Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH -2024 (TS)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2024(TS)

Time : 3 Hours **గణితశాస్త్రం –2B** Max.Marks : 75

సెక్షన్–ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: **$10 \times 2 = 20$**

1. $x^2+y^2-4x+6y+c=0$ సమీకరణము '6' వ్యాసార్ధముగా కలిగిన వృత్తాన్ని సూచిస్తే c విలువ కనుగొనుము.
2. $x^2+y^2=9$ అనే వృత్తం దృష్ట్యా (1,1) యొక్క స్పర్శ జ్యా సమీకరణం కనుగొనుము.
3. $x^2+y^2+4x+8=0$, $x^2+y^2-16y+k=0$ అనే వృత్తాలు లంబ వృత్తాలు అయిన k విలువ కనుక్కోండి.
4. $2x-y+2=0$ సరళరేఖ $y^2=16x$ పరావలయాన్ని స్పర్శరేఖ అవుతుందని చూపి స్పర్శ బిందువు కనుగొనుము.
5. ఒక అతిపరావలయపు ఉత్కేంద్రత 5/4 అయిన, దాని సంయుగ్మ అతిపరావలయం ఉత్కేంద్రత కనుగొనుము.
6. $\int \frac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}}dx$ ను గణించండి. **7.** $\int e^x\left(\frac{1+x\log x}{x}\right)dx$ ను గణించండి.
8. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ ను గణించండి. **9.** $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$ ను గణించండి.
10. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2-3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-e^x=4$ అనే అవకలన సమీకరణపు పరిమాణము మరియు తరగతి కనుగొనుము.

సెక్షన్–బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. **$5 \times 4 = 20$**

11. బిందువు (2,5) $x^2+y^2-5x+4y+k=0$ కు గల స్పర్శరేఖ పొడవు $\sqrt{37}$ అయితే kను కనుక్కోండి.
12. $x^2+y^2-4x-6y+5=0$, $x^2+y^2-2x-4y-1=0$, $x^2+y^2-6x-2y=0$ అనే వృత్తాల మూలకేంద్రం కనుక్కోండి.
13. $9x^2+16y^2=144$అనే దీర్ఘవృత్తం యొక్క ఉత్కేంద్రత, నాభిలంబం పొడవులు, కేంద్రం, నాభులు, నియత రేఖ సమీకరణాలు కనుగొనుము.
14. దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ నాభిలంబం ఒక కొన వద్ద అభిలంబ రేఖ హ్రస్వాక్షం ఒక కొన ద్వారా పోతే $e^4+e^2=1$ అని చూపండి.
15. $3x^2-4y^2=12$ అతిపరావలయానికి $y=x-7$ రేఖకు (i) సమాంతరంగాను (ii) లంబంగాను ఉండే స్పర్శరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి. **16.** $y=e^x$, $y=x$, $x=0$, $x=1$ లతో ఏర్పడే ప్రదేశ వైశాల్యము కనుగొనుము.
17. $(e^x+1)ydy+(y+1)dx=0$ అవకలన సమీకరణంను సాధించండి.

సెక్షన్–సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. **$5 \times 7 = 35$**

18. (2,0), (0,1), (4,5), (0,c) బిందువులు చక్రీయాలైన c విలువలు కనుగొనుము
19. $x^2+y^2-6x-9y+13=0$ మరియు $x^2+y^2-2x-16y=0$ వృత్తాలు ఒకదానికొకటి స్పృశించుకొంటాయని చూపి ఆ స్పర్శబిందువు మరియు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ కనుగొనుము.
20. $(-2,1)$, $(1,2)$, $(-1,3)$ బిందువులగుండా పోతూ, x–అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే అక్షంగల పరావలయ సమీకరణము కనుగొనుము.
21. $\int \frac{dx}{4+5\sin x}$ ను గణించండి. **22.** $I_n=\int \sin^n x\,dx$ అనే లఘూకరణ సూత్రమును రాబట్టి దానినుండి $\int \sin^4 x\,dx$ ను గణించుము.
23. $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}dx$ ను గణించండి. 24. $(1+y^2)dx=(\mathrm{Tan}^{-1}y-x)dy$ సాధించండి.

IPE TS MARCH-2024
SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + c = 0$ సూచించే వృత్త వ్యాసార్థం 6 అయితే c విలువను కనుక్కోండి.

Sol: దత్త వృత్తం $x^2 + y^2 - 4x + 6y + c = 0 \Rightarrow g = -2,\ f = 3, c = c$. కాని వ్యాసార్థం = 6

$\therefore \sqrt{g^2 + f^2 - c} = 6 \Rightarrow \sqrt{(-2)^2 + 3^2 - c} = 6$

$\Rightarrow \sqrt{13 - c} = 6$ ఇరువైపులా వర్గం చేయగా $13 - c = 36 \Rightarrow c = 13 - 36 = -23$

---

2. $x^2 + y^2 = 9$ అనే వృత్తం దృష్ట్యా (1, 1) యొక్క స్పర్శ జ్యా సమీకరణం కనుగొనుము.

Sol: దత్త బిందువు $P(x_1, y_1) = (1, 1)$ మరియు వృత్తం $S = x^2 + y^2 - 9 = 0$

$S = x^2 + y^2 - 9 = 0$ అనే వృత్తం దృష్ట్యా $P(1, 1)$ యొక్క స్పర్శ జ్యా సమీకరణం $S_1 = 0 \Rightarrow x_1x + y_1y - r^2 = 0$

$\Rightarrow 1(x) + 1(y) - 9 = 0 \Rightarrow x + y - 9 = 0$

---

3. $x^2 + y^2 + 4x + 8 = 0,\ x^2 + y^2 - 16y + k = 0$ అనే వృత్తాలు లంబ వృత్తాలు అయిన *k* విలువ కనుక్కోండి.

Sol: ఇక్కడ, $g = 2,\ f = 0,\ c = 8,\qquad g' = 0,\ f' = -8,\ c' = k$

వృత్తాల లంబచ్ఛేదన నియమం: $2gg' + 2ff' = c + c'$

$\Rightarrow 2(2)(0) + 2(0)(-8) = 8 + k \Rightarrow k = -8$

---

4. $2x - y + 2 = 0$ సరళరేఖ $y^2 = 16x$ పరావలయాన్ని స్పర్శరేఖ అవుతుందని చూపి స్పర్శ బిందువు కనుగొనుము.

Sol: ఇచ్చిన పరావలయము $y^2 = 16x \Rightarrow 4a = 16 \Rightarrow a = 4$

ఇచ్చిన రేఖ $2x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2x + 2$

$y = mx + c$ తో పోల్చగా $m = 2, c = 2$

స్పర్శరేఖా నియమం $c = a/m$

$\therefore \frac{a}{m} = \frac{4}{2} = 2 = c$. కావున ఇచ్చిన రేఖ 'స్పర్శరేఖ'.

స్పర్శ బిందువు $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right) = \left(\frac{4}{4}, \frac{8}{2}\right) = (1, 4)$

5. ఒక అతిపరావలయపు ఉత్కేంద్రత 5/4 అయిన, దాని సంయుగ్మ అతిపరావలయం ఉత్కేంద్రత కనుగొనుము.

Sol: e = 5/4 మరియు సంయుగ్మ అతిపరావలయపు ఉత్కేంద్రత e_1 అప్పుడు

$$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e_1^2}=1\Rightarrow\frac{1}{(5/4)^2}+\frac{1}{e_1^2}=1\Rightarrow\frac{1}{e_1^2}=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}\Rightarrow e_1^2=\frac{25}{9}\Rightarrow e_1=\frac{5}{3}$$

---

6. $\int\frac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}}dx$ ను గణించండి.

Sol: $\sqrt{x+2}=t \quad \Rightarrow x+2=t^2\Rightarrow x=t^2-2\Rightarrow dx=2tdt$

$x+3=(x+2)+1=t^2+1$

$$\therefore I=\int\frac{dx}{(x+3)\sqrt{x+2}}=\int\frac{2\cancel{t}dt}{(t^2+1)\cancel{t}}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2Tan^{-1}(t)+c\Rightarrow 2Tan^{-1}(\sqrt{x+2})+c$$

---

7. $\int e^x\left(\frac{1+x\log x}{x}\right)dx$ ను గణించండి.

Sol: ఇక్కడ, $f(x)=\log x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$

$$\therefore\int e^x\left(\frac{1+x\log x}{x}\right)dx=\int e^x\left(\frac{1}{x}+\log x\right)dx=e^x\log x+c$$

---

8. $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$ ను గణించండి.

Sol: సూత్రం: $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}Sin^{-1}\frac{x}{a}+c$$

$$\therefore\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}Sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a=0+\frac{a^2}{2}Sin^{-1}(1)=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi a^2}{4}$$

9. $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$ **ను గణించండి.**

Sol: $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int_0^1 \left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \left[x - \mathrm{Tan}^{-1}x\right]_0^1 = (1-\mathrm{Tan}^{-1}1) - (0-\mathrm{Tan}^{-1}0) = 1 - \frac{\pi}{4}$

---

10. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - e^x = 4$ **అనే అవకలన సమీకరణపు పరిమాణము మరియు తరగతి కనుగొనుము.**

Sol: ఇచ్చిన సమీకరణములోని గరిష్ఠ తరగతి గల అవకలని $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2$

$\therefore$ ఇచ్చిన అవకలన సమీకరణంకు పరిమాణం = 3 మరియు తరగతి = ఘాతం = 2

సెక్షన్-బి

11. (2, 5) బిందువు నుండి $x^2+y^2-5x+4y+k=0$ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ పొడవు $\sqrt{37}$ అయిన k విలువ కనుగొనుము.

Sol: (2, 5) బిందువు నుండి $S = x^2 + y^2 - 5x + 4y + k = 0$ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ పొడవు $\sqrt{S_{11}} = \sqrt{37}$;

ఇరువైపులా వర్గము చేయగా $S_{11} = 37$

$\Rightarrow (2)^2 + 5^2 - 5(2) + 4(5) + k = 37$

$\Rightarrow 4 + 25 - 10 + 20 + k = 37$

$\Rightarrow 39 + k = 37 \Rightarrow k = -2$

---

12. $x^2+y^2-4x-6y+5=0, x^2+y^2-2x-4y-1=0$, $x^2+y^2-6x-2y=0$ యొక్క మూల కేంద్రంను కనుగొనుము.

Sol: ఇచ్చిన వృత్తాలు $S = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$, $S' = x^2+y^2-2x-4y-1=0$, $S''=x^2+y^2-6x-2y=0$

S, S' వృత్తాల మూలాక్షం $S - S' = 0$

$\Rightarrow (-4x + 2x) + (-6y + 4y) + (5 + 1) = 0$

$\Rightarrow -2x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow -2(x + y - 3) = 0$

$\Rightarrow x + y - 3 = 0$ ..... (1)

S, S''వృత్తాల మూలాక్షం $S - S'' = 0$

$\Rightarrow (-4x + 6x) + (-6y + 2y) + 5 = 0 \quad \Rightarrow 2x - 4y + 5 = 0$ .... (2)

$(1) \times 2 \Rightarrow 2x + 2y - 6 = 0$ ....(3)

$(3) - (2) \Rightarrow 6y - 11 = 0 \Rightarrow y = 11/6$

(1) నుండి, $x = 3 - y = 3 - \frac{11}{6} = \frac{18-11}{6} = \frac{7}{6}$

∴ మూలకేంద్రం (7/6, 11/6)

13. $9x^2 + 16y^2 = 144$ అనే దీర్ఘవృత్తం యొక్క ఉత్కేంద్రత, నాభులు, నాభిలంబం పొడవులు, నియత రేఖ సమీకరణాలు కనుగొనుము.

Sol: ఇచ్చిన దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $9x^2+16y^2=144 \Rightarrow \frac{\cancel{9}x^2}{\cancel{144}}+\frac{\cancel{16}y^2}{\cancel{144}}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

ఇక్కడ, $a^2 = 16$, $b^2 = 9$ $\Rightarrow a > b$. కావున ఇది క్షితిజ సమాంతర దీర్ఘవృత్తం.

i) ఉత్కేంద్రత $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{16-9}{16}}=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

ii) నాభులు $= (\pm ae, 0) = (\pm 4\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right), 0) = (\pm\sqrt{7}, 0)$

iii) నాభిలంబం పొడవు $= \frac{2b^2}{a}=\frac{2(9)}{4}=\frac{9}{2}$

iv) నియతరేఖ సమీకరణం $x=\pm\frac{a}{e}=\pm 4\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\right)=\frac{\pm 16}{\sqrt{7}} \Rightarrow \sqrt{7}x=\pm 16 \Rightarrow \sqrt{7}x \pm 16=0$

---

14. దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ నాభిలంబం ఒక కొన వద్ద అభిలంబ రేఖ ప్రహస్వాక్షం ఒక కొన ద్వారా పోతే $e^4+e^2=1$ అని చూపండి.

Sol : (x_1, y_1) బిందువు వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణం $\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=a^2-b^2$

నాభిలంబం ఒక కొన $L = (ae, b^2/a)$

కనుక L వద్ద, అభిలంబరేఖ సమీకరణం $\frac{a^2x}{ae}-\frac{b^2y}{b^2/a}=a^2-b^2 \Rightarrow \frac{ax}{e}-ay=a^2-b^2$.....(1)

కాని దీర్ఘవృత్తం (1) ప్రహస్వాక్షం ఒక కొన $B'(0, -b)$ గుండా పోతుంది.

$$\Rightarrow \frac{a(0)}{e}-a(-b)=a^2-b^2 \Rightarrow ab=a^2-a^2(1-e^2) \Rightarrow ab=a^2e^2 \Rightarrow e^2=\frac{b}{a}$$

$$\therefore e^4=\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2(1-e^2)}{a^2}=1-e^2 \Rightarrow e^4+e^2=1$$

15. **$3x^2 - 4y^2 = 12$ అతిపరావలయానికి $y = x - 7$ రేఖకు (i) సమాంతరంగాను (ii) లంబంగాను ఉండే స్పర్శరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.**

Sol: ఇచ్చిన అతిపరావలయం $3x^2 - 4y^2 = 12$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow a^2 = 4, b^2 = 3$$

$y = x - 7$ అనే రేఖ వాలు $m = 1$ $\Rightarrow$ దీని లంబరేఖ వాలు -1

సూత్రం:

m వాలు కలిగిన స్పర్శరేఖ $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

i) $m = 1$ కలిగిన సమాంతర స్పర్శరేఖ $y = 1.x \pm \sqrt{4(1)^2 - 3} = x \pm 1$

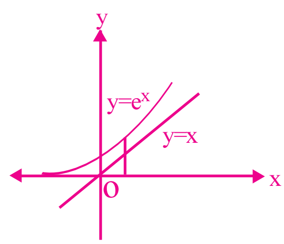
$$\Rightarrow x - y \pm 1 = 0$$

ii) $m = -1$ కలిగిన లంబ స్పర్శరేఖ $y = (-1)x \pm \sqrt{4(1)^2 - 3} = -x \pm 1 \Rightarrow x + y \pm 1 = 0$

---

16. **$y = e^x, y = x, x = 0, x = 1$ లతో ఏర్పడే ప్రదేశ వైశాల్యము కనుగొనుము.**

Sol: ఎగువపు వక్రము $y = e^x$, దిగువపు వక్రము $y = x$



$$\therefore \text{ కావలసిన వైశాల్యము } = \int_0^1 (e^x - x)dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= e - \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{3}{2} = \frac{2e-3}{2}$$ చ.యూ

17. **$(e^x + 1)ydy + (y + 1)\,dx = 0$ అవకలన సమీకరణంను సాధించండి.**

Sol: దత్త అవకలన సమీకరణం $(e^x+1)ydy+(y+1)dx=0 \Rightarrow (e^x+1)ydy=-(y+1)dx=0$

$$\Rightarrow \frac{ydy}{y+1}=-\frac{dx}{e^x+1} \Rightarrow \int \frac{ydy}{y+1}=-\int\frac{dx}{e^x+1}$$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{y+1-1}{y+1}\right)dy=-\int\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} \Rightarrow \int\left(\frac{y+1}{y+1}-\frac{1}{y+1}\right)dy=-\int\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$$

$$\Rightarrow y-\log(y+1)=-\log(1+e^{-x})+\log c \Rightarrow y-\log(y+1)=-\log\left(1+\frac{1}{e^x}\right)+\log c$$

$$\Rightarrow y=\log(y+1)+\log\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)+\log c$$

$$\Rightarrow y=\log_e\left[(y+1)\frac{(e^x+1)}{e^x}c\right] \Rightarrow e^y=(y+1)\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)c \Rightarrow e^x.e^y=(y+1)(e^x+1)c$$

$\therefore$ సాధన $e^{x+y}=(y+1)(e^x+1)c$

సెక్షన్-సి

18. (2,0), (0,1), (4,5), (0,c) బిందువులు చక్రీయాలైన c విలువలు కనుగొనుము.

Sol: A = (2,0), B=(0,1), C=(4,5), D=(0,c) అనుకోండి.

$S(x_1,y_1)$ వృత్త కేంద్రం $\Rightarrow SA=SB=SC$

ఇప్పుడు, $SA=SB \Rightarrow SA^2=SB^2 \Rightarrow (x_1-2)^2+(y_1-0)^2=(x_1-0)^2+(y_1-1)^2$

$\Rightarrow (\cancel{x_1^2}-4x_1+4)+(\cancel{y_1^2})=(\cancel{x_1^2})+(\cancel{y_1^2}-2y_1+1)$

$\Rightarrow 4x_1-2y_1+1-4=0 \Rightarrow 4x_1-2y_1-3=0$.........(1)

మరియు, $SB=SC \Rightarrow SB^2=SC^2 \Rightarrow (x_1-0)^2+(y_1-1)^2=(x_1-4)^2+(y_1-5)^2$

$\Rightarrow (\cancel{x_1^2})+(\cancel{y_1^2}-2y_1+1)=(\cancel{x_1^2}-8x_1+16)+(\cancel{y_1^2}-10y_1+25)$

$\Rightarrow 8x_1-2y_1+10y_1+1-16-25=0 \Rightarrow 8x_1+8y_1-40=0 \Rightarrow 8(x_1+y_1-5)=0 \Rightarrow x_1+y_1-5=0$......(2)

(1) & (2) లను సాధిస్తే వృత్త కేంద్రం $S(x_1,y_1)$ వస్తుంది.

$2\times(2) \Rightarrow 2x_1+2y_1-10=0$...........(3)

$(1)+(3) \Rightarrow 6x_1-13=0 \Rightarrow 6x_1=13 \Rightarrow x_1=13/6$

$(2) \Rightarrow y_1=5-x_1=5-\frac{13}{6}=\frac{30-13}{6}=\frac{17}{6} \Rightarrow y_1=\frac{17}{6}$

$\therefore$ వృత్త కేంద్రం $S(x_1,y_1)=\left(\frac{13}{6},\frac{17}{6}\right)$ మరియు A=(2,0) కావున

వ్యాసార్థం $r=SA \Rightarrow r^2=SA^2$

$\therefore r^2=SA^2=\left(2-\frac{13}{6}\right)^2+\left(0-\frac{17}{6}\right)^2=\left(\frac{12-13}{6}\right)^2+\left(\frac{17}{6}\right)^2=\left(\frac{1}{36}\right)+\left(\frac{289}{36}\right)=\frac{290}{36}$

$\therefore$ కేంద్రం $\left(\frac{13}{6},\frac{17}{6}\right)$ మరియు $r^2=\frac{290}{36}$ గా గల వృత్త సమీకరణం $\left(x-\frac{13}{6}\right)^2+\left(y-\frac{17}{6}\right)^2=\frac{290}{36}$

కాని బిందువు D(0,c) వృత్తం పై ఉండును

$\Rightarrow \left(0-\frac{13}{6}\right)^2+\left(c-\frac{17}{6}\right)^2=\frac{290}{36} \Rightarrow \left(c-\frac{17}{6}\right)^2=\frac{290}{36}-\frac{169}{36}=\frac{121}{36}$

$\Rightarrow \left(\frac{6c-17}{6}\right)^2=\frac{121}{36} \Rightarrow \frac{(6c-17)^2}{\cancel{36}}=\frac{11^2}{\cancel{36}} \Rightarrow 6c-17=\pm 11$

$\Rightarrow 6c=\pm 11+17 \Rightarrow 6c=28 \Rightarrow c=\frac{\cancel{28}}{\cancel{6}}=\frac{14}{3}$ (or) $\cancel{6}c=\cancel{6} \Rightarrow c=1$

$\therefore$ c= 14/3 (లేదా) 1

19. $x^2+y^2-6x-9y+13=0, x^2+y^2-2x-16y=0$ వృత్తాలు ఒకదానికొకటి స్పృశించుకొంటాయని చూపి ఆ స్పర్శబిందువు మరియు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ కనుగొనుము.

Sol: మొదటి వృత్తంనకు $S \equiv x^2+y^2-6x-9y+13=0$

కేంద్రం $C_1 = (3, 9/2)$,

వ్యాసార్థం $r_1 = \sqrt{3^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2-13} = \sqrt{9+\frac{81}{4}-13} = \sqrt{\frac{36+81-52}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$

రెండవ వృత్తంనకు $S' \equiv x^2+y^2-2x-16y=0$

కేంద్రం $C_2=(1,8)$, వ్యాసార్థం $r_2 = \sqrt{1^2+8^2-0} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$

$C_1C_2 = \sqrt{(3-1)^2+\left(\frac{9}{2}-8\right)^2} = \sqrt{2^2+\left(\frac{9-16}{2}\right)^2} = \sqrt{4+\frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{16+49}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$

మరియు, $r_2 - r_1 = \sqrt{65} - \frac{\sqrt{65}}{2} = \frac{\sqrt{65}}{2} = C_1C_2$

$\therefore$ ఇచ్చిన వృత్తాలు ఒకదానికొకటి **అంతరంగా** స్పృశించుకొనును.

ఇప్పుడు $r_1 : r_2 = \frac{\cancel{\sqrt{65}}}{2} : \cancel{\sqrt{65}} = \frac{1}{2} : 1 = 1 : 2$

కావున స్పర్శబిందువు P $C_1(3,9/2)$, $C_2(1,8)$ లను $1:2$ నిష్పత్తిలో బాహ్యంగా విభజించును.

$$\therefore P = \left(\frac{1(1)-2(3)}{1-2}, \frac{1(8)-2(\frac{9}{2})}{1-2}\right) = (5,1)$$

ఈ స్పర్శబిందువు వద్ద $S=0$ మరియు $S'=0$ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ సమీకరణం $S-S'=0$

$\Rightarrow (\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-6x-9y+13)-(\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2x-16y)=0$

$\Rightarrow -4x+7y+13=0 \Rightarrow 4x-7y-13=0$

20. (–2, 1), (1,2), (–1,3) బిందువులగుండా పోతూ, x-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే అక్షంగల పరావలయ సమీకరణము కనుగొనుము.

Sol: x-అక్షానికి సమాంతరంగా అక్షము గల పరావలయ సమీకరణము $x=ly^2+my+n$

పరావలయము (–2,1) గుండా పోవును $\Rightarrow -2 = l(1^2)+m(1)+n \Rightarrow l+m+n=-2$ ....(1)

పరావలయము (1,2) గుండా పోవును $\Rightarrow 1= l(2)^2+m(2)+n \Rightarrow 4l+2m+n=1$ ....(2)

పరావలయము (–1,3) గుండా పోవున $\Rightarrow -1= l(3)^2+m(3)+n \Rightarrow 9l+3m+n=-1$ ....(3)

(2) –(1) $\Rightarrow 4l+2m+n - l-m-n= 1+2 \Rightarrow 3l+m = 3$ .....(4)

(3) –(2) $\Rightarrow 9l+3m+n - 4l-2m-n= -1-1 \Rightarrow 5l+m = -2$ .....(5)

(5) –(4) $\Rightarrow 5l + m-3l-m = -2-3 \Rightarrow 2l = -5 \Rightarrow l= -5/2$

(4) నుండి, $m = 3-3l = 3-3(-5/2)= 21/2 \Rightarrow m = 21/2$

(1)నుండి, , $l + m + n = -2 \Rightarrow -5/2 + 21/2 + n = -2 \Rightarrow n = -10$

$l = -5/2$, $m = 21/2$, $n= -10$ విలువలను $x=ly^2+my+n$ లో ప్రతిక్షేపిస్తే,

కావలసిన పరావలయ సమీకరణము $x = -\frac{-5}{2}y^2 + \frac{21}{2}y - 10 \Rightarrow 5y^2 + 2x - 21y + 20 = 0$

21. $\int \frac{dx}{4+5\sin x}$ ను గణించండి.

Sol: $\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ and $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\therefore I = \int \frac{dx}{4+5\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4+5\frac{(2t)}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{4(1+t^2)+10t} = \frac{2}{2}\int \frac{dt}{2t^2+5t+2}$$

$$= \int \frac{dt}{2\left(t^2+\frac{5}{2}t+1\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t^2+2(t)\frac{5}{4}+\left(\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{16}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2} \qquad \left[\because \int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2\left(\frac{3}{4}\right)}\log\left[\frac{t+\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}{t+\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}\right] = \frac{1}{3}\log\left[\frac{4t+2}{4t+8}\right] = \frac{1}{3}\log\left[\frac{2t+1}{2t+4}\right]+c = \frac{1}{3}\log\left[\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{2\tan\frac{x}{2}+4}\right]+c$$

22. $I_n=\int \sin^n x dx$ నకు లఘూకరణ సూత్రమును రాబట్టి దానినుండి $\int \sin^4 x dx$ ను గణించుము.

Sol: $I_n=\int \sin^n x dx=\int \sin^{n-1}x(\sin x)dx$.

మొదటి ప్రమేయము $u=\sin^{n-1}x$ మరియు

రెండవ ప్రమేయము $v=\sin x \Rightarrow \int v=-\cos x$

విభాగ సమాకలన సూత్రము ప్రకారము

$$I_n=\sin^{n-1}x(-\cos x)-\int(n-1)\sin^{n-2}x\cos x(-\cos x)dx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int \sin^{n-2}x\cos^2 x dx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int \sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\left[\int \sin^{n-2}x dx-\int \sin^n x dx\right]$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)[I_{n-2}-I_n]$$

$$I_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}-nI_n+I_n$$

$$\Rightarrow nI_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}+\cancel{I_n}-\cancel{I_n}$$

$$\Rightarrow I_n=\frac{-\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)I_{n-2} \quad ....(1)$$

n=4, 2,0 విలువలను వరుసగా (1)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$I_4=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}I_2$$

$$=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}\left[-\frac{\sin x\cos x}{2}+\frac{1}{2}I_0\right]$$

$$=\frac{-\sin^3 x\cos x}{4}-\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{3}{8}I_0$$

$$=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}-\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{3}{8}x+c \qquad [\because I_0=x]$$

23. $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x} dx$ ను గణించండి.

Sol: $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ అని మనకు తెలుసు $\therefore I = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x} dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)dx}{1+\sin(\pi-x)}$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\pi\, dx}{1+\sin x} - \int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{1+\sin x} = \int_0^{\pi} \frac{\pi\, dx}{1+\sin x} - I \Rightarrow I + I = 2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{(1-\sin x)}{1-\sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos x} dx\right) = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sec^2 x dx - \int_0^{\pi} \sec x.\tan x\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left([\tan x]_0^{\pi} - [\sec x]_0^{\pi}\right) = \frac{\pi}{2}[(0-0)-(-1-1)] = \frac{\pi}{2}.2 = \pi$$

---

24. $(1+y^2)\, dx = (Tan^{-1}y - x)\, dy$ ను సాధించుము.

Sol: దత్త సమీకరణము $(1+y^2)dx = (Tan^{-1}y - x)dy$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{Tan^{-1}y}{1+y^2} - \frac{x}{1+y^2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} + x\left(\frac{1}{1+y^2}\right) = \frac{Tan^{-1}y}{1+y^2}$$

పై సమీకరణము $\frac{dx}{dy} + xP(y) = Q(y)$ అనే రూపంలో కలదు. ఇది **x** లో రేఖీయ అవకలజ సమీకరణము.

ఇక్కడ $P = \frac{1}{1+y^2} \Rightarrow \int Pdy = \int \frac{1}{1+y^2} dy = Tan^{-1}y.$

$\therefore I.F = e^{\int Pdy} = e^{Tan^{-1}y}$ $\therefore$ సాధన $x.(I.F) = \int (I.F)Qdy$

$$\Rightarrow xe^{Tan^{-1}y} = \int e^{Tan^{-1}y}\left(\frac{Tan^{-1}y}{1+y^2}\right)dy = \int te^t dt$$, ఇక్కడ $Tan^{-1}y = t$ and $\frac{1}{1+y^2}dy = dt$

$$= te^t - \int 1.e^t dt = e^t(t-1) + c = (Tan^{-1}y - 1)e^{Tan^{-1}y} + c$$

$$\Rightarrow xe^{Tan^{-1}y} = (Tan^{-1}y - 1)e^{Tan^{-1}y} + c \Rightarrow x = Tan^{-1}y - 1 + ce^{-Tan^{-1}y}$$