Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH -2024 (TS)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2024(TS)

గణిత-శాస్త్రం – 1B

Time : 3 Hours | Max.Marks : 75

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: $10 \times 2 = 20$

1. $(-5, 1), (5, 5), (10, 7)$ బిందువులు సరేఖీయాలని చూపి వాటిని కలిగి ఉండే సరళరేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి.
2. $5x - 3y - 4 = 0,\ 10x - 6y - 9 = 0$ అనే సమాంతర రేఖల మధ్య దూరము కనుగొనుము.
3. $(2,4,-1), (3,6,-1), (4,5,1)$ లు ఒక సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వరుస శీర్షాలైన దాని నాల్గవ శీర్షమును కనుగొనుము.
4. $x+2y+2z-5=0$, $3x+3y+2z-8=0$ అనే తలముల మధ్య కోణమును కనుగొనుము.
5. $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{1+x} - 1}$ ను గణించండి.
6. $\underset{x\to \pi/2}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\cos x}{\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)}$ ను గణించండి.
7. $f(x)=2x^2+3x-5$ అయిన $f'(0)+3f'(-1)=0$ అని నిరూపించండి.
8. x దృష్ట్యా $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ యొక్క అవకలనిని కనుగొనుము.
9. యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువను కనుక్కోండి.
10. $y=f(x)=x^2+4$ అనే ప్రమేయమునకు $[-3,3]$ అనే అంతరంలో రోల్స్ సిద్ధాంతమును సరిచూడుము.

సెక్షన్-బి

II. ఈ క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 4 = 20$

11. 'P' అనే బిందువు నుండి $(2,3)$ మరియు $(2,-3)$ అనే బిందువులకు గల దూరాల నిష్పత్తి $2:3$ అయిన P యొక్క బిందుపథ సమీకరణము కనుగొనుము.
12. అక్షాలను α కోణంతో భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ రూపాంతర సమీకరణం కనుక్కోండి.
13. $4x-y+7=0,\ kx-5y-9=0$ అనే సరళరేఖల మధ్య కోణం 45^o అయిన k విలువ కనుగొనుము.
14. $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$ గణించండి.
15. ప్రాథమిక సూత్రాన్ని ఉపయోగించి $\cot x$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.
16. $y = b\sin\dfrac{x}{a}$ వక్రం పై ఏదైనా బిందువు వద్ద ఉపస్పర్శ ఖండం, ఉపలంబ ఖండాలను కనుక్కోండి.
17. ఒక సమఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం 8 క్యూబిక్ సెం.మీ/సె. చొప్పున పెరుగుచున్నది. భుజం పొడవు 12 సెం.మీగా ఉన్నప్పుడు ఉపరితల వైశాల్యం పెరిగే రేటును కనుగొనుము.

సెక్షన్-సి

III. ఈ క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 7 = 35$

18. $3x+4y=7$ రేఖకు సమాంతరంగా ఉంటూ $x-2y-3=0,\ x+3y-6=0$ సరళరేఖల ఖండన బిందువు గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.
19. $lx+my+n=0$ అనే సరళరేఖ మరియు $(lx+my)^2-3(mx-ly)^2=0$ అనే సరళరేఖాయుగ్మంతో ఒక సమబాహు త్రిభుజం ఏర్పడునని చూపుము. మరియు దాని వైశాల్యం $\dfrac{n^2}{\sqrt{3}(l^2+m^2)}$ చ.యూ. అని చూపుము.
20. $x^2+y^2=a^2$ అనే వృత్తంనకు $lx+my=1$ అనే జ్యా అవృత్త కేంద్రం వద్ద లంబకోణం చేయు నియమమును రాబట్టుము.
21. సమాంతరంగా లేని రెండు రేఖల దిక్ సంఖ్యలు $3l+m+5n=0,\ 6mn-2nl+5lm=0$ సమీకరణాలను తృప్తి పరిస్తే, వాటి మధ్య కోణాన్ని కనుగొనుము.
22. $y = x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$ అయిన $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{a^2+x^2}$ అని చూపండి.
23. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ వక్రంపై ఏదైనా బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ నిరూపకాక్షాలను A, B బిందువులలో ఖండిస్తే, AB పొడవు స్థిరమని చూపండి.
24. 30 సెం.మీ x 80 సెం.మీ కొలతలుగా ఉండే ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారపు రేకు ముక్క నాలుగు మూలల నుంచి భుజంగా ఉండే చతురస్రాకార ముక్కలను కత్తిరించి మిగిలిన రేకును మడిచి మూతలేని పెట్టెను తయారు చేశారు. ఆ పెట్టె ఘనపరిమాణం గరిష్ఠం అయితే x ఎంత?

IPE TS MARCH-2024
SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. (–5, 1), (5, 5), (10, 7) అనే బిందువులు సరేఖీయములని చూపండి. మరియు వాటిని కలిగి ఉన్న సరళరేఖ సమీకరణం కనుగొనుము.

Sol: A = (–5, 1), B=(5, 5), C=(10, 7) అనుకొనుము.

A(–5, 1) , B(5, 5) లు బిందువుల గుండా పోవు సరళరేఖ వాలు $m=\frac{5-1}{5+5}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

A(–5, 1) గుండా పోవుచూ వాలు 2/5 గా గల సరళరేఖ సమీకరణం

$$y-1=\frac{2}{5}(x+5)\Rightarrow 5(y-1)=2(x+5)\Rightarrow 2x-5y+15=0 \quad ......(1)$$

C(10, 7) యొక్క నిరూపకాలను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా, 2(10) –5(7)+15= 20–35+15=35–35=0

ఇక్కడ AB సమీకరణమును C తృప్తిపరుచుచున్నది. కావున A,B,C లు సరేఖీయాలు.

కావున (1) అనునది కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం

---

2. 5x–3y–4=0,10x–6y–9=0 సమాంతర రేఖల మధ్య దూరం కనుగొనుము.

Sol: • 5x–3y–4=0 ను ఇలా వ్రాయవచ్చు. 10x–6y–8 = 0 ....(1)

•మరొక రేఖ 10x–6y–9 = 0 ......(2)

•∴(1) & (2) సమాంతర రేఖల మధ్య దూరం

$$\star\ \frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-8+9|}{\sqrt{10^2+6^2}}=\frac{|1|}{\sqrt{100+36}}=\frac{1}{\sqrt{136}}$$

---

3. (2,4,–1), (3,6,–1), (4,5,1) లు ఒక సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క వరుస శీర్షాలైన దాని నాల్గవ శీర్షమును కనుగొనుము.

Sol: •A=(2,4,–1), B=(3,6,–1), C=(4,5,1) మరియు నాల్గవ శీర్షము D=(a,b,c)

•సమాంతర చతుర్భుజం ABCD లో,

⋆AC యొక్క మధ్య బిందువు = BD యొక్క మధ్య బిందువు

$$\star\ \Rightarrow\left(\frac{2+4}{2},\frac{4+5}{2},\frac{-1+1}{2}\right)=\left(\frac{3+a}{2},\frac{6+b}{2},\frac{-1+c}{2}\right)$$

• $\Rightarrow\frac{3+a}{\cancel{2}}=\frac{6}{\cancel{2}}\Rightarrow a+3=6\Rightarrow a=6-3=3;$

• $\frac{6+b}{\cancel{2}}=\frac{9}{\cancel{2}}\Rightarrow b+6=9\Rightarrow b=9-6=3;$

• $\frac{-1+c}{2}=0\Rightarrow c-1=0\Rightarrow c=1$. కావున నాల్గవ శీర్షము D=(3,3,1)

4. **$4x-4y+2z+5=0$ అనే తలము యొక్క సమీకరణంను అంతరఖండరూపంలో వ్రాయుము.**

Sol: ఇచ్చిన తలం యొక్క సమీకరణం $4x-4y+2z+5=0 \Rightarrow 4x-4y+2z=-5$

$\Rightarrow \frac{4x}{-5}+\frac{-4y}{-5}+\frac{2z}{-5}=1 \Rightarrow \frac{x}{\left(\frac{-5}{4}\right)}+\frac{y}{\left(\frac{5}{4}\right)}+\frac{z}{\left(\frac{-5}{2}\right)}=1$ ఇది $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ అంతరఖండం రూపంలో ఉంది.

---

5. **$\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{e^x-1}{\sqrt{1+x}-1}$ ను గణించుము.**

Sol: $$\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{e^x-1}{\sqrt{1+x}-1} = \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}\right)$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{e^x-1}{x}. \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} = 1. \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)} = \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{1+x-1} = \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{x}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} (\sqrt{1+x}+1) = \sqrt{1+0}+1 = 1+1 = 2$$

---

6. **$\underset{x\to \pi/2}{\text{Lt}} \frac{\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$ ను గణించుము.**

Sol: $x-\frac{\pi}{2}=y$ అయిన $x=\frac{\pi}{2}+y$ and $x\to\frac{\pi}{2} \Rightarrow y\to 0$

$$\therefore \underset{x\to \pi/2}{\text{Lt}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \underset{y\to 0}{\text{Lt}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right)}{y} = \underset{y\to 0}{\text{Lt}} \frac{-\sin y}{y} = -1$$

---

7. **$f(x)=2x^2+3x-5$ అయిన $f'(0)+3f'(-1)=0$ అని నిరూపించండి.**

Sol: దత్తాంశం నుండి $f(x)=2x^2+3x-5 \Rightarrow f'(x)=4x+3$

అప్పుడు $f'(0)=0+3=3$ మరియు $f'(-1)=-4+3=-1$

$\therefore f'(0)+3f'(-1)=3+3(-1)=3-3=0$

8. $\mathbf{Sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)}$ **యొక్క అవకలనిని కనుగొనుము.**

Sol: $x = \tan\theta$ అని తీసుకొనగా $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}x$

$$\therefore \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$= \mathrm{Sin}^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta = 2(\mathrm{Tan}^{-1}x)\ [\because x = \tan\theta \Rightarrow \theta = \mathrm{Tan}^{-1}x]$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(2\mathrm{Tan}^{-1}x) = 2\frac{d}{dx}\mathrm{Tan}^{-1}x = 2\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{2}{1+x^2}$$

---

9. $\mathbf{\sqrt[3]{65}}$ **యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువను కనుక్కోండి.**

Sol: దత్తాంశం నుండి $\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{64+1}$

$\therefore$ తెలిసిన విలువ $x = 64$ మరియు $\Delta x = 1$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

సూత్రం: $f(x+\Delta x) = [f(x)+f'(x)\Delta x]_{\text{తెలిసిన } x \text{ వద్ద}}$

$$\therefore \sqrt[3]{65} \cong \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3x^{2/3}}\Delta x = \sqrt[3]{64} + \frac{1}{3(64)^{2/3}}(1) = 4 + \frac{1}{3(4^3)^{\frac{2}{3}}}(1) = 4 + \frac{1}{3(4^2)} = 4 + \frac{1}{3(16)}$$

$$= 4 + \frac{1}{48} = \frac{192+1}{48} = \frac{193}{48} = 4.0208$$

---

10. $\mathbf{y = f(x) = x^2+4}$ **అనే ప్రమేయమునకు [–3,3] అనే అంతరంలో రోల్స్ సిద్ధాంతమును సరిచూడుము.**

Sol : • దత్తాంశం నుండి $f(x) = x^2+4 \Rightarrow f'(x) = 2x$

• $f(x)$ అనునది (i) $[-3,3]$ మీద అవిచ్ఛిన్నము

• (ii) $(-3,3)$ లో అవకలనీయము

★(iii) $f(-3) = (-3)^2+4 = 9+4 = 13$; $f(3) = 3^2+4 = 9+4 = 13$

• $\Rightarrow f(-3) = f(3)$

★కావున రోల్స్ సిద్ధాంతము నుండి, $f'(c) = 0$

$\Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0$

★ $\therefore c = 0 \in (-3,3)$.

•కావున రోల్స్ సిద్ధాంతము సరిచూడబడినది.

సెక్షన్-బి

11. 'P' అనే బిందువు నుండి (2,3) మరియు (2,–3) అనే బిందువులకు గల దూరాల నిష్పత్తి 2:3 అయిన P యొక్క బిందుపథ సమీకరణము కనుగొనుము.

Sol: • A = (2,3), B = (2,–3) లు దత్త బిందువులు. P(x,y) బిందుపథ బిందువు.

★దత్త నియమం నుండి : $\frac{PA}{PB}=\frac{2}{3} \Rightarrow 3PA = 2PB \Rightarrow 9PA^2 = 4PB^2$

★ $\Rightarrow 9[(x-2)^2+(y-3)^2] = 4[(x-2)^2+(y+3)^2]$

• $\Rightarrow 9[(x^2+4-4x)+(y^2+9-6y)] = 4[(x^2+4-4x)+(y^2+9+6y)]$

• $\Rightarrow 9x^2 \cancel{+36} - 36x + 9y^2 + 81 - 54y = 4x^2 + 16 - 16x + 4y^2 \cancel{+36} + 24y$

• $\Rightarrow 9x^2-4x^2+9y^2-4y^2-36x+16x-54y-24y+81-16 = 0 \Rightarrow 5x^2+5y^2-20x-78y+65 = 0$

• $\therefore$ P(x,y) బిందుపథం $5x^2+5y^2-20x-78y+65 = 0$.

---

12. అక్షాలను α కోణంతో భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ రూపాంతర సమీకరణం కనుక్కోండి.

Sol: • దత్త మూల సమీకరణం $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$........(1)

• భ్రమణ పరివర్తన కోణం $\theta=\alpha$, అయిన

★ $x=X\cos\theta-Y\sin\theta \Rightarrow x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha$

$y=Y\cos\theta+X\sin\theta \Rightarrow y=Y\cos\alpha+X\sin\alpha$

• (1) నుండి, రూపాంతర సమీకరణం

• $(X\cos\alpha-Y\sin\alpha)\cos\alpha+(Y\cos\alpha+X\sin\alpha)\sin\alpha=p$

• $\Rightarrow X\cos^2\alpha \cancel{-Y\sin\alpha\cos\alpha} \cancel{+Y\cos\alpha\sin\alpha} + X\sin^2\alpha=p$

• $\Rightarrow X(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=p \Rightarrow X(1)=p \Rightarrow X=p$

కావున కావలసిన రూపాంతర సమీకరణం $X=p$

13. **4x–y+7=0, kx–5y–9=0 అనే సరళరేఖల మధ్య కోణం 45^o అయిన k విలువ కనుగొనుము.**

Sol : •దత్త సరళరేఖ 4x–y+7=0. దాని వాలు $m_1=\frac{-a}{b}=\frac{-4}{-1}=4$

•మరో రేఖ kx–5y–9=0 దీని వాలు $m_2=\frac{-a}{b}=\frac{-k}{-5}=\frac{k}{5}$

★సరళరేఖల మధ్య కోణం 45^o అయిన $\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right| \Rightarrow \tan 45^o=\left|\frac{4-(k/5)}{1+4(k/5)}\right|$

★ $\Rightarrow 1=\left|\frac{20-k}{5+4k}\right| \Rightarrow |5+4k|=|20-k| \Rightarrow 5+4k=\pm(20-k) \Rightarrow 5+4k=20-k \Rightarrow 5k=15 \Rightarrow k=3$

•(or) $5+4k=-(20-k)=k-20 \Rightarrow 3k=-25 \Rightarrow k=-25/3$ $\quad\therefore$ k=3 లేదా –25/3

---

14. $\underset{x\to 0}{Lt}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$ **ను గణించుము.**

Sol: $\underset{x\to 0}{Lt}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$

$$=\underset{x\to 0}{Lt}\frac{2\sin\left(\frac{ax+bx}{2}\right)\sin\left(\frac{bx-ax}{2}\right)}{x^2} \qquad \left(\because \cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}\right)$$

$$=2\underset{x\to 0}{Lt}\left(\frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)x}{x}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)x}{x}\right)=2\left(\underset{x\to 0}{Lt}\frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)x}{x}\right)\left(\underset{x\to 0}{Lt}\frac{\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)x}{x}\right)$$

$$=2\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)=\frac{b^2-a^2}{2} \qquad \left(\because \underset{x\to 0}{Lt}\frac{\sin kx}{x}=k\right)$$

15. **ప్రాథమిక సూత్రాన్ని ఉపయోగించి cotx యొక్క అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.**

Sol: f(x) = cotx అనుకుంటే f(x+h) = cot(x+h)

ప్రాథమిక సూత్రం నుండి $f'(x) = \underset{h\to 0}{Lt}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\frac{\cot(x+h)-\cot(x)}{h} = \underset{h\to 0}{Lt}\frac{1}{h}\left[\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)}-\frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\frac{1}{h}\left[\frac{\cos(x+h).\sin x-\sin(x+h).\cos x}{\sin(x+h).\sin x}\right]$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\frac{1}{h}\left[\frac{-\sin((x+h)-x)}{\sin(x+h)\sin x}\right] \qquad [\because \cos A\sin B-\sin A\cos B=-\sin(A-B)]$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt}\frac{1}{h}\left[\frac{-\sinh}{\sin(x+h)\sin x}\right] = \underset{h\to 0}{Lt}\left(\frac{-\sinh}{h}\right).\underset{h\to 0}{Lt}\frac{1}{\sin(x+h).\sin x}$$

$$= -1\left(\frac{1}{\sin x.\sin x}\right) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

---

16. **$y = b\sin\left(\dfrac{x}{a}\right)$ వక్రం పై ఏదైనా బిందువు వద్ద ఉన్న ఉపస్పర్శఖండం, ఉపలంబ ఖండాలను కనుక్కోండి.**

Sol: • దత్త వక్రం పై బిందువు P(x,y) అనుకొనుము.

★ $y = b\sin\left(\dfrac{x}{a}\right)$ను x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా $\dfrac{dy}{dx} = b\left(\cos\dfrac{x}{a}\right)\dfrac{1}{a}$ ∴ వాలు $m = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_P = \dfrac{b}{a}\cos\left(\dfrac{x}{a}\right)$

★(i) **ఉపస్పర్శఖండం పొడవు**$= \left|\dfrac{y}{m}\right| = \left|\dfrac{y}{\frac{b}{a}\cos\frac{x}{a}}\right| = \left|\dfrac{b\sin\left(\frac{x}{a}\right)}{\frac{b}{a}\cos\left(\frac{x}{a}\right)}\right| = \left|\dfrac{b\sin\left(\frac{x}{a}\right)}{\frac{b}{a}\cos\left(\frac{x}{a}\right)}\right| = \left|a\tan\dfrac{x}{a}\right|$

★(ii)**ఉపలంబఖండం పొడవు**$= |ym| = \left|b\sin\left(\dfrac{x}{a}\right)\dfrac{b}{a}\cos\left(\dfrac{x}{a}\right)\right|$

★ $= \left|\dfrac{b^2}{a}\dfrac{1}{2}2\sin\left(\dfrac{x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{x}{a}\right)\right| = \left|\dfrac{b^2}{2a}\sin\left(\dfrac{2x}{a}\right)\right|$ $[\because \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta]$

17. **ఒక సమఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం 8 క్యూబిక్ సెం.మీ/సె. చొప్పున పెరుగుచున్నది. భుజం పొడవు 12 సెం.మీ గా ఉన్నప్పుడు ఉపరితల వైశాల్యం పెరిగే రేటును కనుగొనుము.**

Sol : సమఘనము యొక్క భుజము పొడవు$=x$

ఘనపరిమాణం$=V$ మరియు ఉపరితల వైశాల్యం$=S$ అనుకొనుము

దత్తాంశం నుండి $\frac{dV}{dt}=8$ క్యూబిక్ సెం.మీ/సె. మరియు $x=12$ సెం.మీ

సమఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం $V=x^3$

't' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా $\frac{dV}{dt}=3x^2\frac{dx}{dt} \Rightarrow 8=3x^2\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{8}{3x^2}$

ఉపరితల వైశాల్యం $S=6x^2$

't' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా $\frac{dS}{dt}=12x\frac{dx}{dt}=\cancel{12}\,\cancel{x}\left(\frac{8}{\cancel{3}\,\cancel{x^2}}\right)=\frac{32}{x}=\frac{\cancel{32}}{\cancel{12}}=\frac{8}{3}$ సెం.మీ^{2}/సె.

సెక్షన్-సి

18. 3x+4y=7 రేఖకు సమాంతరంగా ఉంటూ x–2y–3=0, x+3y–6=0 సరళరేఖల ఖండన బిందువు గుండా పోయే సరళరేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి.

Sol: •దత్త రేఖ 3x+4y=7 .

•దీని వాలు $m=\frac{-a}{b}=\frac{-3}{4}$

•దత్తాంశం నుండి x–2y–3=0..........(1)

x+3y–6=0.......(2)

•(1)&(2)లను సాధించగా ఖండన బిందువు P వచ్చును.

• $\Rightarrow\frac{x}{(-2)(-6)-3(-3)}=\frac{y}{(-3)(1)-(-6)1}=\frac{1}{1(3)-1(-2)}$

• $\Rightarrow\frac{x}{12+9}=\frac{y}{-3+6}=\frac{1}{3+2}$

• $\Rightarrow\frac{x}{21}=\frac{y}{3}=\frac{1}{5}\Rightarrow x=\frac{21}{5},y=\frac{3}{5}$

•ఖండన బిందువు $P\left(\frac{21}{5},\frac{3}{5}\right)$

★ $\therefore P\left(\frac{21}{5},\frac{3}{5}\right)$బిందువు గుండా పోతూ,వాలు $\frac{-3}{4}$ గా గల సరళరేఖా సమీకరణం

★ $y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-\frac{3}{5}=\frac{-3}{4}\left(x-\frac{21}{5}\right)$

★ $\Rightarrow\frac{5y-3}{\cancel{5}}=\frac{-3}{4}\left(\frac{5x-21}{\cancel{5}}\right)$

★ $\Rightarrow 4(5y-3)=-3(5x-21)$

• ⇒20y–12=–15x+63⇒15x +20y–12–63=0

• ⇒15x+20y–75=0

• ⇒5(3x+4y–15)=0⇒3x+4y–15=0

19. **$lx+my+n=0$ అనే సరళరేఖ మరియు $(lx+my)^2-3(mx-ly)^2=0$ అనే సరళరేఖాయుగ్మంతో ఒక సమబాహు త్రిభుజం ఏర్పడునని చూపుము. మరియు దాని వైశాల్యం $\frac{n^2}{\sqrt{3}(l^2+m^2)}$ చ.యూ. అని చూపుము.**

Sol : దత్త సరళరేఖాయుగ్మపు సమీకరణం $(lx+my)^2-3(mx-ly)^2=0$

$$\Rightarrow [lx+my+\sqrt{3}(mx-ly)][lx+my-\sqrt{3}(mx-ly)]=0$$

$$\Rightarrow [(l+\sqrt{3}m)x+(-\sqrt{3}l+m)y][(l-\sqrt{3}m)x+(\sqrt{3}l+m)y]=0$$

కావున దత్త సరళరేఖాయుగ్మాన్ని సూచించే రేఖల సమీకరణాలు

$(l+\sqrt{3}m)x+(-\sqrt{3}l+m)y=0$ .....(1); $(l-\sqrt{3}m)x+(\sqrt{3}l+m)y=0$ ....(2)

మరియు దత్త సరళరేఖ $lx+my+n=0$ ......(3)

(1), (3) ల మధ్య కోణం A అయిన $\cos A=\dfrac{l(l+\sqrt{3}m)+m(-\sqrt{3}l+m)}{\sqrt{\left((l+\sqrt{3}m)^2+(-\sqrt{3}l+m)^2\right)(l^2+m^2)}}$

$$=\frac{l^2+\sqrt{3}lm-\sqrt{3}lm+m^2}{\sqrt{\left(l^2+3m^2+2\sqrt{3}lm+3l^2+m^2-2\sqrt{3}lm\right)(l^2+m^2)}}=\frac{l^2+m^2}{\sqrt{(4l^2+4m^2)(l^2+m^2)}}=\frac{l^2+m^2}{2(l^2+m^2)}=\frac{1}{2}\Rightarrow A=60^o$$

(2), (3) ల మధ్య కోణం B అయిన $\cos B=\dfrac{l(l-\sqrt{3}m)+m(\sqrt{3}l+m)}{\sqrt{((l-\sqrt{3}m)^2+(\sqrt{3}l+m)^2)(l^2+m^2)}}$

$$=\frac{l^2-\sqrt{3}lm+\sqrt{3}lm+m^2}{\sqrt{\left(l^2+3m^2-2\sqrt{3}lm+3l^2+m^2+2\sqrt{3}lm\right)(l^2+m^2)}}=\frac{l^2+m^2}{\sqrt{\left(4l^2+4m^2\right)(l^2+m^2)}}=\sqrt{\frac{l^2+m^2}{4(l^2+m^2)}}=\frac{1}{2}\Rightarrow B=60^o$$

(1),(2),(3) లు పరస్పరము జతలుగా ఖండించుకొనును కావున దత్త రేఖల ఖండన బిందువులచే ఒక త్రిభుజం ఏర్పడును.

కావున (1),(2) ల మధ్య కోణం $180^o-(60^o+60^o)=60^o$ $\therefore$ దత్త రేఖలచే ఒక సమబాహు త్రిభుజం ఏర్పడును.

ఆ త్రిభుజపు ఉన్నతి p అనుకొనుము.

$\Rightarrow$ ఆదిబిందువు O(0, 0) నుండి $lx+my+n=0$ నకు గల లంబదూరం $p=\dfrac{|n|}{\sqrt{l^2+m^2}}$

సమబాహు త్రిభుజం వైశాల్యం $=\dfrac{p^2}{\sqrt{3}}=\dfrac{n^2}{\sqrt{3}(l^2+m^2)}$ చ.యూ

20. $2x^2-2xy+3y^2+2x-y-1=0$ వక్రం $x+2y=k$ రేఖల ఖండన బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపే రేఖలు పరస్పరం లంబాలయితే k విలువ కనుక్కోండి.

Sol: • దత్తరేఖ $x+2y=k \Rightarrow \frac{x+2y}{k}=1 \quad ...(1)$

• దత్త వక్రం $2x^2-2xy+3y^2+2x-y-1=0............(2)$

• (1) & (2) ల నుండి సమఘాతీకరణ సమీకరణం

★ $2x^2-2xy+3y^2+2x(1)-y(1)-(1)^2=0$

★ $\Rightarrow 2x^2-2xy+3y^2+2x\left(\frac{x+2y}{k}\right)-y\left(\frac{x+2y}{k}\right)-\frac{(x+2y)^2}{k^2}=0$

★ $\Rightarrow \frac{k^2(2x^2-2xy+3y^2)+k(2x^2+4xy)-k(xy+2y^2)-(x^2+4y^2+4xy)}{k^2}=0$

★ $\Rightarrow k^2(2x^2-2xy+3y^2)+k(2x^2+4xy)-k(xy+2y^2)-(x^2+4y^2+4xy)=0$

★ $\Rightarrow x^2(2k^2+2k-1)+y^2(3k^2-2k-4)+xy(-2k^2+3k-4)=0$

• సరళరేఖాయుగ్మాలు పరస్పర లంబాలు అయితే

★ x^2 గుణకం $+$ y^2 గుణకం $=0$

• $\Rightarrow (2k^2\cancel{+2k}-1)+(3k^2\cancel{-2k}-4)=0 \Rightarrow 5k^2-5=0$

• $\Rightarrow \cancel{5}(k^2-1)=0 \Rightarrow k^2-1=0 \Rightarrow k^2=1 \Rightarrow k=\pm1$

కావున, k విలువ ±1

21. సమాంతరంగా లేని రెండు రేఖల దిక్ సంఖ్యలు $3l+m+5n=0$, $6mn-2nl+5lm=0$ సమీకరణాలను తృప్తి పరిస్తే, వాటి మధ్య కోణాన్ని కనుగొనుము.

Sol: దత్తాంశం నుండి $3l+m+5n=0$

$\Rightarrow m=-3l-5n$ .....(1) , $6mn-2nl+5lm=0$ .....(2)

(1) & (2) లను సాధించగా

$6n(-3l-5n)-2nl+5l(-3l-5n)=0$

$\Rightarrow -18ln-30n^2-2ln-15l^2-25ln=0$

$\Rightarrow -15l^2-45ln-30n^2=0$

$\Rightarrow -15(l^2+3ln+2n^2)=0 \Rightarrow l^2+3ln+2n^2=0$

$\Rightarrow (l+n)(l+2n)=0 \Rightarrow l=-n$ or $l=-2n$

Case (i): (1) లో $l=-n$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$m=-3(-n)-5n=3n-5n=-2n$

$\therefore m=-2n$

$l:m:n=-\cancel{n}:-2\cancel{n}:\cancel{n}$

$=-1:-2:1=1:2:-1$

So, d.r's of $L_1=(a_1,b_1,c_1)=(1,2,-1)$.....(3)

Case (ii): Put $l=-2n$ in (1), then

$m=-3(-2n)-5n=6n-5n=n \therefore m=n$

$l:m:n=-2\cancel{n}:\cancel{n}:\cancel{n}=-2:1:1=2:-1:-1$

L_2 యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $=(a_2,b_2,c_2) = (2,-1,-1)$....(4)

(3), (4) నుండి రేఖల మధ్య కోణం $\cos\theta=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}}$

$$=\frac{|1(2)+2(-1)+(-1)(-1)|}{\sqrt{(1^2+2^2+(-1)^2)(2^2+(-1)^2+(-1)^2)}}=\frac{|\cancel{2}-\cancel{2}+1|}{\sqrt{(6)(6)}}=\frac{1}{\sqrt{36}}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{1}{6}\Rightarrow\theta=\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1}{6}$$

కావున రేఖల మధ్య కోణం $\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{1}{6}$

22. $y = x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$, అయిన $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{a^2+x^2}$ అని చూపండి.

Sol: • దత్తాంశం నుండి $y = x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\log(x+\sqrt{a^2+x^2})$;

• x, దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

★ $\frac{dy}{dx} = \left[x\frac{d}{dx}\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a^2+x^2}\frac{d}{dx}(x)\right] + a^2\left[\frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{a^2+x^2})\right]$

★ $= \left(x\frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}\frac{d}{dx}(a^2+x^2) + (\sqrt{a^2+x^2})(1)\right) + a^2\left(\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\frac{d}{dx}(x+\sqrt{a^2+x^2})\right)$

• $= \left(\frac{x}{\cancel{2}\sqrt{a^2+x^2}}(\cancel{2}x) + \sqrt{a^2+x^2}\right) + \left(\frac{a^2}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\right)\left(1+\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{a^2+x^2}}(\cancel{2}x)\right)$

• $= \left(\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} + \sqrt{a^2+x^2}\right) + \left(\frac{a^2}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$

★ $= \left(\frac{x^2+(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) + \left(\frac{a^2}{\cancel{x+\sqrt{a^2+x^2}}}\right)\left(\frac{\cancel{\sqrt{a^2+x^2}+x}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$

• $= \frac{a^2+2x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$

• $= \frac{a^2+2x^2+a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$

• $= \frac{2a^2+2x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$

• $= \frac{2(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2+x^2}}$

★ $= 2\sqrt{a^2+x^2} \quad [\because \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}]$

$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{a^2+x^2}}$

23. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ వక్రంపై ఏదైనా బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ నిరూపకాక్షాలను A,B బిందువులతో ఖండిస్తే, AB పొడవు స్థిరమని చూపండి.

Sol: ★ దత్త వక్రానికి పరామితీయ బిందువు $P(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ అయిన

- $x=a\cos^3\theta$ and $y=a\sin^3\theta$

★ $$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\frac{d}{d\theta}(a\sin^3\theta)}{\frac{d}{d\theta}(a\cos^3\theta)}=\frac{\cancel{a}.3\cancel{\sin^2}\theta(\cancel{\cos\theta})}{\cancel{a}.3\cancel{\cos^2}\theta(\cancel{-\sin}\theta)}=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

- $P(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు $m=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

★ $\therefore P(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ వద్ద $-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ వాలుగా గల స్పర్శరేఖా సమీకరణం $y-y_1=m(x-x_1)$

★ $$\Rightarrow y-a\sin^3\theta=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(x-a\cos^3\theta)$$

- $$\Rightarrow \frac{y-a\sin^3\theta}{\sin\theta}=-\frac{(x-a\cos^3\theta)}{\cos\theta}$$

- $$\Rightarrow \frac{y}{\sin\theta}-\frac{a\sin^3\theta}{\sin\theta}=-\frac{x}{\cos\theta}+\frac{a\cos^3\theta}{\cos\theta}$$

- $$\Rightarrow \frac{x}{\cos\theta}+\frac{y}{\sin\theta}=a\cos^2\theta+a\sin^2\theta=a(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a(1)$$

- $$\Rightarrow \frac{x}{a\cos\theta}+\frac{y}{a\sin\theta}=1$$

★ $\therefore A=(a\cos\theta, 0), B=(0, a\sin\theta)$

- $$\therefore AB=\sqrt{(a\cos\theta-0)^2+(0-a\sin\theta)^2}$$

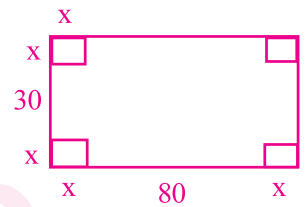
$$=\sqrt{a^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}=\sqrt{a^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\sqrt{a^2(1)}=a$$

$\therefore$ కావున AB పొడవు స్థిరము

24. 30 సెం.మీ x 80 సెం.మీ కొలతలుగా ఉండే ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారపు రేకు ముక్క నాలుగు మూలల నుంచి భుజంగా ఉండే చతురస్రాకార ముక్కలను కత్తిరించి మిగిలిన రేకును మడిచి మూతలేని పెట్టెను తయారు చేశారు. ఆ పెట్టె ఘనపరిమాణం గరిష్ఠం అయితే x ఎంత?

Sol: ★పెట్టె యొక్క
ఎత్తు $h=x$
పొడవు $l=80-2x$ } .....(1)

వెడల్పు $b=30-2x$ అనుకొనుము.



★పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణం $V=lbh=(80-2x)(30-2x)(x)$

• $=2(40-x)\,2(15-x)(x)$

• $=4(40-x)(15-x)(x)=4(600-40x-15x+x^2)x$

• $=4(600-55x+x^2)x=4(x^3-55x^2+600x)$

★$V(x)=4(x^3-55x^2+600x)$ .....(2)

•(2) ను x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

•$V'(x)=4(3x^2-110x+600)$ .....(3)

•$V'(x)=0 \Rightarrow \cancel{4}(3x^2-110x+600)=0$

గరిష్ట లేదా కనిష్ట విలువ వద్ద $V'(x)=0$ అగును.

★ $\Rightarrow 3x^2-90x-20x+600=0$

• $\Rightarrow 3x(x-30)-20(x-30)=0 \Rightarrow (3x-20)(x-30)=0$

• $\Rightarrow 3x=20$ (or) $x=30 \Rightarrow x=20/3$ (or) $x=30$

• ఇప్పుడు (3)ను x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

★ $V''(x)=4(6x-110)$ ....(4)

★ $x=\frac{20}{3}$ వద్ద (4) నుండి

★ $V''\left(\frac{20}{3}\right)=4\left(\cancel{6}\left(\frac{20}{\cancel{3}}\right)-110\right)=4(40-110)=4(-70)=-280$

•కావున $V''\left(\frac{20}{3}\right)<0$

•$\therefore$ V(x) యొక్క గరిష్ట విలువ $x=\frac{20}{3}$ సెం.మీ. వద్ద ఉండును.