



MARCH -2025(TS)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2025 (TS)

Time : 3 Hours

గణితశాస్త్రం- 2A

Max.Marks : 75

సెక్షన్-ఎ

- I ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: 10 × 2 = 20
- $(a + ib)^2 = x + iy$ అయిన $(x^2 + y^2)$ విలువను కనుగొనుము
 - $\text{Arg } \bar{z}_1, \text{Arg } z_2$ లు $\pi/5, \pi/3$ అయిన $\text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$ ను కనుగొనుము.
 - A, B, C లు త్రిభుజం యొక్క కోణాలు మరియు $x = \text{cis}A, y = \text{cis}B, Z = \text{cis}C$ అయితే xyz విలువను కనుగొనుము.
 - x యొక్క ఏ విలువలకు $x^2 - 5x - 14$ ధనాత్మకమగును?
 - $4x^3 - 6x^2 + 7x + 3 = 0$ మూలాలు α, β, γ అయితే $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ మూలాలు కనుక్కోండి.
 - $(n+1)P_5 : nP_5 = 3 : 2$ అయిన n కనుగొనుము.
 - INTERMEDIATE పదంలోని అక్షరాలను అమర్చడం ద్వారా వచ్చే ప్రస్తారాల సంఖ్య కనుగొనుము.
 - $(3-4x)^{3/4}$ పదానికి ద్వీపద విస్తరణలు చెల్లుబాటయ్యేటట్లు x విలువ కంటే సమితి E ని కనుక్కోండి.
 - 6, 7, 10, 12, 13, 4, 12, 16 అనే దత్తాంశానికి మధ్యగతం నుంచి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.
 - యాదృచ్ఛికంగా ఎంపిక చేసిన ఒక వ్యక్తికి ఎడమచేతి వాటం (రాందానికి సంబంధించి) ఉండే సంభావ్యత 0.1. పది (10) మంది వ్యక్తుల సముదాయంలో ఒకరికి ఎడమచేతి వాటం ఉండే సంభావ్యత ఎంత?

సెక్షన్-బి

- II క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. 5 × 4 = 20
- ఆర్గాండ్ తలంలో $2 + i, 4 + 3i, 2 + 5i, 3i$ అనే సంకీర్ణ సంఖ్యలు సూచించే బిందువులు ఒక చతురస్రమును ఏర్పరుచునని చూపుము.
 - $\frac{x+2}{2x^2+3x+6}$ సమాసం వ్యాప్తిని నిర్ణయించండి.
 - 'PRISON' పదంలోని అక్షరాలతో ఏర్పడే 6 అక్షరాల పదాలన్నింటినీ నిఘంటువులోని క్రమంలో అమరిస్తే (పునరావృతం లేకుండా) ఆ క్రమంలో "PRISON" పదం యొక్క కోటిని కనుక్కోండి.
 - ఆరుగురు భారతీయులు, 5గురు అమెరికా దేశస్థుల నుంచి 5 గురు సభ్యులున్న కమిటీని, ఆ కమిటీలో భారతీయుల సంఖ్య పెద్దదిగా ఉండేలా ఎన్ని రకాలుగా ఎంచుకోవచ్చు?
 - $\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ ను పాక్షికభిన్నాలుగా విడగొట్టండి.
 - ఒక గుర్రపుపందెంలో A, B, C అనే మూడు గుర్రాలు పోటీపడుతున్నాయి. వీటిలో A గెలిచే సంభావ్యత B గెలుపు సంభావ్యతకు రెట్టింపు, B గెలిచే సంభావ్యత C గెలుపు సంభావ్యతకు రెట్టింపు అయితే A, B, C ల గెలుపు సంభావ్యతలెంత?
 - 75% సందర్భాల్లో A నిజం మాట్లాడతాడు, B, 80% సందర్భాల్లో నిజం మాట్లాడతాడు. ఒక సంఘటన గురించి వారు చెప్పే విషయం పరస్పరం విభేదించడానికి సంభావ్యత ఎంత?

సెక్షన్-సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి.

5 × 7 = 35

18. n ధనపూర్ణాంకం అయితే, $(1+i)^{2n} + (1-i)^{2n} = 2^{n+1} \cos(n\pi/2)$ అని చూపండి.

19. -3 తో మార్పు చెందిన $x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 4x + 6 = 0$ సమీకరణం మూలాల విలువలు మూలాలుగా గల బహుపది సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

20. $(1+x)^n$ ద్వీపద విస్తరణలో 4 వరస పదాల గుణకాలు వరుసగా a_1, a_2, a_3, a_4 అయితే $\frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_3}{a_3+a_4} = \frac{2a_2}{a_2+a_3}$ అని చూపండి.

21. $x = \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \frac{1.3.5.7}{3.6.9.12} + \dots$, అయితే $9x^2 + 24x = 11$ అని చూపండి.

22. క్రింది విభజనానికి మధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

| | | | | | | |
|-------|---|---|----|---|----|----|
| x_i | 2 | 5 | 7 | 8 | 10 | 35 |
| f_i | 6 | 8 | 10 | 6 | 8 | 2 |

23. I, II, III అంకెలను కలిగిన మూడు పెట్టెలలో కింది విధంగా బంతులు ఉన్నాయి.

ఒక పెట్టెను యాదృచ్ఛికంగా ఎంపిక చేసి, దాని నుంచి ఒక బంతిని తీశారు.

అది ఎర్రనిది అయితే, అది పెట్టె II నుంచి తీయగల సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

| | తెల్లనివి | నల్లనివి | ఎర్రనివి |
|-----|-----------|----------|----------|
| I | 1 | 2 | 3 |
| II | 2 | 1 | 1 |
| III | 4 | 5 | 3 |

24.

| | | | | | | | |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X = x_i$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $P(X = x_i)$ | 1/9 | 1/9 | 1/9 | 1/3 | 1/9 | 1/9 | 1/9 |

అనేది ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి X యొక్క సంభావ్యత. X విస్తృతలను కనుక్కోండి.

ipe ts march-2025 solutions

సెక్షన్-ఎ

1. $(a + ib)^2 = x + iy$ అయిన $(x^2 + y^2)$ ను కనుగొనుము.

Sol: $(a + ib)^2 = x + iy \Rightarrow (a + ib)(a + ib) = x + iy \Rightarrow |a + ib| |a + ib| = |x + iy|$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా, $(a^2 + b^2)^2 = x^2 + y^2$

2. $\text{Arg } \bar{z}_1, \text{Arg } z_2$ లు $\pi/5, \pi/3$ అయిన $\text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$ ను కనుగొనుము.

Sol: దత్తాంశం నుండి $\text{Arg } \bar{z}_1 = \frac{\pi}{5} \Rightarrow \text{Arg } z_1 = -\frac{\pi}{5}$

$$\text{మరియు } \text{Arg } z_2 = \frac{\pi}{3} \quad \therefore \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) = -\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} = \frac{5\pi - 3\pi}{15} = \frac{2\pi}{15}$$

3. A, B, C లు త్రిభుజం యొక్క కోణాలు మరియు $x = \text{cis}A, y = \text{cis}B, z = \text{cis}C$ అయిన xyz విలువ కనుగొనుము

Sol: ΔABC లో $A + B + C = 180^\circ$.

$$\therefore xyz = \text{cis}A \cdot \text{cis}B \cdot \text{cis}C = \text{cis}(A + B + C) = \text{cis}180^\circ$$

$$= \cos 180^\circ + i \sin 180^\circ = -1 + i(0) = -1$$

4. x యొక్క ఏ విలువలకు $x^2 - 5x - 14$ ధనాత్మకమగును?

Sol: $x^2 - 5x - 14$ ను $ax^2 + bx + c$ తో పోల్చగా $a = 1, b = -5, c = -14$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(-14) = 25 + 56 = 81 > 0$$

ఇక్కడ, Δ ధనాత్మకం. \therefore మూలాలు వాస్తవం

$$x^2 - 5x - 14 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 2x - 14 = 0 \Rightarrow x(x-7) + 2(x-7) = 0 \Rightarrow (x+2)(x-7) = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ or } 7$$

అదే విధంగా, $a = 1 > 0$.

$\therefore x < \alpha$ లేదా $x > \beta$ అయిన 1, $x^2 - 5x - 14$ లకు సమాన గుర్తులుండును

$\Rightarrow x < -2$ లేదా $x > 7$ నకు $x^2 - 5x - 14$ ధనాత్మకం

5. $x^3 - 6x^2 + 7x + 3 = 0$ మూలాలు α, β, γ అయితే $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ మూలాలు కనుక్కోండి.

Sol: $4x^3 - 6x^2 + 7x + 3 = 0$ ను $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ తో పోల్చగా

$$a_0 = 4, a_1 = -6, a_2 = 7, a_3 = 3$$

$$\therefore \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = S_2 = a_2/a_0 = 7/4$$

6. $(n+1)P_5 : {}^n P_5 = 3 : 2$ అయిన n ను కనుగొనుము

Sol: దత్తాంశం నుండి $(n+1)P_5 : {}^n P_5 = 3 : 2$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)P_5}{{}^n P_5} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)\cancel{n(n-1)(n-2)(n-3)}}{n(n-1)\cancel{(n-2)(n-3)}(n-4)} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 3(n-4) = 2(n+1)$$

$$\Rightarrow 3n - 12 = 2n + 2 \Rightarrow n = 14$$

7. "INTERMEDIATE" పదంలోని అక్షరాలను అమర్చడం ద్వారా వచ్చే ప్రస్తారాల సంఖ్య కనుగొనుము.

Sol: ఇచ్చిన పదం INTERMEDIATE లోని అక్షరాలు 12.

వీటిలో 3 'E' లు, 2 'I' లు, 2 'T' లు ఒకేరకం.

$$\therefore \text{కావలసిన ప్రస్తారాల సంఖ్య} = \frac{n!}{p!q!r!} = \frac{12!}{3!2!2!}$$

8. $(3 - 4x)^{3/4}$ పదానికి ద్వీపద విస్తరణలు చెల్లుబాటుయ్యేటట్లు n విలువ కంటే సమితి E ని కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చిన సమీకరణం $(3 - 4x)^{3/4} = 3^{3/4} \left(1 - \frac{4x}{3}\right)^{3/4}$. ద్వీపద విస్తరణ వ్యవస్థితం కావాలంటే $\left|\frac{4x}{3}\right| < 1$,

$$\Rightarrow |x| < \frac{3}{4} \Rightarrow x \in \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) \therefore E = \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

9. 6, 7, 10, 12, 13, 4, 12, 16 అనే దత్తాంశానికి మధ్యగతం నుంచి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చిన దత్తాంశం: 6, 7, 10, 12, 13, 4, 12, 16. దాని ఆరోహణ క్రమం: 4, 6, 7, 10, 12, 12, 13, 6

పరిశీలనల సంఖ్య $n = 8$ సరి

$$\therefore \text{దత్తాంశం మధ్యగతం} \Rightarrow M = \frac{10+12}{2} = 11$$

మధ్యగతం నుండి పరిశీలనల విచలనాలు:

$$11 - 4 = 7; 11 - 6 = 5; 11 - 7 = 4; 11 - 10 = 1;$$

$$11 - 12 = -1; 11 - 12 = -1; 11 - 13 = -2; 11 - 6 = 5$$

కావున విచలనాల పరమ మూల్యాలు: 7, 5, 4, 1, 1, 1, 2, 5

$$\therefore \text{మధ్యగతం నుంచి MD} = \frac{\sum |x_i - M|}{8}$$

$$= \frac{7+5+4+1+1+1+2+5}{8} = \frac{26}{8} = 3.25$$

10. యాదృచ్ఛికంగా ఎంపిక చేసిన ఒక వ్యక్తికి ఎడమచేతి వాటం (రాయడానికి సంబంధించి) ఉండే సంభావ్యత 0.1. పది (10) మంది వ్యక్తుల సముదాయంలో ఒకరికి ఎడమచేతి వాటం ఉండే సంభావ్యత ఎంత?

Sol: ఎడమ చేతి వాటం గల వ్యక్తిని ఎన్నుకొనే సంభావ్యత $p = 0.1 = 1/10$

$$\Rightarrow q = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \text{ . మరియు } n = 10 \quad \therefore n = 10, q = \frac{9}{10} \text{ మరియు } p = \frac{1}{10}$$

$P(X = r) = {}^n C_r q^{n-r} \cdot p^r$ అని మనకు తెలుసు

$$\Rightarrow P(X = 1) = {}^{10} C_1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{10-1} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^1 = 10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)^9$$

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-బి

11. అక్షాంశ తలంలో $2 + i$, $4 + 3i$, $2 + 5i$, $3i$ అనే సంకీర్ణ సంఖ్యలు సూచించే బిందువులు ఒక చతురస్రమును ఏర్పర్చునని చూపుము.

Sol: ఇచ్చిన సంకీర్ణ సంఖ్యలను సూచించు బిందువులు

$$A(2, 1), B(4, 3), C(2, 5), D(0, 3)$$

$$AB = \sqrt{(2-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{8};$$

$$BC = \sqrt{(4-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{8}$$

$$CD = \sqrt{(2-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{8};$$

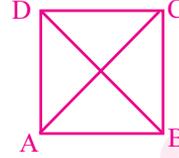
$$DA = \sqrt{(2-0)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{8}$$

$$AC = \sqrt{(2-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{16} = 4; \quad BD = \sqrt{(4-0)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{16} = 4$$

కావున, AB, BC, CD, DA అనే నాలుగు భుజాలు సమానం.

AC, BD అనే రెండు కర్ణాలు సమానం.

\therefore A, B, C, D లు ఒక చతురస్రమును ఏర్పర్చును.



12. $\frac{x+2}{2x^2+3x+6}$ యొక్క వ్యాప్తిని కనుగొనుము

Sol: $y = \frac{x+2}{2x^2+3x+6} \Rightarrow y(2x^2+3x+6) = x+2$

$$\Rightarrow 2x^2y + 3xy + 6y - x - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2y + x(3y-1) + 6y-2 = 0$$

$$\Rightarrow (2y)x^2 + (3y-1)x + (6y-2) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

(1) x లో వర్గసమీకరణం మరియు దాని మూలాలు వాస్తవం.

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$$

$$\Rightarrow (3y-1)^2 - 4(2y)(6y-2) \geq 0 \Rightarrow (9y^2 - 6y + 1) - 48y^2 + 16y \geq 0$$

$$\Rightarrow -39y^2 + 10y + 1 \geq 0 \Rightarrow 39y^2 - 10y - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow 39y^2 - 13y + 3y - 1 \leq 0 \Rightarrow 13y(3y-1) + 1(3y-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow (13y+1)(3y-1) \leq 0 \Rightarrow y \in \left[-\frac{1}{13}, \frac{1}{3}\right]$$

$$\therefore \text{వ్యాప్తి} = \left[-\frac{1}{13}, \frac{1}{3}\right]$$

13. 'PRISON' పదంలోని అక్షరాలతో ఏర్పడే 6 అక్షరాల పదాలన్నింటినీ నిఘంటువులోని క్రమంలో అమరిస్తే (పునరావృతం లేకుండా) ఆ క్రమంలో "PRISON" పదం యొక్క కోటిని కనుక్కోండి.

Sol: PRISON అనే పదములోని అక్షరాల నిఘంటువు యొక్క క్రమం

I, N, O, P, R, S

I తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య ----- = 5! = 120

N తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య ----- = 5! = 120

O తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య ----- = 5! = 120

P I తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య ----- = 4! = 24

P N తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య ----- = 4! = 24

P O తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య ----- = 4! = 24

PRIN తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య -- = 2! = 2

PRIO తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య -- = 2! = 2

PRISN తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య - = 1! = 1

తర్వాత పదం PRISON = 1! = 1

∴ PRISON అనే పదం యొక్క కోటి = 3(120) + 3(24) + 2(2) + 1 + 1 = 360 + 72 + 4 + 1 + 1 = 438.

14. ఆరుగురు భారతీయులు, 5గురు అమెరికా దేశస్థుల నుంచి 5 గురు సభ్యులున్న కమిటీని, ఆ కమిటీలో భారతీయుల సంఖ్య పెద్దదిగా ఉండేలా ఎన్ని రకాలుగా ఎంచుకోవచ్చు?

Sol: ఆరుగురు భారతీయులు, 5 గురు అమెరికా దేశస్థుల నుంచి 5 గురు సభ్యులున్న కమిటీని, ఆ కమిటీలో భారతీయుల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉండేలా ఎంచుకునే విధానాలు:

| భారతీయులు (6) | అమెరికన్లు(5) | ఎంచుకునే విధానాలు |
|---------------|---------------|---|
| 5 | 0 | ${}^6C_5 \times {}^5C_0 = 6 \times 1 = 6$ |
| 4 | 1 | ${}^6C_4 \times {}^5C_1 = 15 \times 5 = 75$ |
| 3 | 2 | ${}^6C_3 \times {}^5C_2 = 20 \times 10 = 200$ |

$$\therefore {}^6C_4 = {}^6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

$${}^6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

$${}^5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

∴ మొత్తం విధానాల సంఖ్య = 6 + 75 + 200 = 281

15. $\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.

Sol : $\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 1 + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$ ఇక్కడ, అవం తరగతి = హారం తరగతి

$$= \frac{(x-a)(x-b)(x-c) + A(x-b)(x-c) + B(x-a)(x-c) + C(x-a)(x-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$\Rightarrow (x-a)(x-b)(x-c) + A(x-b)(x-c) + B(x-a)(x-c) + C(x-a)(x-b) = x^3 \dots (1)$$

$$x = a \text{ ను } (1) \text{ లో ప్రతిక్షేపించగా } 0 + A(a-b)(a-c) + 0 + 0 = a^3 \Rightarrow A = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)}$$

$$\text{అదే విధంగా } x = b, x = c \text{ అను ప్రతిక్షేపించగా } B = \frac{b^3}{(b-a)(b-c)}, C = \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

$$\therefore \frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 1 + \frac{a^3}{(a-b)(a-c)(x-a)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)(x-b)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)(x-c)}$$

16. ఒక గుర్రపుపందెంలో A, B, C అనే మూడు గుర్రాలు పోటీపడుతున్నాయి. వీటిలో A గెలిచే సంభావ్యత B గెలుపు సంభావ్యతకు రెట్టింపు, B గెలిచే సంభావ్యత C గెలుపు సంభావ్యతకు రెట్టింపు అయితే A, B, C ల గెలుపు సంభావ్యతలెంత?

Sol: A, B, C అనే గుర్రాలు పందెమును గెలిచే సంభావ్యతలు వరుసగా A, B, C అనుకొనుము.

$$\text{దత్తాంశమునుండి } P(A) = 2P(B) \text{ మరియు } P(B) = 2P(C)$$

$$\text{ఇప్పుడు, } P(A) = 2P(B) = 2[2P(C)] = 4P(C)$$

$$\text{కావున, } P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \quad [\because A, B, C \text{ లు వియుక్త సమితులు}]$$

$$\Rightarrow P(S) = 4P(C) + 2P(C) + P(C) \quad [\because A, B, C \text{ లు మాత్రమే పందెంలో కలవు} \Rightarrow A \cup B \cup C = S]$$

$$\Rightarrow 1 = 7P(C) \Rightarrow P(C) = 1/7 \quad [\because P(S)=1]$$

$$\therefore P(A) = 4P(C) = 4 \times \frac{1}{7} = \frac{4}{7}; P(B) = 2P(C) = 2 \times \frac{1}{7} = \frac{2}{7} \quad \therefore P(A) = 4/7, P(B) = 2/7, P(C) = 1/7$$

17. 75% సందర్భాల్లో A అనే వ్యక్తి నిజం మాట్లాడతాడు, B అనే వ్యక్తి 80% సందర్భాల్లో నిజం మాట్లాడతాడు. ఒక సంఘటన గురించి వారు చెప్పే విషయం పరస్పరం విభేదించడానికి సంభావ్యత ఎంత?

Sol: A, B లు నిజం చెప్పే ఘటనలు వరుసగా A, B లు అనుకుందాం.

$$P(A) = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}; P(B) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5} \therefore P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}; P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$A, B \text{ లు పరస్పరము విభేదించే ఘటన } E \text{ అనుకొనుము.} \Rightarrow P(E) = P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$= P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) \quad [\because A, B \text{ లు స్వతంత్ర ఘటనలు}]$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{20}$$

సెక్షన్-సి

18. n ధన పూర్ణాంకం అయితే $(1+i)^{2n} + (1-i)^{2n} = 2^{n+1} \cos(n\pi/2)$ అని చూపండి.

Sol: మొదట $1+i$ మాప-ఆయామ రూపంను కనుగొందాం.

$$x + iy = 1 + i \Rightarrow x = 1, y = 1 \text{ అనుకొనుము}$$

$$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$\therefore 1+i$ యొక్క మాప-ఆయామ రూపం

$$r(\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow (1+i)^{2n} = \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^{2n}$$

$$= (\sqrt{2})^{2n} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{2n}$$

$$= 2^n \left(\cos(2n) \frac{\pi}{4} + i \sin(2n) \frac{\pi}{4} \right)$$

(డీమోయర్ సిద్ధాంతం నుండి)

$$= 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2} \right) \dots (1)$$

అదే విధంగా,

$$(1-i)^{2n} = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{2} - i \sin \frac{n\pi}{2} \right) \dots (2)$$

(1) & (2) లను కలుపగా $(1+i)^{2n} + (1-i)^{2n}$

$$= 2^n \left(\left(\cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2} \right) + \left(\cos \frac{n\pi}{2} - i \sin \frac{n\pi}{2} \right) \right)$$

$$= 2^n \left(2 \cos \frac{n\pi}{2} \right) = 2^{n+1} \cdot \cos \frac{n\pi}{2}$$

19. -3 తో మార్పు చెందిన $x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 4x + 6 = 0$ సమీకరణం మూలాల విలువలు మూలాలుగా గల బహుపది సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: కావలసిన సమీకరణం $f(x+3) = 0$

దీనిని హార్నర్ పద్ధతినుపయోగించి క్రింది విధంగా చేయవచ్చు.

| | | | | | | | |
|---|---|----|----|----|-----|-----|-------------------|
| 3 | 1 | -4 | 0 | 3 | -4 | 6 | |
| | 0 | 3 | -3 | -9 | -18 | -66 | |
| | 1 | -1 | -3 | -6 | -22 | -60 | $\rightarrow a_5$ |
| | 0 | 3 | 6 | 9 | 9 | | |
| | 1 | 2 | 3 | 3 | | | $\rightarrow a_4$ |
| | 0 | 3 | 15 | 54 | | | |
| | 1 | 5 | 18 | | | | $\rightarrow a_3$ |
| | 0 | 3 | 24 | | | | |
| | 1 | 8 | | | | | $\rightarrow a_2$ |
| | 0 | 3 | | | | | |
| | 1 | | | | | | $\rightarrow a_1$ |
| | 0 | | | | | | |
| | 1 | | | | | | $\rightarrow a_0$ |

\therefore కావలసిన సమీకరణం $a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$

$$\Rightarrow x^5 + 11x^4 + 42x^3 + 57x^2 - 13x - 60 = 0$$

20. $(1+x)^n$ ద్వీపద విస్తరణలో 4 వరుస పదాల గుణకాలు వరుసగా a_1, a_2, a_3, a_4 అయితే

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_3}{a_3 + a_4} = \frac{2a_2}{a_2 + a_3} \text{ అని చూపండి.}$$

Sol : $(1+x)^n$ విస్తరణలో 4 వరుస పదాల గుణకాలు:

$$a_1 = {}^nC_r, \quad a_2 = {}^nC_{r+1}, \quad a_3 = {}^nC_{r+2}, \quad a_4 = {}^nC_{r+3}.$$

$$\text{L.H.S} = \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_3}{a_3 + a_4} = \frac{{}^nC_r}{{}^nC_r + {}^nC_{r+1}} + \frac{{}^nC_{r+2}}{{}^nC_{r+2} + {}^nC_{r+3}}$$

$$= \frac{{}^nC_r}{(n+1)C_{r+1}} + \frac{{}^nC_{r+2}}{(n+1)C_{r+3}} \quad \left(\because {}^nC_r + {}^nC_{r+1} = (n+1)C_{r+1} \right)$$

$$= \frac{{}^nC_r}{\left(\frac{n+1}{r+1}\right)C_r} + \frac{{}^nC_{r+2}}{\left(\frac{n+1}{r+3}\right)C_{r+2}} \quad \left(\because {}^nC_r = \binom{n}{r} C_{r-1} \right)$$

$$= \frac{r+1}{n+1} + \frac{r+3}{n+1} = \frac{r+1+r+3}{n+1} = \frac{2r+4}{n+1} = \frac{2(r+2)}{n+1} \dots\dots(1)$$

$$\text{R.H.S} = \frac{2a_2}{a_2 + a_3} = \frac{2({}^nC_{r+1})}{{}^nC_{r+1} + {}^nC_{r+2}} = \frac{2({}^nC_{r+1})}{(n+1)C_{r+2}} = \frac{2\cancel{{}^nC_{r+1}}}{\left(\frac{n+1}{r+2}\right)\cancel{{}^nC_{r+1}}} = \frac{2}{\frac{n+1}{r+2}} = \frac{2(r+2)}{n+1} \dots(2)$$

(1) & (2) ల నుండి L.H.S = R.H.S

21. $x = \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \frac{1.3.5.7}{3.6.9.12} + \dots$, అయిన $9x^2 + 24x = 11$ అని నిరూపించండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $x = \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \frac{1.3.5.7}{3.6.9.12} + \dots = \frac{1.3}{2!} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1.3.5}{3!} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1.3.5.7}{4!} \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots$

ఇరువైపులా $1 + \frac{1}{3}$ ను కలుపగా $1 + \frac{1}{3} + x = 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1.3}{2!} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1.3.5}{3!} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots$

పై శ్రేణిని $1 + \frac{p}{1!} \left(\frac{y}{q}\right) + \frac{p(p+q)}{2!} \left(\frac{y}{q}\right)^2 + \dots = (1-y)^{-p/q}$ తో పోల్చగా

$$p=1, p+q=3 \Rightarrow 1+q=3 \Rightarrow q=2$$

$$\text{మరియు } \frac{y}{q} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{q}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{3} + x = (1-y)^{-p/q} = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2} = (3)^{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} + x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3} - \frac{4}{3} = \frac{3\sqrt{3} - 4}{3} \Rightarrow 3x = 3\sqrt{3} - 4 \Rightarrow 3x + 4 = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow (3x + 4)^2 = (3\sqrt{3})^2 \Rightarrow 9x^2 + 24x + 16 = 27 \Rightarrow 9x^2 + 24x = 11$$

22. క్రింది విభజనానికి మధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

| | | | | | | |
|-------|---|---|----|---|----|----|
| x_i | 2 | 5 | 7 | 8 | 10 | 35 |
| f_i | 6 | 8 | 10 | 6 | 8 | 2 |

Sol: ఇచ్చిన దత్తాంశ పట్టిక నుంచి ఈ క్రింది పట్టికను నిర్మిద్దాం

| x_i | f_i | $f_i x_i$ | $ x_i - \bar{x} $ | $f_i x_i - \bar{x} $ |
|-------|-------|-----------|-------------------|-----------------------|
| 2 | 6 | 12 | 6 | 36 |
| 5 | 8 | 40 | 3 | 24 |
| 7 | 10 | 70 | 1 | 10 |
| 8 | 6 | 48 | 0 | 0 |
| 10 | 8 | 80 | 2 | 16 |
| 35 | 2 | 70 | 27 | 54 |
| | | 40 | 320 | 140 |

$$\text{ఇక్కడ, } N = \sum f_i = 40; \sum f_i x_i = 320 \Rightarrow \text{అంకమధ్యమము } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{320}{40} = 8$$

$$\text{మరియు } \sum f_i |x_i - \bar{x}| = 140$$

$$\therefore \text{అంకమధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనం } M.D = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{140}{40} = 3.5$$

23. I, II, III అంకెలను కలిగిన మూడు పెట్టెలలో క్రింది విధంగా బంతులు ఉన్నాయి.

| | తెల్లనివి | నల్లనివి | ఎర్రనివి |
|-----|-----------|----------|----------|
| I | 1 | 2 | 3 |
| II | 2 | 1 | 1 |
| III | 4 | 5 | 3 |

ఒక పెట్టెను యాదృచ్ఛికంగా ఎంపిక చేసి, దాని నుంచి ఒక బంతిని తీశారు. అది ఎర్రనిది అయితే, అది పెట్టె II నుంచి తీయగల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

Sol: బాక్సులు B_1, B_2, B_3 లను ఎంపిక చేసే ఘటనలను వరుసగా B_1, B_2, B_3 అనుకొందాం మరియు ఎర్రని బంతిని ఎంపిక చేసే ఘటన R అనుకొందాం.

$$\therefore P(B_1) = \frac{1}{3}, P(B_2) = \frac{1}{3}, P(B_3) = \frac{1}{3} \text{ మరియు } P\left(\frac{R}{B_1}\right) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P\left(\frac{R}{B_2}\right) = \frac{1}{4}, P\left(\frac{R}{B_3}\right) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

కావున, బేయీ సిద్ధాంతం ప్రకారం కావలసిన సంభావ్యత

$$P\left(\frac{B_2}{R}\right) = \frac{P(B_2)P\left(\frac{R}{B_2}\right)}{P(B_1)P\left(\frac{R}{B_1}\right) + P(B_2)P\left(\frac{R}{B_2}\right) + P(B_3)P\left(\frac{R}{B_3}\right)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{4}{4}\right)} = \frac{1}{4}$$

24.

| | | | | | | | |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X = x_i$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $P(X = x_i)$ | 1/9 | 1/9 | 1/9 | 1/3 | 1/9 | 1/9 | 1/9 |

అనేది ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి X యొక్క సంభావ్యత. X విస్తృతిలను కనుక్కోండి.

Sol: సగటు (μ) = $-3\left(\frac{1}{9}\right) - 2\left(\frac{1}{9}\right) - 1\left(\frac{1}{9}\right) + 0\left(\frac{1}{3}\right) + 1\left(\frac{1}{9}\right) + 2\left(\frac{1}{9}\right) + 3\left(\frac{1}{9}\right)$

$$= -\frac{3}{9} - \frac{2}{9} - \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = 0 \Rightarrow \mu = 0$$

విస్తృతి (σ) = $(-3)^2\left(\frac{1}{9}\right) + (-2)^2\left(\frac{1}{9}\right) + (-1)^2\left(\frac{1}{9}\right) + (0)^2\left(\frac{1}{3}\right) + (1)^2\left(\frac{1}{9}\right) + (2)^2\left(\frac{1}{9}\right) + (3)^2\left(\frac{1}{9}\right) - \mu^2$

$$= \frac{9}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{9}{9} - 0 = \frac{28}{9}$$