Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH -2024(TS)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2024(TS)

Time : 3 Hours **మ్యాథ్స్-2A** **Max.Marks : 75**

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: $10 \times 2 = 20$

1. $-5+12i$ యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము. **2.** $z_1=-1, z_2=-i$ అయిన $Arg(z_1 z_2)$ ను కనుగొనుము.
3. $\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^4}{(\sin\beta+i\cos\beta)^8}$ సూక్ష్మీకరించండి.
4. $x^2-6x+5=0$, $x^2-3ax+35=0$ లకు ఉమ్మడి మూలము ఉన్నచో a విలువ కనుగొనుము.
5. $x^3-6x^2+9x-4=0$ మూలాలు $1,1,\alpha$ అయితే α ను కనుక్కోండి.
6. ${}^{12}P_5+5.\,{}^{12}P_4={}^{13}P_r$ అయిన r ను కనుగొనుము. **7.** ${}^nC_5={}^nC_6$ అయిన ${}^{13}C_n$ కనుగొనుము.
8. $(3x-4y)^{10}$ విస్తరణలో 7వ పదం కనుగొనుము.
9. 6,7,10,12,13,4,12,16 అనే దత్తాంశానికి మధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.
10. ఒక ద్విపద చలరాశి X అంకమధ్యమం, విస్తృతిలు వరసగా 2.4,1.44 అయితే $P(1<x\le4)$ ను కనుక్కోండి.

సెక్షన్-బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 4 = 20$

11. $\frac{2-i}{(1-2i)^2}, \left(\frac{-2-11i}{25}\right)$లు సంయుగ్మాలు అని చూపండి. **12.**ప్రతి $x \in \mathbb{R}$ నకు $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ సమాసపు వ్యాప్తి కనుగొనుము.
13. 1,3,5,7,9 అంకెలను ఉపయోగించి ఏర్పరచగల 4 అంకెల సంఖ్యల మొత్తం కనుక్కోండి.
14. ఏడుమంది బాట్స్‌మెన్, ఆరుగురు బౌలర్లనుంచి కనీసం ఐదుగురు బౌలర్లు ఉన్న పదకొండు మంది క్రికెట్ టీమును ఎన్ని రకాలుగా ఏర్పరచవచ్చు ? **15.** $\frac{5x+6}{(x+2)(1-x)}$ ను పాక్షికభిన్నాలుగా విడగొట్టండి.
16. A,B అనే రెండు ఘటనలు $P(A\cup B)=0.65$ మరియు $P(A\cap B)=0.15$, అయ్యేటట్లుండే $P(A^c)+P(B^c)$ విలువను కనుక్కోండి.
17. కలనగణితంలోని ఒక సమస్యను ఇద్దరు విద్యార్థులు A, B లకు ఇస్తే వారు సమస్యను సాధించే సంభావ్యతలు వరసగా 1/3,1/4. వారిద్దరూ స్వతంత్రంగా సమస్యను సాధించటానికి ప్రయత్నిస్తే, ఆ సమస్యను సాధింపబడే సంభావ్యత ఎంత?

సెక్షన్-సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 7 = 35$

18. $\left(\frac{1+\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}}{1+\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}}\right)^{8/3}=-1$ అని చూపండి. **19.** $x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0$ ను సాధించుము.
20. $(x+a)^n$ అనే విస్తరణలో బేసిపదాల మొత్తము P మరియు సరిపదాల మొత్తముQ అయిన ఈ క్రింది వాటిని నిరూపించుము. (i) $P^2-Q^2=(x^2-a^2)^n$ (ii) $4PQ=(x+a)^{2n}-(x-a)^{2n}$
21. $x=\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\frac{1.3.5.7}{3.6.9.12}+....$ అయితే $9x^2+24x=11$ అని చూపుము.
22. ఒక అవిచ్ఛిన్న పౌనఃపున్య విభాజనానికి, మధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనం కనుక్కోండి.

అమ్మకాలు (వేల రూ॥లలో)	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
కంపెనీల సంఖ్య	5	15	25	30	20	5

23. సంభావ్యతమీద సంకలన సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించుము.
24. ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి X వ్యాప్తి {0,1,2}మరియు $P(X=0)=3c^3$,$P(X=1)=4c-10c^2$, $P(X=2)=5c-1$ ఇక్కడ 'c' స్థిరము అని ఇస్తే (i) c (ii) $P(0<x\le3)$ (iii) $P(1<x\le2)$ (iv) $P(x<1)$ లను కనుక్కోండి.

IPE TS MARCH-2024
SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. –5 + 12i యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము.

Sol: $-5+12i = a+bi \Rightarrow a=-5, b=12$ $\therefore\ r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-5)^2+12^2}$

$=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$

Formula: $\sqrt{a+ib}=\pm\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}}+i\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right)$

$\therefore \sqrt{-5+12i}=\pm\left(\sqrt{\frac{13-5}{2}}+i\sqrt{\frac{13+5}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{\cancel{8}}{\cancel{2}}}+i\sqrt{\frac{\cancel{18}}{\cancel{2}}}\right)=\pm(\sqrt{4}+i\sqrt{9})=\pm(2+3i)$

---

2. $z_1=-1, z_2=-i$ అయిన $Arg(z_1 z_2)$ ను కనుగొనుము.

Sol: $Arg(-1)=\pi$, $Arg(-i)=-\pi/2$ అని మనకు తెలుసు

$\therefore Arg(z_1z_2)=Arg(z_1)+Arg(z_2)=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

---

3. $\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^4}{(\sin\beta+i\cos\beta)^8}$ సూక్ష్మీకరించండి.

Sol: $G.E=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^4}{(\sin\beta+i\cos\beta)^8}=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^4}{(i\cos\beta+\sin\beta)^8}=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^4}{(i\cos\beta-i^2\sin\beta)^8}=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^4}{[i(\cos\beta-i\sin\beta)]^8}$

$=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^4}{(i)^8(\cos\beta-i\sin\beta)^8}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^4(\cos\beta-i\sin\beta)^{-8}\quad[\because i^8=(i^2)^4=(-1)^4=1]$

$=(\cos 4\alpha+i\sin 4\alpha)(\cos 8\beta+i\sin 8\beta)=(cis4\alpha)(cis8\beta)=cis(4\alpha+8\beta)$

$=\cos(4\alpha+8\beta)+i\sin(4\alpha+8\beta)$

---

4. $x^2-6x+5=0$ మరియు $x^2-3ax+35=0$ లకు ఉమ్మడి మూలము ఉన్నచో a విలువ కనుగొనుము.

Sol: దత్త సమీకరణం ఉమ్మడి మూలము α అనుకొనుము. అప్పుడు $\alpha^2-6\alpha+5=0$ మరియు $\alpha^2-3a\alpha+35=0$

$\Rightarrow (\alpha-1)(\alpha-5)=0 \quad \Rightarrow \alpha=1$ (లేదా) $\alpha=5$

$\alpha=1$ అయిన $\alpha^2-3a\alpha+35=0$

$\Rightarrow 1^2-3a(1)+35=0 \Rightarrow 3a=36 \Rightarrow a=12$

$\alpha=5$ అయిన $\alpha^2-3a\alpha+35=0$

$\Rightarrow 5^2-3a(5)+35=0 \Rightarrow 25-15a+35=0$

$\Rightarrow 15a=60 \Rightarrow a=4$

5. $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$ **యొక్క మూలాలు 1, 1, α అయితే α ను కనుక్కోండి.**

Sol: ఇచ్చిన సమీకరణము నుండి $a_0 = 1,\ a_1 = -6,\ a_2 = 9,\ a_3 = -4$

మూలాల లబ్ధం $1.1.\alpha = S_3 = \dfrac{-a_3}{a_0} = \dfrac{4}{1}$ $\therefore \alpha = 4.$

---

6. ${}^{12}P_5 + 5.\,{}^{12}P_4 = {}^{13}P_r$ **అయిన r ను కనుగొనుము**

Sol: ${}^{(n-1)}P_r + r.\,{}^{(n-1)}P_{(r-1)} = {}^{n}P_r$

$\therefore {}^{12}P_5 + 5.\,{}^{12}P_4 = {}^{(13-1)}P_5 + 5.\,{}^{(13-1)}P_{(5-1)} = {}^{13}P_5 = {}^{13}P_r$

$\therefore r = 5.$

---

7. ${}^{n}C_5 = {}^{n}C_6$, **అయిన** ${}^{13}C_n$ **ను కనుగొనుము**

Sol : **సూత్రం:** ${}^{n}C_r = {}^{n}C_s \Rightarrow r + s = n \text{ (or) } r = s$

$\therefore {}^{n}C_5 = {}^{n}C_6 \Rightarrow n = 5 + 6 = 11$

$\therefore {}^{13}C_n = {}^{13}C_{11} = {}^{13}C_{13-11}$

$= {}^{13}C_2 = \dfrac{13 \times \cancel{12}}{1 \times \cancel{2}} = 13 \times 6 = 78$

---

8. $(3x - 4y)^{10}$ **విస్తరణలో 7వ పదం కనుగొనుము.**

Sol: $(x - a)^n$ లోని విస్తరణ పదం $T_{r+1} = (-1)^r\, {}^{n}C_r x^{n-r} a^r.$

$\therefore T_7 = T_{6+1} = (-1)^6\, {}^{10}C_6\, (3x)^{10-6}.\,(4y)^6 = \dfrac{10!}{(10-6)!6!} \times 3^4.x^4.4^6.y^6 = \dfrac{10!}{4!6!} \times 3^4.4^6.x^4.y^6$

$$= \frac{10 \times \overset{3}{\cancel{9}} \times \cancel{8} \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1 \times \cancel{6!}} \times 3^4.4^6.x^4.y^6 = 210.3^4.4^6.x^4\,y^6$$

9. 6, 7, 10, 12, 13, 4, 12, 16 అనే దత్తాంశానికి మధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చిన దత్తాంశం:

6, 7, 10, 12, 13, 4, 12, 16. ఇక్కడ, n = 8

$$\bar{x}=\frac{6+7+10+12+13+4+12+16}{8}=\frac{80}{8}=10$$

అంకమధ్యమం నుంచి పరిశీలనల విచలనాలు:

6 –10 = –4; 7–10 = –3; 10–10 = 0; 12–10 = 2; 13–10 = 3; 4 –10 = –6;12–10=2;16–10= 6

కావున విచలనాల పరమ మూల్యాలు: 4, 3, 0, 2, 3, 6, 2, 6

$\therefore$ అంకమధ్యమం నుంచి $\text{M.D.}=\frac{\Sigma|x_i-\bar{x}|}{8}=\frac{4+3+0+2+3+6+2+6}{8}=\frac{26}{8}=3.25$

---

10. ఒక ద్విపద చలరాశి X అంకమధ్యమం, విస్తృతిలు వరసగా 2.4,1.44 అయితే P(1<x≤4)ను కనుక్కోండి.

Sol: అంకమధ్యమం = np = 2.4 ....(1)

విస్తృతి = npq = 1.44 ......(2)

(2) ను (1) తో భాగించగా $\frac{\cancel{np}q}{\cancel{np}}=\frac{1.44}{2.4}=\frac{3}{5}$

$$\therefore q=\frac{3}{5}\Rightarrow p=1-q=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

$np = 2.4 \Rightarrow n\left(\frac{2}{5}\right)=2.4\Rightarrow n=2.4\left(\frac{5}{2}\right)=6 \quad \therefore n=6, q=\frac{3}{5}$ మరియు $p=\frac{2}{5}$

$P(1<X\le 4)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4) = {}^6C_2.q^4.p^2+{}^6C_3q^3.p^3+{}^6C_4q^2.p^4$

$$={}^6C_2\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^2+{}^6C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^3+{}^6C_4\left(\frac{3}{5}\right)^2.\left(\frac{2}{5}\right)^4=15\left(\frac{3^4.2^2}{5^6}\right)+20\left(\frac{3^3.2^3}{5^6}\right)+15\left(\frac{3^2.2^4}{5^6}\right)$$

$$=\frac{3\times5(3^4\times2^2)}{5^6}+\frac{2^2\times5(3^3\times2^3)}{5^6}+\frac{3\times5(3^2\times2^4)}{5^6}$$

$$=\frac{36}{15625}(135+120+60)=\frac{2268}{3125}$$

సెక్షన్-బి

11. $\dfrac{2-i}{(1-2i)^2}, \left(\dfrac{-2-11i}{25}\right)$ లు సంయుగ్మాలు అని చూపండి

Sol: $z=\dfrac{2-i}{(1-2i)^2}=\dfrac{2-i}{1+4i^2-4i}=\dfrac{2-i}{1-4-4i}=\dfrac{2-i}{-3-4i}$

$=\dfrac{(2-i)}{-(3+4i)}\dfrac{(3-4i)}{(3-4i)}=\dfrac{6-8i-3i+4i^2}{-25}=\dfrac{6-11i+4(-1)}{-25}=\dfrac{6-4-11i}{-25}=\dfrac{2-11i}{-25}=\dfrac{-2+11i}{25}$.

$z=\dfrac{-2+11i}{25}$ యొక్క సంయుగ్మం $\overline{z}=\dfrac{-2-11i}{25}$

---

12. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ యొక్క వ్యాప్తిని కనుగొనుము

Sol: $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

$\Rightarrow y(x^2-x+1)=x^2+x+1$

$\Rightarrow yx^2-yx+y=x^2+x+1$

$\Rightarrow yx^2-x^2-yx-x+y-1=0$

$\Rightarrow x^2(y-1)-x(y+1)+(y-1)=0$

$\Rightarrow (y-1)x^2-(y+1)x+(y-1)=0$ ......(1)

(1) x లో వర్గసమీకరణం మరియు దాని మూలాలు వాస్తవం.

$\therefore \Delta=b^2-4ac\ge 0$

$\Rightarrow (y+1)^2-4(y-1)^2\ge 0$

$\Rightarrow (y+1)^2-(2y-2)^2\ge 0$

$\Rightarrow (y+1+2y-2)\big((y+1)-(2y-2)\big)\ge 0$ $\quad\left[\because a^2-b^2=(a+b)(a-b)\right]$

$\Rightarrow (3y-1)(3-y)\ge 0\Rightarrow (3y-1)(y-3)\le 0$

$\Rightarrow y\in\left[\dfrac{1}{3},3\right]$ $\quad\therefore$ వ్యాప్తి $=\left[\dfrac{1}{3},3\right]$

13. 1,3,5,7,9 అంకెలను ఉపయోగించి ఏర్పరచగల 4 అంకెల సంఖ్యల మొత్తం కనుక్కోండి.

Sol: మొదటిగా సంఖ్యల మొత్తంలో, 9 అనే అంకె వలన ఏర్పడే సంఖ్యల మొత్తాన్ని కనుగొందాము.

9 ఒకట్ల స్థానములో ఉన్నప్పుడు సంఖ్యల మొత్తంలో 9 యొక్క మొత్తం $\square\,\square\,\square\,\boxed{9} = {}^4P_3 \times 9$

9 పదుల స్థానములో ఉన్నప్పుడు సంఖ్యల మొత్తంలో 9 యొక్క మొత్తం $\square\,\square\,\boxed{9}\,\square = {}^4P_3 \times 90$

9 వందల స్థానములో ఉన్నప్పుడు సంఖ్యల మొత్తంలో 9 యొక్క మొత్తం $\square\,\boxed{9}\,\square\,\square = {}^4P_3 \times 900$

9 వేల స్థానములో ఉన్నప్పుడు సంఖ్యల మొత్తంలో 9 యొక్క మొత్తం $\boxed{9}\,\square\,\square\,\square = {}^4P_3 \times 9000$

$\therefore$అన్ని సంఖ్యల మొత్తములో 9 వలన ఏర్పడే మొత్తం ${}^4P_3 \times (9+90+900+9000)$

$= {}^4P_3 \times 9(1+10+100+1000) = {}^4P_3 \times 9(1111)$ ....(1)

ఇదే విధంగా, అన్ని సంఖ్యల మొత్తంలో 7 వలన ఏర్పడే మొత్తం ${}^4P_3 \times 7(1111)$ ....(2)

అన్ని సంఖ్యల మొత్తంలో 5 వలన ఏర్పడే మొత్తం ${}^4P_3 \times 5(1111)$ ....(3)

అన్ని సంఖ్యల మొత్తంలో 3 వలన ఏర్పడే మొత్తం${}^4P_3 \times 3(1111)$ ....(4)

అన్ని సంఖ్యల మొత్తంలో 1 వలన ఏర్పడే మొత్తం ${}^4P_3 \times 1(1111)$ ....(5)

(1), (2), (3), (4), (5),ల నుండి 4 అంకెల సంఖ్య మొత్తం. ${}^4P_3 \times 1111(9+7+5+3+1)$

$= (4 \times 3 \times 2) \times 1111\ (25) = 24 \times 25 \times 1111 = 6,66,600$

---

14. ఏడుమంది బాట్స్‌మెన్, ఆరుగురు బౌలర్లనుంచి కనీసం ఐదుగురు బౌలర్లు ఉన్న పదకొండు మంది క్రికెట్ టీమును ఎన్ని రకాలుగా ఏర్పరచవచ్చు ?

Sol: కనీసం ఐదుగురు బౌలర్లు ఉన్న పదకొండు మంది క్రికెట్ టీమును క్రింద చూపిన విధాలుగా ఎంచుకోవచ్చు.

బౌలర్లు(6)	బాట్స్‌మెన్(7)	ఎంచుకునే విధానాలు
5	6	${}^6C_5 \times {}^7C_6 = 6 \times 7 = 42$
6	5	${}^6C_6 \times {}^7C_5 = 1 \times 21 = 21$

$\because {}^7C_5 = {}^7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$

$\therefore$ క్రికెట్ టీమును ఎంచుకునే విధానాలు $= 42 + 21 = 63$

15. $\dfrac{5x+6}{(2+x)(1-x)}$ **ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.**

Sol: $\dfrac{5x+6}{(2+x)(1-x)}=\dfrac{A}{2+x}+\dfrac{B}{1-x}=\dfrac{A(1-x)+B(2+x)}{(2+x)(1-x)}$

$\Rightarrow A(1-x) + B(2+x) = 5x + 6$ ....**(1)**

$x = -2$ ను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా $A(1-(-2)) + B(2-2) = 5(-2) + 6 \Rightarrow 3A=-4 \Rightarrow A=-\dfrac{4}{3}$

$x = 1$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా $B(2+1) = 5 + 6 \Rightarrow 3B=11 \Rightarrow B=\dfrac{11}{3}$

$\therefore \dfrac{5x+6}{(2+x)(1-x)}=\dfrac{A}{2+x}+\dfrac{B}{1-x}=-\dfrac{4}{3(2+x)}+\dfrac{11}{3(1-x)}$

---

16. A, B అనే రెండు ఘటనలు $P(A\cup B) = 0.65$ మరియు $P(A\cap B) = 0.15$, అయ్యేటట్లుండే $P(A^c)+P(B^c)$ విలువను కనుక్కోండి.

Sol: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ [సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతం నుండి]

$\Rightarrow P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)=0.65+0.15=0.8$

$\therefore P(A^c)+P(B^c) = [1-P(A)]+[1-P(B)] = 2-[P(A)+P(B)] = 2-0.8 = 1.2$

---

17. కలనగణితంలోని ఒక సమస్యను ఇద్దరు విద్యార్థులు A, B లకు ఇస్తే వారు సమస్యను సాధించే సంభావ్యతలు వరసగా 1/3,1/4. వారిద్దరూ స్వతంత్రంగా సమస్యను సాధించటానికి ప్రయత్నిస్తే, ఆ సమస్యను సాధింపబడే సంభావ్యత ఎంత?

Sol: A, B లతో సమస్య సాధింపబడే ఘటనలు వరుసగా A, B లు అనుకుందాం. $\Rightarrow P(A)=\dfrac{1}{3}, P(B)=\dfrac{1}{4}$

$\therefore P(\bar{A})=1-P(A)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3};\quad P(\bar{B})=1-P(B)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

$\therefore P(A\cup B)=1-P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-P(\bar{A}).P(\bar{B})=1-\left(\dfrac{2}{\cancel{3}}\right)\left(\dfrac{\cancel{3}}{4}\right)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

సెక్షన్-సి

18. $\left(\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}}{1+\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}}\right)^{8/3}=-1$ అని చూపండి.

Sol: $z=\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}$ అనుకొనుము

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}}=\frac{1\left(\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{\left(\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}\right)}{\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}}=\left(\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\therefore \text{G.E} = \left(\frac{1+\left(\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}\right)}{1+\left(\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}\right)}\right)^{8/3}=\left(\frac{1+z}{1+\frac{1}{z}}\right)^{8/3}=\left(\frac{\cancel{1+z}}{\frac{\cancel{z+1}}{z}}\right)^{8/3}=(z)^{8/3}$$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}\right)^{8/3}=\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right]^{8/3}$$

$$=\left(\cos\frac{4\pi-\pi}{8}+i\sin\frac{4\pi-\pi}{8}\right)^{8/3}=\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)^{8/3}=\left(\cos\frac{\cancel{8}}{\cancel{3}}\left(\frac{\cancel{3}\pi}{\cancel{8}}\right)+i\sin\frac{\cancel{8}}{\cancel{3}}\left(\frac{\cancel{3}\pi}{\cancel{8}}\right)\right)$$

$$=\cos\pi+i\sin\pi=\cos180^\circ+i\sin180^\circ=-1+i(0)=-1$$

19. $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$ **ను సాధించుము.**

Sol: ఇచ్చిన సమీకరణం తరగతి $n = 4$ సరి సంఖ్య మరియు $a_k = a_{n-k}\ \forall\ k = 0, 1, 2, 3, 4$

కావున ఇచ్చిన సమీకరణం 'వ్యుత్క్రమ సమీకరణ ప్రామాణిక రూపం' లో కలదు.

ఇచ్చిన సమీకరణాన్ని x^2 తో భాగించగా $x^2 - 10x + 26 - \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0 \quad ....(1)$$

$x + \frac{1}{x} = y$ అయిన $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ $\quad \left[\because x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2\right]$

$$\therefore (1) \Rightarrow (y^2 - 2) - 10y + 26 = 0 \Rightarrow y^2 - 10y + 24 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - 6y - 4y + 24 = 0$$

$$\Rightarrow y(y - 6) - 4(y - 6) = 0$$

$$\Rightarrow (y - 4)(y - 6) = 0$$

$$\Rightarrow y - 4 = 0 \text{ (or) } y - 6 = 0 \Rightarrow y = 4 \text{ (or) } y = 6$$

$y = 4$ అయిన $x + \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow x^2 + 1 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(1)}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$y=6$ అయిన $x + \frac{1}{x} = 6 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = 6 \Rightarrow x^2 + 1 = 6x \Rightarrow x^2 - 6x + 1 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$\therefore$ దత్త సమీకరణం మూలాలు $2 \pm \sqrt{3}, 3 \pm 2\sqrt{2}$

20. **$(x+a)^n$ అనే విస్తరణలో బేసిపదాల మొత్తము P మరియు సరిపదాల మొత్తముQ అయిన ఈ క్రింది వాటిని నిరూపించుము.**

(i) $P^2 - Q^2 = (x^2-a^2)^n$ (ii) $4PQ = (x+a)^{2n} - (x-a)^{2n}$

Sol: $(x+a)^n = {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}a + {}^nC_2x^{n-2}a^2 + {}^nC_3x^{n-3}a^3 + \dots\dots + {}^nC_na^n$ అని మనకు తెలుసు

$$= \left({}^nC_0x^n + {}^nC_2x^{n-2}a^2 + {}^nC_4x^{n-4}a^4 + \dots\dots\right) + \left({}^nC_1x^{n-1}a + {}^nC_3x^{n-3}a^3 + {}^nC_5x^{n-5}a^5 + \dots\right) = P + Q$$

Also, $(x-a)^n = {}^nC_0x^n - {}^nC_1x^{n-1}a + {}^nC_2x^{n-2}a^2 - {}^nC_3x^{n-3}a^3 + \dots\dots + {}^nC_n(-1)^na^n$

$$= \left({}^nC_0x^n + {}^nC_2x^{n-2}a^2 + {}^nC_4x^{n-4}a^4 + \dots\dots\right) - \left({}^nC_1x^{n-1}a + {}^nC_3x^{n-3}a^3 + {}^nC_5x^{n-5}a^5 + \dots\right) = P - Q$$

i) $P^2-Q^2 = (P+Q)(P-Q) = (x+a)^n(x-a)^n = [(x+a)(x-a)]^n = (x^2-a^2)^n$

ii) $4PQ = (P+Q)^2 - (P-Q)^2 = [(x+a)^n]^2 - [(x-a)^n]^2 = (x+a)^{2n} - (x-a)^{2n}$

---

21. **$x = \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \frac{1.3.5.7}{3.6.9.12} + \dots\dots$ అయిన $9x^2 + 24x = 11$ అని నిరూపించండి.**

Sol: దత్తాంశం నుండి $x = \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \frac{1.3.5.7}{3.6.9.12} + \dots\dots = \frac{1.3}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1.3.5.7}{4!}\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots$

ఇరువైపులా $1+\frac{1}{3}$ ను కలుపగా $1+\frac{1}{3}+x = 1+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1.3}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots\dots$

పై శ్రేణిని $1+\frac{p}{1!}\left(\frac{y}{q}\right) + \frac{p(p+q)}{2!}\left(\frac{y}{q}\right)^2 + \dots\dots = (1-y)^{-p/q}$ తో పోల్చగా

$p=1, p+q=3 \Rightarrow 1+q=3 \Rightarrow q=2$ మరియు $\frac{y}{q} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{q}{3} = \frac{2}{3}$

$$\therefore 1+\frac{1}{3}+x = (1-y)^{-p/q} = \left(1-\frac{2}{3}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2} = (3)^{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}+x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3}-\frac{4}{3} = \frac{3\sqrt{3}-4}{3} = \frac{3\sqrt{3}-4}{3} \Rightarrow 3x = 3\sqrt{3}-4 \Rightarrow 3x+4 = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow (3x+4)^2 = (3\sqrt{3})^2 \Rightarrow 9x^2+24x+16 = 27 \Rightarrow 9x^2+24x = 11$$

22. ఒక అవిచ్ఛిన్న పౌనఃపున్య విభాజనానికి, మధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనం కనుక్కోండి.

అమ్మకాలు(వేల రూ॥లలో)	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
కంపెనీల సంఖ్య	5	15	25	30	20	5

Sol:

అమ్మకాలు	కంపెనీల సంఖ్య (f_i)	తరగతి అంతరం మధ్యబిందువు(x_i)	$f_i x_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
40-50	5	45	225	26	130
50-60	15	55	825	16	240
60-70	25	65	1625	6	150
70-80	30	75	2250	4	120
80-90	20	85	1700	14	280
90-100	5	95	475	24	120
	$\Sigma f_i = 100 = N$		$\Sigma f_i x_i = 7100$		$\Sigma f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert = 1040$

ఇక్కడ $N = \Sigma f_i = 100$ మరియు అంకమధ్యమము $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{N} = \dfrac{7100}{100} = 71$

$\therefore$ మధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనం M.D$= \dfrac{\Sigma f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{N} = \dfrac{1040}{100} = 10.4$

---

23. సంభావ్యత మీద సంకలన సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించుము.

Sol: **ప్రవచనం: E_1, E_2లు శాంపుల్ ఆవరణము S లోని రెండు ఘటనలు అయిన**

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

నిరూపణ: Case (i): $E_1 \cap E_2 = \phi$ అయినప్పుడు

$E_1 \cap E_2 = \phi \Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = 0$

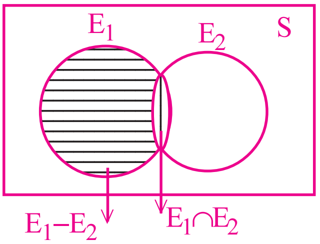
$\therefore P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ [$\because$ సమ్మేళనపు స్వీకృతము నుండి]

$= P(E_1) + P(E_2) - 0 = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

Case (ii) : $E_1 \cap E_2 \neq \phi$ అయినప్పుడు

$E_1 \cup E_2$ ను $E_1 - E_2$, E_2 అనే పరస్పర వివర్జిత ఘటనల సమ్మేళనముగా వ్యక్తపరచ వచ్చును.

$\therefore P(E_1 \cup E_2) = P[(E_1 - E_2) \cup E_2] = P(E_1 - E_2) + P(E_2)$ ....(1)



Eమరియు, E_1 ను $E_1 - E_2$, $E_1 \cap E_2$ అనే పరస్పర వివర్జిత ఘటనల సమ్మేళనముగా వ్యక్తపరచ వచ్చును.

$\therefore P(E_1) = P[(E_1 - E_2) \cup (E_1 \cap E_2)] = P(E_1 - E_2) + P(E_1 \cap E_2)$

$\Rightarrow P(E_1 - E_2) = P(E_1) - P(E_1 \cap E_2)$

$\therefore$ (1)నుండి, $P(E_1 \cup E_2) = [P(E_1) - P(E_1 \cap E_2)] + P(E_2)$

$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$. కావున నిరూపించబడినది.

24. **ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి X వ్యాప్తి {0,1,2}మరియు$P(X=0)=3c^3, P(X=1)=4c-10c^2, P(X=2)=5c-1$ ఇక్కడ 'c' స్థిరము అని ఇస్తే (i) c (ii) $P(0<x<3)$ (iii) $P(1<x\le2)$ (iv) $P(x<1)$ లను కనుక్కోండి.**

Sol: i) $\Sigma P(X = xi) = 1$ అని మనకు తెలుసు

$$\Rightarrow 3c^3 + 4c - 10c^2 + 5c - 1 = 1 \Rightarrow 3c^3 - 10c^2 + 9c - 1 = 1 \Rightarrow 3c^3 - 10c^2 + 9c - 2 = 0$$

ఇక్కడ, గుణకాల మొత్తము 3–10+9–2=0. కాబట్టి పై సమీకరణానికి 1 ఒక మూలం అగును.

సింథటిక్ భాగహార పద్ధతి ప్రకారం,

1	3	–10	9	–2
	0	3	–7	2
	3	–7	2	0

$$\therefore 3c^3 - 10c^2 + 9c - 2 = (c-1)(3c^2 - 7c + 2) = (c-1)[3c^2 - 6c - c + 2]$$

$$= (c-1)[3c(c-2) - 1(c-2)] = (c-1)(c-2)(3c-1)$$

ఇప్పుడు, $3c^3 - 10c^2 + 9c - 2 = 0 \Rightarrow (c-1)(c-2)(3c-1) = 0 \Rightarrow c = 1, 2, \frac{1}{3}$

$\therefore$ c = 1/3 మాత్రమే సాధ్యం. $[\because 0 \le p \le 1]$

ii) $P(0 < X < 3) = P(X=1) + P(X=2) = (4c - 10c^2) + (5c - 1) = 9c - 10c^2 - 1$

$$= 9\left(\frac{1}{3}\right) - 10\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = \frac{9}{3} - \frac{10}{9} - 1 = 3 - \frac{10}{9} - 1 = 2 - \frac{10}{9} = \frac{8}{9}$$

iii) $P(1 < x \le 2) = P(X=2) = 5c - 1 = 5\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$

iv) $P(X < 1) = P(X=0) = 3c^3 = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3.\frac{1}{27} = \frac{1}{9}$