Previous IPE

# SOLVED PAPERS

# MARCH-2024 (AP)

PREVIOUS PAPERS

# IPE: MARCH-2024(AP)

## MATHS-2B

**Time : 3 Hours** **Max.Marks : 75**

### సెక్షన్-ఎ

**I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి:** **$10 \times 2 = 20$**

1. (4,2), (1,5) లు వ్యాసాగ్రాలుగా కలిగిన వృత్త సమీకరణము కనుగొనుము.
2. బిందువు (2,5) నుండి $x^2+y^2-5x+4y+k=0$ కు గల స్పర్శరేఖ పొడవు $\sqrt{37}$ అయితే kను కనుక్కోండి.
3. $x^2+y^2+4x+8=0$, $x^2+y^2-16y+k=0$ అనే వృత్తాలు లంబ వృత్తాలు అయిన $k$ విలువ కనుక్కోండి.
4. నాభి దూరము 10 గా కలిగిన $y^2 = 8x$ పరావలయంపై బిందు నిరూపకాలు కనుగొనుము.
5. అనంత స్పర్శరేఖల మధ్యకోణం $30^0$ గా గల అతిపరావలయం ఉత్కేంద్రత కనుక్కోండి.
6. $\int \sec^2x.\csc^2x dx$ను గణించండి.
7. $\int e^{\log(1+\tan^2x)}dx$ ను కనుగొనండి.
8. $\int_0^{\pi/2} \cos^7x\sin^2x dx$ ను కనుగొనండి.
9. $x = 4-y^2$, $x = 0$ అనే వక్రాల మధ్యగల వైశాల్యం కనుగొనుము.
10. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right)^{6/5} = 6y$ యొక్క పరిమాణము మరియు తరగతి కనుగొనుము.

### సెక్షన్-బి

**II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి.** **$5 \times 4 = 20$**

11. $x^2+y^2-x+3y-22=0$ వృత్తము $y=x-3$ సరళరేఖపై చేయు అంతరఖండం యొక్క జ్యా పొడవు కనుగొనుము.
12. $x^2+y^2-8x-2y+8 = 0$, $x^2+y^2-2x+6y+6 =0$ అనే వృత్తాలు ఒకదానికొకటి స్పృశించుకొంటాయని చూపి, స్పర్శ బిందువు కనుక్కోండి.
13. ఒకటో పాదంలో నాభి లంబాగ్రం వద్ద $9x^2 + 16y^2 = 144$ దీర్ఘ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖల సమీకరణాలను కనుక్కోండి.
14. నాభులు S & S' లుగా గల దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ పై P(x,y) ఏదైనా బిందువు అయితే SP+S'P=2a స్థిరం అని చూపండి.
15. $x^2-4y^2=4$ అనే అతిపరావలయం యొక్క కేంద్రం, ఉత్కేంద్రత, నాభులు, నియత రేఖ సమీకరణం, నాభిలంబం పొడవులను కనుగొనుము.
16. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ ను గణించండి.
17. $\frac{dy}{dx}+\frac{3x^2}{1+x^3}y=\frac{1+x^2}{1+x^3}$ ను సాధించండి.

### సెక్షన్-సి

**III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి.** **$5 \times 7 = 35$**

18. (2,0), (0,1), (4,5), (0,c) బిందువులు చక్రీయాలైన c విలువలు కనుగొనుము.
19. $x^2+y^2-4x-10y+28=0$ మరియు $x^2+y^2+4x-6y+4=0$ వృత్తాలకు తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖాయుగ్మ సమీకరణము కనుగొనుము.
20. పరావలయపు ప్రామాణిక రూపము $y^2 = 4ax$ అని చూపుము.
21. $I_n=\int \sin^n x dx$ అనే లఘూకరణ సూత్రమును రాబట్టి దానినుండి $\int \sin^4 x dx$ ను గణించుము.
22. $\int \frac{x+1}{x^2+3x+12}dx$ ను గణించండి.
23. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x}dx$ ను గణించండి.
24. $\left(1+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$ ను సాధించండి.

BABY BULLET-Q

# IPE AP MARCH-2024
## SOLUTIONS

### సెక్షన్-ఎ

**1.** **(4, 2), (1, 5) లు వ్యాసాగ్రాలుగా కలిగిన వృత్త సమీకరణము కనుగొనుము.**

**Sol:** **సూత్రము:** $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ లు వ్యాసాగ్రాలుగా కలిగిన వృత్త సమీకరణము

$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

$\therefore$ కావలసిన వృత్త సమీకరణము $(x - 4)(x - 1) + (y - 2)(y - 5) = 0$

$\Rightarrow (x^2 - x - 4x + 4) + (y^2 - 5y - 2y + 10) = 0 \quad \Rightarrow x^2 + y^2 - 5x - 7y + 14 = 0$

---

**2.** **(2, 5) బిందువు నుండి $x^2+y^2-5x+4y+k=0$ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ పొడవు $\sqrt{37}$ అయిన k విలువ కనుగొనుము.**

**Sol:** (2, 5) బిందువు నుండి $S = x^2 + y^2 - 5x + 4y + k = 0$

వృత్తానికి స్పర్శరేఖ పొడవు $\sqrt{S_{11}} = \sqrt{37}$ ;

ఇరువైపులా వర్గము చేయగా $S_{11} = 37$

$\Rightarrow (2)^2 + 5^2 - 5(2) + 4(5) + k = 37$

$\Rightarrow 4 + 25 - 10 + 20 + k = 37$

$\Rightarrow 39 + k = 37 \Rightarrow k = -2$

---

**3.** **$x^2 + y^2 + 4x + 8 = 0, x^2 + y^2 - 16y + k = 0$ అనే వృత్తాలు లంబ వృత్తాలు అయిన *k* విలువ కనుక్కోండి.**

**Sol:** ఇక్కడ, $g = 2, \quad f = 0, \quad c = 8,$

$g' = 0, \ f' = -8, \ c' = k$

**వృత్తాల లంబచ్ఛేదన నియమం:** $2gg' + 2ff' = c + c'$

$\Rightarrow 2(2)(0) + 2(0)(-8) = 8 + k \Rightarrow k = -8$

---

**4.** **నాభి దూరము 10 గా కలిగిన $y^2 = 8x$ పరావలయంపై బిందు నిరూపకాలు కనుగొనుము.**

**Sol:** ఇచ్చిన పరావలయం $y^2 = 8x \quad \Rightarrow 4a = 8 \quad \Rightarrow a = 2.$

మరియు నాభి దూరం $SP = 10$

**సూత్రం:** నాభి దూరం $SP = x_1 + a$

$\Rightarrow x_1 + 2 = 10 \Rightarrow x_1 = 8.$

కాని, $y_1^2 = 8x_1 \Rightarrow y_1^2 = 8(8) \Rightarrow y_1 = \pm 8$

$\therefore \ P(x_1, y_1) = (8, \pm 8)$

BABY BULLET-Q

**5.** **అనంత స్పర్శరేఖల మధ్యకోణం $30^o$ గా గల అతిపరావలయం ఉత్కేంద్రత కనుక్కోండి.**

**Sol:** $S = 0$ యొక్క రెండు అనంత స్పర్శరేఖల మధ్య కోణం $2Sec^{-1}e$

$\therefore\ 2Sec^{-1}e = 30^o \Rightarrow Sec^{-1}e = 15^o \Rightarrow e = \sec 15^o = \sqrt{6}-\sqrt{2}$

---

**6.** **$\int \sec^2 x.\csc^2 x dx$ ను గణించండి.**

**Sol:** $\int \sec^2 x.\csc^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$

$= \int (\sec^2 x + \csc^2 x) dx$

$= \int \sec^2 x dx + \int \csc^2 x dx$

$= \tan x - \cot x + c$

---

**7.** **$\int e^{\log(1+\tan^2 x)} dx$ ను కనుగొనండి.**

**Sol:** $I = \int e^{\log_e(1+\tan^2 x)} dx = \int (1+\tan^2 x) dx = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$ $\left[\because \int e^{\log_e f(x)} = f(x)\right]$

---

**8.** **$\int_0^{\pi/2} \cos^7 x \sin^2 x dx$ ను కనుగొనండి.**

**Sol:** $\int_0^{\pi/2} \cos^7 x \sin^2 x dx = \frac{[(6)(4)(2)][(1)]}{(9)(7)(5)(3)} = \frac{16}{315}$

---

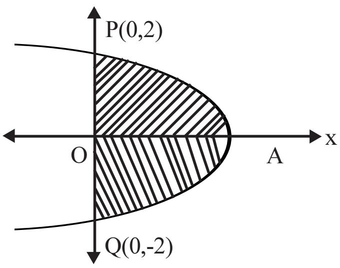
**9.** **$x = 4 - y^2,\ x = 0$ అనే వక్రాల మధ్యగల వైశాల్యం కనుగొనుము.**

**Sol :** దత్త వక్రం $x = 4 - y^2$. ఇది ఎడమవైపు ఉండే క్షితిజ సమాంతర పరావలయం.

$y = 0$ ప్రతిక్షేపించగా $A = (4,0)$.

$x = 0$ ప్రతిక్షేపించగా $P(0, 2)$ మరియు $Q(0, -2)$.

పటము నుండి కావలసిన వైశాల్యము = 2 OAP వైశాల్యము




$A = 2\int_0^2 x dy = 2\int_0^2 (4-y^2) dy = 2\left(4y - \frac{y^3}{3}\right)_0^2 = 2.\frac{16}{3} = \frac{32}{3}$ చ.యూ

**10.** $\left[\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right]^{\frac{6}{5}}=6y$ **అనే అవకలన సమీకరణపు పరిమాణము, తరగతి కనుగొనుము.**

**Sol:** దత్త సమీకరణము $\left(\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right)^{6/5}=6y \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=(6y)^{5/6}$

ఇచ్చుట గరిష్ట తరగతి గల అవకలని $\frac{d^2y}{dx^2}$ $\therefore$ పరిమాణం $=2$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ యొక్క ఘాతము 1 $\therefore$ తరగతి $=1$

BABY BULLET-Q

## సెక్షన్-బి

**11. $x^2+y^2-x+3y-22=0$ వృత్తము $y=x-3$ సరళరేఖపై చేయు అంతరఖండం యొక్క జ్యా పొడవు కనుగొనుము.**

**Sol:** ఇచ్చిన వృతం $x^2+y^2-x+3y-22=0$

కేంద్రము $C=(1/2,-3/2)$

వ్యాసార్థము $r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+22}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+22}=\sqrt{\frac{1+9+88}{4}}=\sqrt{\frac{98}{4}}=\sqrt{\frac{49}{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}$

కేంద్రము $(1/2,-3/2)$ నుండి $y=x-3=0 \Rightarrow x-y-3=0$ రేఖకు లంబదూరము p అయితే

$$p=\frac{\left|\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-3\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\left|\frac{1+3-6}{2}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\frac{-2}{2}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ జ్యా పొడవు $=2\sqrt{r^2-p^2}=2\sqrt{\left(\frac{49}{2}\right)-\frac{1}{2}}=2\sqrt{\frac{48}{2}}=2\sqrt{24}$

---

**12. $x^2+y^2-8x-2y+8=0$, $x^2+y^2-2x+6y+6=0$ వృత్తాలు ఒకదానికొకటి స్పృశించుకొంటాయని చూపి ఆ స్పర్శబిందువును కనుగొనుము.**

**Sol:** $S=x^2+y^2-8x-2y+8=0$ వృత్తానికి కేంద్రము $C_1=(4,1)$, వ్యాసార్థము $r_1=\sqrt{16+1-8}=\sqrt{9}=3$

$S'=x^2+y^2-2x+6y+6=0$ వృత్తానికి కేంద్రము $C_2=(1,-3)$, వ్యాసార్థము $r_2=\sqrt{1+9-6}=\sqrt{4}=2$

$$C_1C_2=\sqrt{(4-1)^2+(1+3)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

మరియు, $r_1+r_2=3+2=5$. ఇక్కడ, $C_1C_2=r_1+r_2$

$\therefore$ ఇచ్చిన వృత్తాలు ఒకదానికొకటి బాహ్యంగా స్పృశించుకొనును.

మరియు స్పర్శబిందువు $r_1:r_2=3:2$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించును.

$\therefore$ స్పర్శబిందువు $I=\left(\frac{3(1)+2(4)}{3+2},\frac{3(-3)+2(1)}{3+2}\right)=\left(\frac{11}{5},\frac{-7}{5}\right)$

BABY BULLET-Q

**13.** **ఒకటో పాదంలో నాభి లంబాగ్రం వద్ద $9x^2 + 16y^2 = 144$ దీర్ఘ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖల సమీకరణాలను కనుక్కోండి.**

**Sol:** ఇచ్చిన దీర్ఘవృత్తం $9x^2 + 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow a^2=16, b^2=9 \Rightarrow a=4, b=3$

$$e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{16-9}{16}}=\sqrt{\frac{7}{16}} \Rightarrow e=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

నాభిలంబాగ్రము $L=\left(ae,\frac{b^2}{a}\right)=\left(\cancel{4}.\frac{\sqrt{7}}{\cancel{4}},\frac{9}{4}\right)=\left(\sqrt{7},\frac{9}{4}\right)$

L వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం $S_1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x\sqrt{7}}{16}+\frac{y}{\cancel{9}}\left(\frac{\cancel{9}}{4}\right)=1 \Rightarrow \sqrt{7}x+4y=16$$

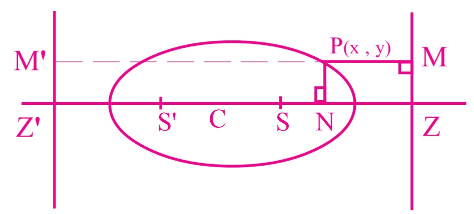
L వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణం $\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=a^2-b^2 \Rightarrow \frac{16x}{\sqrt{7}}-\frac{\cancel{9}y}{\frac{\cancel{9}}{4}}=16-9$

$$\Rightarrow \frac{16x}{\sqrt{7}}-4y=7 \Rightarrow 16x-4\sqrt{7}y=7\sqrt{7}$$

---

**14.** **నాభులు S & S' లుగా గల దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ పై P(x, y) ఏదైనా బిందువు అయితే SP+S'P=2a స్థిరం అని చూపండి.**

**Sol:** P(x, y) నుండి x-అక్షం మీదకు గల లంబపాదము N అనుకొనుము.




పటము నుండి $PM = NZ = CZ - CN = \frac{a}{e} - x$

మరియు $PM' = NZ' = CN + CZ' = x + \frac{a}{e}$

ఇప్పుడు, $\frac{SP}{PM} = e \Rightarrow SP = ePM = e\left(\frac{a}{e} - x\right) = a - ex$

ఇప్పుడు, $\frac{S'P}{PM'} = e \Rightarrow S'P = ePM' = e\left(x + \frac{a}{e}\right) = ex + a = a + ex$

$\therefore SP + S'P = (a - ex) + (a + ex) = 2a$ , ఇది స్థిరం

లేదా

$$SP + S'P = ePM + ePM' = e(PM + PM') = e(MM') = e(ZZ') = e(2CZ) = e\left(2\frac{a}{e}\right) = 2a$$

BABY BULLET-Q

**15.** **$x^2-4y^2=4$ అనే అతిపరావలయం యొక్క కేంద్రం, ఉత్కేంద్రత, నాభులు, నియత రేఖ సమీకరణం, నాభిలంబం పొడవులను కనుగొనుము.**

**Sol:** ఇచ్చిన అతిపరావలయ సమీకరణం $x^2-4y^2=4 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$. ఇక్కడ, $a^2=4,\ b^2=1$

(i) కేంద్రం $C=(0,0)$

(ii) ఉత్కేంద్రత $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{4+1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

(iii) నాభులు $=(\pm ae,0)=\left(\pm 2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right),0\right)=\left(\pm\sqrt{5},0\right)$

(iv) నియతరేఖల సమీకరణం $x=\pm\frac{a}{e}\Rightarrow x=\pm\frac{2}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\Rightarrow x=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}$

(v) నాభిలంబం పొడవు $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(1)}{2}=1$

---

**16.** **$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ ను గణించండి**

**Sol:** $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$ అని మనకు తెలుసు

$$\therefore I=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx\ \ldots\ldots..(1)\quad =\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x\right)}}dx$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}dx=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx\ \ldots\ldots\ldots..(2)$$

(1), (2) ల నుండి $I+I=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx+\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$

$$\Rightarrow 2I=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\cancel{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}}{\cancel{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}}dx=\int_{\pi/6}^{\pi/3}1dx=[x]_{\pi/6}^{\pi/3}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\Rightarrow 2I=\frac{\pi}{6}\Rightarrow I=\frac{\pi}{12}$$

EASY BULLET-Q

**17.** $\frac{dy}{dx}+\frac{3x^2}{1+x^3}y=\frac{1+x^2}{1+x^3}$ ను సాధించండి.

**Sol:** దత్త సమీకరణము $\frac{dy}{dx}+y\left(\frac{3x^2}{1+x^3}\right)=\frac{1+x^2}{1+x^3}$ ఇది y లో రేఖీయ అవకలన సమీకరణము.

ఇది $\frac{dy}{dx}+yP(x)=Q(x)$ అనే రూపంలో కలదు. ఇక్కడ, $P(x)=\frac{3x^2}{1+x^3}$, $Q(x)=\frac{1+x^2}{1+x^3}$

$$P(x)=\frac{3x^2}{1+x^3}\Rightarrow\int P(x)\,dx=\int\frac{3x^2}{1+x^3}dx=\log(1+x^3) \qquad \left[\because\int\frac{f'(x)}{f(x)}=\log f(x)\right]$$

$$\therefore I.F=e^{\int P(x)dx}=e^{\log(1+x^3)}=1+x^3$$

$\therefore$ సాధన $y(I.F)=\int(I.F)Q(x)dx$

$$\Rightarrow y(1+x^3)=\int\cancel{(1+x^3)}\left(\frac{1+x^2}{\cancel{1+x^3}}\right)dx=\int(1+x^2)dx=x+\frac{x^3}{3}+c$$

$$\therefore y(1+x^3)=x+\frac{x^3}{3}+c$$

BABY BULLET-Q

## సెక్షన్-సి

**18. (2, 0), (0, 1), (4, 5), (0, c) బిందువులు చక్రీయాలైన c విలువలు కనుగొనుము.**

**Sol:** A = (2, 0), B = (0, 1), C = (4, 5), D = (0, c) అనుకోండి.

$S(x_1, y_1)$ వృత్త కేంద్రం $\Rightarrow SA = SB = SC$

ఇప్పుడు, $SA = SB \Rightarrow SA^2 = SB^2 \Rightarrow (x_1-2)^2+(y_1-0)^2 = (x_1-0)^2+(y_1-1)^2$

$\Rightarrow (\cancel{x_1^2}-4x_1+4)+(\cancel{y_1^2}) = (\cancel{x_1^2})+(\cancel{y_1^2}-2y_1+1)$

$\Rightarrow 4x_1-2y_1+1-4=0 \Rightarrow 4x_1-2y_1-3=0$.........(1)

మరియు, $SB = SC \Rightarrow SB^2 = SC^2 \Rightarrow (x_1-0)^2+(y_1-1)^2 = (x_1-4)^2+(y_1-5)^2$

$\Rightarrow (\cancel{x_1^2})+(\cancel{y_1^2}-2y_1+1) = (\cancel{x_1^2}-8x_1+16)+(\cancel{y_1^2}-10y_1+25)$

$\Rightarrow 8x_1-2y_1+10y_1+1-16-25=0 \Rightarrow 8x_1+8y_1-40=0 \Rightarrow 8(x_1+y_1-5)=0 \Rightarrow x_1+y_1-5=0$......(2)

(1) & (2) లను సాధిస్తే వృత్త కేంద్రం $S(x_1, y_1)$ వస్తుంది.

$2 \times (2) \Rightarrow 2x_1 + 2y_1 - 10 = 0$...........(3)

$(1) + (3) \Rightarrow 6x_1 - 13 = 0 \Rightarrow 6x_1 = 13 \Rightarrow x_1 = 13/6$

$(2) \Rightarrow y_1 = 5 - x_1 = 5 - \frac{13}{6} = \frac{30-13}{6} = \frac{17}{6} \Rightarrow y_1 = \frac{17}{6}$

$\therefore$ వృత్త కేంద్రం $S(x_1, y_1) = \left(\frac{13}{6}, \frac{17}{6}\right)$

మరియు $A = (2, 0)$ కావున,

వ్యాసార్థం $r = SA \Rightarrow r^2 = SA^2$

$\therefore r^2 = SA^2 = \left(2-\frac{13}{6}\right)^2+\left(0-\frac{17}{6}\right)^2 = \left(\frac{12-13}{6}\right)^2+\left(\frac{17}{6}\right)^2 = \left(\frac{1}{36}\right)+\left(\frac{289}{36}\right) = \frac{290}{36}$

$\therefore$ కేంద్రం $\left(\frac{13}{6}, \frac{17}{6}\right)$ మరియు $r^2 = \frac{290}{36}$ గా గల వృత్త సమీకరణం $\left(x-\frac{13}{6}\right)^2+\left(y-\frac{17}{6}\right)^2 = \frac{290}{36}$

కాని, బిందువు D(0, c) వృత్తం పై ఉండును $\Rightarrow \left(0-\frac{13}{6}\right)^2+\left(c-\frac{17}{6}\right)^2 = \frac{290}{36} \Rightarrow \left(c-\frac{17}{6}\right)^2 = \frac{290}{36}-\frac{169}{36} = \frac{121}{36}$

$\Rightarrow \left(\frac{6c-17}{6}\right)^2 = \frac{121}{36} \Rightarrow \frac{(6c-17)^2}{\cancel{36}} = \frac{11^2}{\cancel{36}} \Rightarrow 6c-17 = \pm 11$

$\Rightarrow 6c = \pm 11 + 17 \Rightarrow 6c = 28 \Rightarrow c = \frac{\cancel{28}}{\cancel{6}} = \frac{14}{3}$ (or) $\cancel{6}c = \cancel{6} \Rightarrow c = 1$

$\therefore c = 14/3$ (లేదా) 1

BABY BULLET-Q

**19. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 28 = 0$ మరియు $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ వృత్తాలకు తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖాయుగ్మ సమీకరణము కనుగొనుము.**

**Sol:** $x^2+y^2-4x-10y+28=0$, వృత్తానికి కేంద్రం $C_1=(2, 5)$, వ్యాసార్థం $r_1=\sqrt{(-2)^2+(-5)^2-28}=\sqrt{1}=1$

$x^2+y^2+4x-6y+4=0$, వృత్తానికి కేంద్రం $C_2=(-2, 3)$, వ్యాసార్థం $r_2=\sqrt{2^2+(-3)^2-4}=\sqrt{9}=3$

సరూప అంతరకేంద్రము I అనేది $C_1C_2$ ను $r_1 : r_2 = 1 : 3$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించును.

$$\therefore I=\left(\frac{1(-2)+3(2)}{1+3}, \frac{1(3)+3(5)}{1+3}\right)=\left(\frac{4}{4}, \frac{18}{4}\right)=\left(1, \frac{9}{2}\right)$$

తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖాయుగ్మ సమీకరణము $S_1^2 = S_{11}(S)$

$$\Rightarrow\left[x+\frac{9}{2}y-2(x+1)-5\left(y+\frac{9}{2}\right)+28\right]^2=\left(1+\frac{81}{4}-4-45+28\right)(x^2+y^2-4x-10y+28)$$

$$\Rightarrow\left(-x-\frac{y}{2}+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(x^2+y^2-4x-10y+28)\Rightarrow\frac{(-2x-y+7)^2}{\cancel{4}}=\frac{1}{\cancel{4}}(x^2+y^2-4x-10y+28)$$

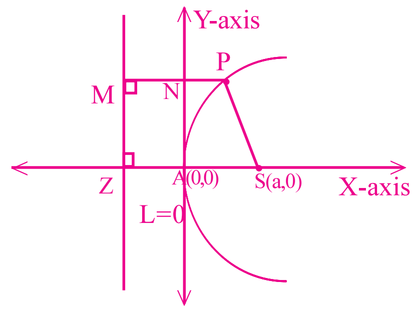
$$\Rightarrow (2x+y-7)^2 = x^2+y^2-4x-10y+28$$

$$\Rightarrow 4x^2+y^2+49+4xy-28x-14y=x^2+y^2-4x-10y+28\Rightarrow 3x^2+4xy-24x-4y+21=0$$

BABY BULLET-Q

**20. పరావలయపు ప్రామాణిక రూపమును ప్రవచించుము.**

**Sol:** పరావలయపు నాభి S మరియు నియతరేఖ $L = 0$ అనుకొనుము.




నియత రేఖపై S యొక్క విక్షేపము Z అనుకొనుము.

SZ యొక్క మధ్యబిందువును A అనుకొనుము

అప్పుడు $SA = AZ \Rightarrow \frac{SA}{AZ} = 1$

అనగా A బిందువు పరావలయం పై ఉండును.

AS పరావలయపు ప్రధాన అక్షాన్ని X-అక్షముగా తీసుకొని

ASకు లంబముగా A గుండాపోయే రేఖను Y-అక్షముగా తీసుకొనుము.

అప్పుడు $A = (0, 0)$ అగును.

$AS = a$ అనుకుంటే $S = (a, 0)$, $Z = (-a, 0)$ అగును

అప్పుడు నియతరేఖ సమీకరణము $x = -a \Rightarrow x + a = 0$

పరావలయంపై $P(x_1, y_1)$ అనే బిందువును తీసుకొనుము.

Y-అక్షంపై P యొక్క విక్షేపము N అనుకొనుము.

నియతరేఖపై P యొక్క విక్షేపము M అనుకొనుము.

ఇక్కడ $PM = PN + NM = x_1 + a$ $(\because PN = P$యొక్క x-నిరూపకం మరియు $NM = AZ = AS = a)$

ఇప్పుడు పరావలయపు 'నాభి–నియతరేఖ ధర్మం' ప్రకారం $\frac{SP}{PM} = 1 \Rightarrow SP = PM \Rightarrow SP^2 = PM^2$

$$\Rightarrow (x_1 - a)^2 + (y_1 - 0)^2 = (x_1 + a)^2$$

$$\Rightarrow y_1^2 = (x_1 + a)^2 - (x_1 - a)^2$$

$$\Rightarrow y_1^2 = 4ax_1 \qquad [\because (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab]$$

$\therefore P(x_1, y_1)$ యొక్క బిందుపథ సమీకరణము $y^2 = 4ax$

BABY BULLET-Q

**21. $I_n=\int\sin^n x dx$ నకు లఘూకరణ సూత్రమును రాబట్టి దానినుండి $\int\sin^4 x dx$ ను గణించుము.**

**Sol:** $I_n=\int\sin^n x dx=\int\sin^{n-1}x(\sin x)dx.$

మొదటి ప్రమేయము $u=\sin^{n-1}x$ మరియు

రెండవ ప్రమేయము $v=\sin x \quad \Rightarrow \int v=-\cos x$

విభాగ సమాకలన సూత్రము ప్రకారము

$I_n=\sin^{n-1}x\,(-\cos x)-\int(n-1)\sin^{n-2}x\cos x\,(-\cos x)dx$

$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\cos^2 x dx$

$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$

$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)[\int\sin^{n-2}x dx-\int\sin^n x dx]$

$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)[I_{n-2}-I_n]$

$I_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$

$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}-nI_n+I_n$

$\Rightarrow nI_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}+\cancel{I_n}-\cancel{I_n}$

$$\Rightarrow I_n=\frac{-\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)I_{n-2} \quad ....(1)$$

$n=4, 2, 0$ విలువలను వరుసగా (1) లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$I_4=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}I_2$$

$$=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}\left[-\frac{\sin x\cos x}{2}+\frac{1}{2}I_0\right]$$

$$=\frac{-\sin^3 x\cos x}{4}-\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{3}{8}I_0$$

$$=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}-\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{3}{8}x+c \qquad [\because I_0=x]$$

**22.** $\int \frac{x+1}{x^2+3x+12}dx$ ను గణించండి.

**Sol:** $x+1 = A\frac{d}{dx}(x^2+3x+12)+B$ .......(i)

$\therefore x+1 = A(2x+3)+B \quad \Rightarrow x+1 = 2Ax+(3A+B)$

x యొక్క గుణకాలను పోల్చగా, $2A = 1 \quad \Rightarrow A = 1/2$

స్థిరపదాలను పోల్చగా, $3A+B = 1 \quad \Rightarrow B = 1-3A = 1-\frac{3}{2} \quad \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

$A = \frac{1}{2}, B = \frac{-1}{2}$ విలువలను (i)లో ప్రతిక్షేపించగా $x+1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2+3x+12)-\frac{1}{2}$

$$\therefore I = \int \frac{x+1}{x^2+3x+12}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{d}{dx}(x^2+3x+12)}{x^2+3x+12}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+3x+12}$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+3x+12| - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+3x+12| - \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{\sqrt{39}}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{39}}{2}}\right)+c$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+3x+12| - \frac{1}{\sqrt{39}}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{39}}\right)+c$$

$$\because x^2+3x+12 = x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+12$$

$$= \left(x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)-\frac{9}{4}+12 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9+48}{4}$$

$$= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{39}{4}$$

$$\because \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{a}$$

BABY BULLET-Q

**23.** $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \cos x}{9 + 16\sin 2x} dx$ ను గణించండి.

**Sol :** $\sin x - \cos x = t$ అయిన $(\cos x + \sin x)dx = dt$ అగును

ఇప్పుడు $x = 0 \Rightarrow t = \sin 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1$ మరియు $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

మరియు $(\sin x - \cos x)^2 = t^2 \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x = t^2 \Rightarrow 1 - \sin 2x = t^2 \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$

$\therefore 9 + 16\sin 2x = 9 + 16(1-t^2) = 9 + 16 - 16t^2 = 25 - 16t^2$

$$\therefore I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \cos x}{9 + 16\sin 2x} dx = \int_{-1}^{0} \frac{dt}{25 - 16t^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dt}{5^2 - (4t)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2(5)} . \log\left[\frac{5+4t}{5-4t}\right]_{-1}^{0}$$

$$= \frac{1}{40}\left[\log\left[\frac{5+0}{5-0}\right] - \log\left[\frac{5-4}{5+4}\right]\right] = \frac{1}{40}\left[\log 1 - \log\frac{1}{9}\right]$$

$$= \frac{1}{40}\left[0 - \log 9^{-1}\right] = \frac{1}{40}[\log 9] = \frac{\log 3^2}{40} = \frac{\cancel{2}\log 3}{\cancel{40}} = \frac{\log 3}{20}$$

BABY BULLET-Q

**24. Solve** $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0$

**Sol:** దత్తాంశం నుండి $(1+e^{x/y})dx + e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0 \Rightarrow (1+e^{x/y})dx = -e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(1+e^{x/y})}{e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\left[\frac{e^{x/y}(1-(x/y))}{1+e^{x/y}}\right] \text{.....(1)}$$

$\frac{x}{y} = v \Rightarrow x = vy$ 'y' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా $\frac{dx}{dy} = v + y.\frac{dv}{dy}$

$$\therefore (1) \Rightarrow v + y\left(\frac{dv}{dy}\right) = -\left[\frac{e^v(1-v)}{1+e^v}\right]$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{dv}{dy}\right) = -\left[\frac{e^v(1-v)}{1+e^v} + v\right] = -\left[\frac{e^v - v.e^v + v + ve^v}{1+e^v}\right] = -\left[\frac{v+e^v}{1+e^v}\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+e^v}{v+e^v}\right)dv = -\left(\frac{1}{y}\right)dy \Rightarrow \int \frac{1+e^v}{v+e^v}dv = -\int \frac{1}{y}dy$$

$$\Rightarrow \log|v+e^v| = -\log|y| + \log|c| \Rightarrow \log|v+e^v| + \log|y| = \log|c|$$

$$\Rightarrow \log|(v+e^v)y| = \log|c| \Rightarrow \left[\frac{x}{y} + e^{x/y}\right]y = c \Rightarrow x + ye^{x/y} = c$$

BABY BULLET-Q