత్త సమీకరణము $\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{5}{3}}$

ఇరువైపులా ఘనము చేయగా t $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^5$. ఇది భిన్న ఘాతాల నుండి విముక్తి చెందింది.

ఇచ్చట గరిష్ట తరగతి గల అవకలని $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3$

$\therefore$ దత్త సమీకరణమునకు పరిమాణము $=2$ తరగతి $=$ ఘాతం $=3$

సెక్షన్-బి

11. $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$ వృత్తము $x + y + 1 = 0$ సరళరేఖపై చేయు అంతరఖండం యొక్క జ్యా పొడవు కనుగొనుము.

Sol: ఇచ్చిన వృతం $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$,

కేంద్రము $C = (4, 1)$,

వ్యాసార్ధము $r = \sqrt{16+1+8} = \sqrt{25} = 5$

కేంద్రము $(4, 1)$ నుండి $x + y + 1 = 0$ రేఖకు లంబదూరము p అయితే

$$p = \frac{|4+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{3\times 2}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$\therefore$ జ్యా పొడవు $= 2\sqrt{r^2 - p^2}$

$= 2\sqrt{5^2 - (3\sqrt{2})^2}$

$= 2\sqrt{25 - 9(2)} = 2\sqrt{25-18} = 2\sqrt{7}$

---

12. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$ యొక్క మూల కేంద్రంను కనుగొనుము.

Sol: ఇచ్చిన వృత్తాలు

$S = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$,

$S' = x^2 + y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$,

$S'' = x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$

S, S' వృత్తాల మూలాక్షం $S - S' = 0$

$\Rightarrow (-4x + 2x) + (-6y + 4y) + (5 + 1) = 0$

$\Rightarrow -2x - 2y + 6 = 0$

$\Rightarrow -2(x + y - 3) = 0$

$\Rightarrow x + y - 3 = 0$ ..... (1)

S, S'' వృత్తాల మూలాక్షం $S - S'' = 0$

$\Rightarrow (-4x + 6x) + (-6y + 2y) + 5 = 0$

$\Rightarrow 2x - 4y + 5 = 0$ .... (2)

$(1) \times 2 \Rightarrow 2x + 2y - 6 = 0$ ....(3)

$(3) - (2) \Rightarrow 6y - 11 = 0 \Rightarrow y = 11/6$

(1) నుండి, $x = 3 - y = 3 - \frac{11}{6} = \frac{18-11}{6} = \frac{7}{6}$

$\therefore$ మూలకేంద్రం $(7/6, 11/6)$

13. $9x^2+16y^2=144$ అనే దీర్ఘవృత్తం యొక్క ఉత్కేంద్రత, నాభులు, నాభిలంబం పొడవులు, నియత రేఖ సమీకరణాలు కనుగొనుము.

Sol: ఇచ్చిన దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $9x^2+16y^2=144 \Rightarrow \frac{\cancel{9}x^2}{\cancel{144}}+\frac{\cancel{16}y^2}{\cancel{144}}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

ఇక్కడ, $a^2=16, b^2=9 \Rightarrow a>b$. కావున ఇది క్షితిజ సమాంతర దీర్ఘవృత్తం.

(i) ఉత్కేంద్రత $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{16-9}{16}}=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

(ii) నాభులు $=(\pm ae,0)=(\pm 4\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right),0)=(\pm\sqrt{7},0)$

(iii) నాభిలంబం పొడవు $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(9)}{4}=\frac{9}{2}$

(iv) నియతరేఖ సమీకరణం $x=\pm\frac{a}{e}=\pm 4\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\right)=\frac{\pm 16}{\sqrt{7}} \Rightarrow \sqrt{7}x=\pm 16 \Rightarrow \sqrt{7}x\pm 16=0$

---

14. దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ నాభిలంబం ఒక కొన వద్ద అభిలంబ రేఖ హ్రస్వాక్షం ఒక కొన ద్వారా పోతే $e^4+e^2=1$ అని చూపండి.

Sol: (x_1, y_1) బిందువు వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణం $\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=a^2-b^2$

నాభిలంబం ఒక కొన $L=(ae, b^2/a)$

కనుక L వద్ద, అభిలంబరేఖ సమీకరణం $\frac{a^2x}{ae}-\frac{b^2y}{b^2/a}=a^2-b^2 \Rightarrow \frac{ax}{e}-ay=a^2-b^2$.....(1)

కాని దీర్ఘవృత్తం (1) హ్రస్వాక్షం ఒక కొన $B'(0,-b)$ గుండా పోతుంది.

$$\Rightarrow \frac{a(0)}{e}-a(-b)=a^2-b^2 \Rightarrow ab=a^2-a^2(1-e^2)$$

$$\Rightarrow ab=a^2e^2 \Rightarrow e^2=\frac{b}{a}$$

$$\therefore e^4=\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2(1-e^2)}{a^2}=1-e^2 \Rightarrow e^4+e^2=1$$

15. **$x + 2y = 0$ కు (i) సమాంతరంగా (ii) లంబంగా ఉంటూ అతిపరావలయం $x^2 - 4y^2 = 4$ ను స్పృశించే రేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.**

Sol: ఇచ్చిన అతిపరావలయం $x^2 - 4y^2 = 4$

$\Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow a^2 = 4, b^2 = 1$

$x + 2y = 0$ అనే రేఖ వాలు $-1/2$

$\Rightarrow$ దీని లంబరేఖ వాలు 2

సూత్రం:

m వాలు కలిగిన స్పర్శరేఖ $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

i) $m = \frac{-1}{2}$ కలిగిన సమాంతర స్పర్శరేఖ $\frac{-1}{2}$

$$y = -\frac{1}{2}x \pm \sqrt{4\left(\frac{1}{4}\right) - 1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-x}{2} \Rightarrow x + 2y = 0$$

ii) $m = 2$ లంబ స్పర్శరేఖ $y = 2x \pm \sqrt{4(2^2) - 1}$

$$\Rightarrow y = 2x \pm \sqrt{15}$$

---

16. **$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$ ను గణించండి.**

Sol: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ అని మనకు తెలుసు $\therefore I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$ ....(1)

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} - x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} - x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} - x\right)}} dx$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx \quad \text{............(2)}$$

(1) & (2) నుండి, $I + I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx + \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$

$$\Rightarrow 2I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cancel{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}}{\cancel{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} 1 dx = [x]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2I = \frac{\pi}{6} \Rightarrow I = \frac{\pi}{12}$$

17. $\frac{dy}{dx} - x\tan(y - x) = 1$ ను సాధించండి.

Sol: $y - x = t$ అనుకుంటే $\frac{dy}{dx} - 1 = \frac{dt}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} + 1$

కావున, $\left(\frac{dt}{dx} + 1\right) - x\tan t = 1 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = x\tan t \Rightarrow \frac{1}{\tan t}dt = xdx$

$\Rightarrow \int \cot t\,dt = \int xdx \Rightarrow \log(\sin t) = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow 2\log\sin t = x^2 + c \Rightarrow 2\log\sin(y - x) = x^2 + c$

సెక్షన్-సి

18. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$ వృత్తాలు ఒకదానికొకటి స్పృశించుకొంటాయని చూపి ఆ స్పర్శబిందువు మరియు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ కనుగొనుము.

Sol: మొదటి వృత్తమునకు $S \equiv x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$;

కేంద్రం $C_1 = (3, 1)$, వ్యాసార్ధం $\mathbf{r_1} = \sqrt{9+1-1} = 3$

రెండవ వృత్తమునకు $S' \equiv x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$

కేంద్రం $C_2 = (-1, 4)$, వ్యాసార్ధం $r_2 = \sqrt{1+16-13} = 2$

$C_1C_2 = \sqrt{(3+1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

మరియు, $r_1 + r_2 = 3+2 = 5 = C_1C_2$.

$\therefore$రెండు వృత్తాలు ఒకదానికొకటి బాహ్యంగా స్పృశించుకొనును. ఇప్పుడు $r_1 : r_2 = 3 : 2$

కావున, స్పర్శబిందువు P $C_1(3, 1), C_2(-1, 4)$ లను $3 : 2$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించును.

$\therefore\ P = = \left(\frac{3(-1)+(2)(3)}{3+2}, \frac{(3)(4)+(2)(1)}{3+2}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{14}{5}\right)$

ఈ స్పర్శబిందువు వద్ద $S = 0$ మరియు $S' = 0$ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ సమీకరణం $S - S' = 0$

$\Rightarrow (\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 6x - 2y + 1) - (\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2x - 8y + 13) = 0$

$\Rightarrow (-6x - 2x) - 2y + 8y + 1 - 13 = 0$

$\Rightarrow -8x + 6y - 12 = 0 \Rightarrow -2(4x - 3y + 6) = 0$

$\Rightarrow 4x - 3y + 6 = 0$

19. (2, 0), (0, 1), (4, 5), (0, c) బిందువులు చక్రీయాలైన c విలువలు కనుగొనుము.

Sol: A = (2, 0), B = (0, 1), C = (4, 5), D = (0, c) అనుకోండి.

$S(x_1, y_1)$ వృత్త కేంద్రం $\Rightarrow SA = SB = SC$

ఇప్పుడు, $SA = SB \Rightarrow SA^2 = SB^2 \Rightarrow (x_1-2)^2+(y_1-0)^2 = (x_1-0)^2+(y_1-1)^2$

$\Rightarrow (\cancel{x_1^2} - 4x_1 + 4) + (\cancel{y_1^2}) = (\cancel{x_1^2}) + (\cancel{y_1^2} - 2y_1 + 1)$

$\Rightarrow 4x_1 - 2y_1 + 1 - 4 = 0 \Rightarrow 4x_1 - 2y_1 - 3 = 0.........(1)$

మరియు $SB = SC \Rightarrow SB^2 = SC^2 \Rightarrow (x_1-0)^2+(y_1-1)^2 = (x_1-4)^2+(y_1-5)^2$

$\Rightarrow (\cancel{x_1^2}) + (\cancel{y_1^2} - 2y_1 + 1) = (\cancel{x_1^2} - 8x_1 + 16) + (\cancel{y_1^2} - 10y_1 + 25)$

$\Rightarrow 8x_1 - 2y_1 + 10y_1 + 1 - 16 - 25 = 0 \Rightarrow 8x_1 + 8y_1 - 40 = 0$

$\Rightarrow 8(x_1 + y_1 - 5) = 0 \Rightarrow x_1 + y_1 - 5 = 0......(2)$

(1) & (2) లను సాధిస్తే వృత్త కేంద్రం $S(x_1,y_1)$ వస్తుంది.

$2 \times (2) \Rightarrow 2x_1 + 2y_1 - 10 = 0...........(3)$

$(1) + (3) \Rightarrow 6x_1 - 13 = 0 \Rightarrow 6x_1 = 13 \Rightarrow x_1 = 13/6$

$(2) \Rightarrow y_1 = 5 - x_1 = 5 - \frac{13}{6} = \frac{30-13}{6} = \frac{17}{6} \Rightarrow y_1 = \frac{17}{6}$

$\therefore$ వృత్త కేంద్రం, $S(x_1, y_1) = \left(\frac{13}{6}, \frac{17}{6}\right)$

మరియు A = (2, 0) కావున

వ్యాసార్ధం, $r = SA \Rightarrow r^2 = SA^2$

$\therefore r^2 = SA^2 = \left(2 - \frac{13}{6}\right)^2 + \left(0 - \frac{17}{6}\right)^2 = \left(\frac{12-13}{6}\right)^2 + \left(\frac{17}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{36}\right) + \left(\frac{289}{36}\right) = \frac{290}{36}$

$\therefore$ కేంద్రం $\left(\frac{13}{6}, \frac{17}{6}\right)$ మరియు $r^2 = \frac{290}{36}$ గా గల వృత్త సమీకరణం $\left(x - \frac{13}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{17}{6}\right)^2 = \frac{290}{36}$

కాని, బిందువు D(0,c) వృత్తం పై ఉండును

$\Rightarrow \left(0 - \frac{13}{6}\right)^2 + \left(c - \frac{17}{6}\right)^2 = \frac{290}{36} \Rightarrow \left(c - \frac{17}{6}\right)^2 = \frac{290}{36} - \frac{169}{36} = \frac{121}{36}$

$\Rightarrow \left(\frac{6c-17}{6}\right)^2 = \frac{121}{36} \Rightarrow \frac{(6c-17)^2}{\cancel{36}} = \frac{11^2}{\cancel{36}} \Rightarrow 6c - 17 = \pm 11$

$\Rightarrow 6c = \pm 11 + 17 \Rightarrow 6c = 28 \Rightarrow c = \frac{\cancel{28}}{\cancel{6}} = \frac{14}{3}$ (or) $\cancel{6}c = \cancel{6} \Rightarrow c = 1$

$\therefore$ c = 14/3 (లేదా) 1

20. $y^2 = 4ax$ **పరావలయంలో అంతర్లిఖించిన త్రిభుజం శీర్షాలు** $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ **అయితే ఆ త్రిభుజ వైశాల్యం** $\frac{1}{8a}|(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)|$ **చ.యూనిట్లు అని చూపండి.**

Sol: త్రిభుజ శీర్షాలు $P(x_1,y_1) = (at_1^2, 2at_1), Q(x_2,y_2) = (at_2^2, 2at_2), R(x_3,y_3) = (at_3^2, 2at_3)$

ΔPQR యొక్క వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & y_1 - y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} at_1^2 - at_2^2 & at_1^2 - at_3^2 \\ 2at_1 - 2at_2 & 2at_1 - 2at_3 \end{vmatrix} = \frac{a.2a}{2}\begin{vmatrix} t_1^2 - t_2^2 & t_1^2 - t_3^2 \\ t_1 - t_2 & t_1 - t_3 \end{vmatrix}$

$$= a^2\begin{vmatrix} (t_1 - t_2)(t_1 + t_2) & (t_1 - t_3)(t_1 + t_3) \\ t_1 - t_2 & t_1 - t_3 \end{vmatrix} = a^2(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)\begin{vmatrix} t_1 + t_2 & t_1 + t_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a^2(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)|(\cancel{t_1} + t_2 - \cancel{t_1} - t_3)| \quad = a^2 |(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)|$$

$$= a^2\left|\left(\frac{y_1}{2a} - \frac{y_2}{2a}\right)\left(\frac{y_2}{2a} - \frac{y_3}{2a}\right)\left(\frac{y_3}{2a} - \frac{y_1}{2a}\right)\right| \qquad \left(\because 2at_1 = y_1 \Rightarrow t_1 = \frac{y_1}{2a}, ...\right)$$

$$= \frac{a^2}{2a.2a.2a}|(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)| = \frac{1}{8a}|(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)|$$ చ.యూ

21. $I_n = \int \sin^n x\, dx$ నకు లఘూకరణ సూత్రమును రాబట్టి దానినుండి $\int \sin^4 x\, dx$ ను గణించుము.

Sol: $I_n = \int \sin^n x\, dx = \int \sin^{n-1} x(\sin x)dx.$

మొదటి ప్రమేయము $u = \sin^{n-1} x$ మరియు

రెండవ ప్రమేయము $v = \sin x \Rightarrow \int v = -\cos x$

విభాగ సమాకలన సూత్రము ప్రకారము

$$I_n = \sin^{n-1} x(-\cos x) - \int (n-1)\sin^{n-2} x \cos x(-\cos x)dx$$

$$= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x dx$$

$$= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx$$

$$= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)[\int \sin^{n-2} x dx - \int \sin^n x dx]$$

$$= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)[I_{n-2} - I_n]$$

$$\Rightarrow I_n = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2} - nI_n + I_n$$

$$\Rightarrow nI_n = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2} + \cancel{I_n} - \cancel{I_n}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{-\sin^{n-1} x\cos x}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)I_{n-2} \quad ....(1)$$

$n = 4, 2, 0$ విలువలను వరుసగా (1)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$I_4 = -\frac{\sin^3 x\cos x}{4} + \frac{3}{4}I_2$$

$$= -\frac{\sin^3 x\cos x}{4} + \frac{3}{4}\left[-\frac{\sin x\cos x}{2} + \frac{1}{2}I_0\right]$$

$$= \frac{-\sin^3 x\cos x}{4} - \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{3}{8}I_0$$

$$= -\frac{\sin^3 x\cos x}{4} - \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{3}{8}x + c$$

22. $\int \frac{2\sin x + 3\cos x + 4}{3\sin x + 4\cos x + 5} dx$ ను గణించండి.

Sol: $(2\sin x + 3\cos x + 4) = A(3\sin x + 4\cos x + 5) + B\frac{d}{dx}(3\sin x + 4\cos x + 5) + C$ .....(i)

$\therefore (2\sin x + 3\cos x + 4) = A(3\sin x + 4\cos x + 5) + B(3\cos x - 4\sin x) + C$
$\Rightarrow (2\sin x + 3\cos x + 4) = \sin x(3A - 4B) + \cos x(4A + 3B) + (5A + C)$

sinx యొక్క గుణకాలను పోల్చగా, $3A - 4B = 2$ ......(1)

cosx యొక్క గుణకాలను పోల్చగా, $4A + 3B = 3$.......(2)

స్థిరపదాలను పోల్చగా, $5A + C = 4$ ....(3)

$(1) \times 4 \Rightarrow 12A - 16B = 8$ .....(4)

$(2) \times 3 \Rightarrow 12A + 9B = 9$ ....(5)

$(5) - (4) \Rightarrow 25B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{25}$

(1) నుండి, $3A = 2 + 4B = 2 + 4\left(\frac{1}{25}\right) = \frac{50+4}{25} = \frac{54}{25} \Rightarrow A = \frac{18}{25}$

(3) నుండి, $C = 4 - 5A = 4 - \cancel{5}\left(\frac{18}{\cancel{25}}\right) = 4 - \frac{18}{5} = \frac{20-18}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow C = \frac{2}{5}$

$\therefore A = \frac{18}{25}, B = \frac{1}{25}, C = \frac{2}{5}$ విలువలను (i)లో ప్రతిక్షేపించగా

$(2\sin x + 3\cos x + 4) = \left(\frac{18}{25}\right)(3\sin x + 4\cos x + 5) + \left(\frac{1}{25}\right)\frac{d}{dx}(3\sin x + 4\cos x + 5) + \left(\frac{2}{5}\right)$

$\therefore I = \int \frac{2\sin x + 3\cos x + 4}{3\sin x + 4\cos x + 5} dx = \frac{18}{25}\int 1dx + \frac{1}{25}\int \frac{\frac{d}{dx}(3\sin x + 4\cos x + 5)}{3\sin x + 4\cos x + 5} + \frac{2}{5}\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$

$= \frac{18}{25}.x + \frac{1}{25}\log|3\sin x + 4\cos x + 5| + \frac{2}{5}\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$ ......(ii)

ఇప్పుడు, $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$ ను కనుగొనవలెను.

ఇప్పుడు, $\tan\frac{x}{2} = t$ అనుకుంటే $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ మరియు $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ అగును

$\therefore \int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5} = \int \frac{1}{3\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) + 4\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + 5}\left(\frac{2dt}{1+t^2}\right) = \int \frac{1}{\frac{6t + 4(1-t^2) + 5(1+t^2)}{\cancel{1+t^2}}}\left(\frac{2dt}{\cancel{1+t^2}}\right)$

$= 2\int \frac{dt}{6t + 4 - 4t^2 + 5 + 5t^2} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2\int \frac{dt}{(t+3)^2} = -\frac{2}{t+3} = -\frac{2}{\tan\frac{x}{2} + 3}$

(ii) నుండి, $I = \frac{18}{25}.x + \frac{1}{25}\log|3\sin x + 4\cos x + 5| - \frac{4}{5\left(\tan\frac{x}{2} + 3\right)} + c$

23 $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$ ను గణించండి.

Sol: $x=\tan\theta \Rightarrow dx=\sec^2\theta d\theta$ మరియు $x=0\Rightarrow\theta=0; x=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$

ఇప్పుడు $1+x^2=1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

$$\therefore \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\log(1+\tan\theta)}{\cancel{\sec^2\theta}}\cancel{\sec^2}\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/4}\log(1+\tan\theta)d\theta$$

$$\therefore I=\int_0^{\pi/4}\log[1+\tan\theta]d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/4}\log\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/4}\log\left[1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}\right]d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/4}\log\left[1+\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right]d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/4}\log\left[\frac{(1+\tan\theta)+(1-\tan\theta)}{1+\tan\theta}\right]d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/4}\log\left(\frac{2}{1+\tan\theta}\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/4}[\log 2-\log(1+\tan\theta)]\,d\theta$$

$$=\log 2\int_0^{\pi/4}1\,d\theta-\int_0^{\pi/4}\log(1+\tan\theta)d\theta=\log 2\int_0^{\pi/4}1\,d\theta-I$$

$$=\log 2[\theta]_0^{\pi/4}-I$$

$$\Rightarrow I+I=(\log 2)\left(\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow 2I=\left(\frac{\pi}{4}\right)(\log 2)$$

$$\Rightarrow I=\left(\frac{\pi}{8}\right)(\log 2)$$

24. $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}dx + xydy = 0$ **ను సాధించండి.**

Sol: దత్త అవకలన సమీకరణము $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}dx + xydy = 0$ ....(1)

$$\Rightarrow xydy = -\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}dx$$

$$\Rightarrow \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{-\sqrt{1+x^2}}{x}dx \Rightarrow \int\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}xdx \text{.....................(2)}$$

$$\sqrt{1+y^2} = t \Rightarrow 1+y^2 = t^2 \Rightarrow 2ydy = 2tdt \Rightarrow ydy = tdt$$

$\sqrt{1+x^2} = s \Rightarrow 1+x^2 = s^2 \Rightarrow 2xdx = 2sds \Rightarrow xdx = sds$. Also $1+x^2=s^2 \Rightarrow x^2=s^2-1$

(2) నుండి, $\int\frac{\cancel{t}dt}{\cancel{t}} = -\int\frac{s(sds)}{s^2-1} \Rightarrow \int dt = -\int\frac{(s^2-1+1)}{s^2-1}ds \Rightarrow t = -\int\left[1+\frac{1}{s^2-1}\right]ds$

$$\Rightarrow t = -s - \frac{1}{2}\log\left(\frac{s-1}{s+1}\right) + c \Rightarrow t + s + \frac{1}{2}\log\left(\frac{s-1}{s+1}\right) = c$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right) = c$$