Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH-2024 (TS)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2024(TS)

Time : 3 Hours   **గణితశాస్త్రం -1A**   **Max.Marks : 75**

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి:   **10 × 2 = 20**

1. $f : R - \{0\} \rightarrow R$ ను $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ గా నిర్వచిస్తే, $f(x) + f(1/x) = 0$ అని చూపండి.

2. $f(x)= \dfrac{1}{(x^2-1)(x+3)}$ అనే ప్రమేయపు ప్రదేశము కనుగొనుము. **3.** $\begin{bmatrix} x-3 & 2y-8 \\ z+2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & a-4 \end{bmatrix}$ అయిన x, y,z,a విలువలు కనుగొనుము.

4. 1 యొక్క వాస్తవం కాని సంకీర్ణ ఘనమూలం ω అయితే $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0$ అని చూపండి.

5. $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{i} + \bar{j}$ అయిన $\bar{a} + \bar{b}$ దిశలోని యూనిట్ సదిశను కనుగొనుము.

6. $2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$ అనే బిందువు గుండా పోవుచూ, $4\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$ అనే సదిశకు సమాంతరంగా ఉండే సరళరేఖసదిశా సమీకరణం రాయండి.

7. $2\bar{i} + \lambda\bar{j} - \bar{k}$, $4\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$ అనే సదిశలు లంబంగా ఉన్న λ విలువ కనుగొనుము.

8. $\sin 78^\circ + \cos 132^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ అని నిరూపించండి. **9.** $\sin^2 82\frac{1}{2}^\circ - \sin^2 22\frac{1}{2}^\circ$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

10. $\operatorname{Tanh}^{-1}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\log_e 3$ అని చూపండి.

సెక్షన్-బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి.   **5 × 4 = 20**

11. $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ అయిన $(aI+bE)^3 = a^3I + 3a^2bE$ అని చూపండి.

12. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ లు అతలీయ సదిశలైతే $-\vec{a} + 4\vec{b} - 3\vec{c}$, $3\vec{a} + 2\vec{b} - 5\vec{c}$, $-3\vec{a} + 8\vec{b} - 5\vec{c}$, $-3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$ అనే నాలుగు బిందువులు సతలీయములని చూపుము.

13. ఏవైనా మూడు సదిశలు $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ లకు $[\bar{b}+\bar{c} \;\; \bar{c}+\bar{a} \;\; \bar{a}+\bar{b}] = 2[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}]$ అని నిరూపించండి.

14. $\tan 70^\circ - \tan 20^\circ = 2\tan 50^\circ$ అని నిరూపించండి. **15.** $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ ను సాధించండి.

16. $\operatorname{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2} + \operatorname{Tan}^{-1}\dfrac{1}{5} + \operatorname{Tan}^{-1}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$ అని నిరూపించండి.

17. ΔABC లో $a:b:c = 7:8:9$ అయిన $\cos A:\cos B:\cos C$ ను కనుగొనుము.

సెక్షన్-సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి.   **5 × 7 = 35**

18. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $C=\{p,q,r\}$ మరియు $f:A\rightarrow B$, $g:B\rightarrow C$ లను $f=\{(1,\alpha), (2,\gamma), (3,\beta)\}$, $g=\{(\alpha,q), (\beta,r), (\gamma,p)\}$ గా నిర్వచిస్తే f మరియు g లు ద్విగుణ ప్రమేయాలు, $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ అని చూపండి.

19. పరిమిత గణితాను గమన సిద్ధాంతనుపయోగించి $\dfrac{1}{1.4} + \dfrac{1}{4.7} + \dfrac{1}{7.10} + \ldots.. + n$ పదాల వరకు $= \dfrac{n}{3n+1}$ అని చూపండి

20. $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$ అని చూపండి.

21. $x+y+z=1$, $2x+2y+3z=6$, $x+4y+9z=3$ సమీకరణాలను మాత్రిక విలోమపద్ధతిన సాధించుము.

22. $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}, \bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}, \bar{c} = -\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}$ and $\bar{d} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ అయిన $|(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})|$ ను కనుగొనుము

23. $A+B+C=180^\circ$ అయిన $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$ అని నిరూపించండి.

24. $r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 6$, $r = 1$ అయిన $a = 3, b = 4$, $c = 5$ అని నిరూపించండి.

IPE TS MARCH-2024
SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. **$f : R - \{0\} \to R$ ను $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$ గా నిర్వచిస్తే, $f(x) + f(1/x) = 0$ అని చూపండి.**

Sol: Given $f(x)=x^3-\frac{1}{x^3} \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^3}-x^3.$

$\therefore f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\cancel{x^3}-\cancel{\frac{1}{x^3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{x^3}}-\cancel{x^3}\right)=0$

---

2. **$\frac{1}{(x^2-1)(x+3)}$ అనే వాస్తవ ప్రమేయపు ప్రదేశము కనుగొనుము.**

Sol: దత్తాంశ f(x) నిర్వచితమైతే $(x^2-1)(x+3)\neq 0$

$\Rightarrow (x-1)(x+1)(x+3)\neq 0 \Rightarrow x\neq 1,-1,-3$

$\therefore$ ప్రదేశం $= R-\{1,-1,-3\}$

---

3. **$\begin{bmatrix} x-3 & 2y-8 \\ z+2 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & a-4 \end{bmatrix}$ అయిన x, y, z, a విలువలు కనుగొనుము**

Sol: దత్తాంశం నుండి $\begin{bmatrix} x-3 & 2y-8 \\ z+2 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & a-4 \end{bmatrix}$

అనురూప మూలకాలను సమానం చేయగా $x-3=5 \Rightarrow x=5+3=8;\quad 2y-8=2$

$\Rightarrow 2y=2+8 \Rightarrow \cancel{2}y=\cancel{10} \Rightarrow y=5$

$z+2=-2 \Rightarrow z=-2-2=-4;\quad a-4=6 \Rightarrow a=6+4 \Rightarrow a=10$

$\therefore x=8, y=5, z=-4, a=10$

4. **1 యొక్క వాస్తవం కాని సంకీర్ణ ఘనమూలం ω అయితే $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0$ అని చూపండి.**

Sol: $$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\omega+\omega^2 & 1+\omega+\omega^2 & 1+\omega+\omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} \quad (\because R_1 \to R_1+R_2+R_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = 0 = \text{R.H.S} \; (\because 1+\omega+\omega^2 = 0)$$

---

5. **$\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{i} + \bar{j}$ అయితే $\bar{a}+\bar{b}$ దిశలో యూనిట్ సదిశను కనుగొనుము.**

Sol: దత్తాంశం నుండి $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{i} + \bar{j}$ అయిన

$\bar{a}+\bar{b} = (\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}) + (3\bar{i}+\bar{j}) = 4\bar{i}+3\bar{j}+3\bar{k}$

$\Rightarrow |\bar{a}+\bar{b}| = \sqrt{4^2+3^2+3^2} = \sqrt{16+9+9} = \sqrt{34}$

$\therefore$ కావలసిన యూనిట్ సదిశ $= \dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{|\bar{a}+\bar{b}|} = \dfrac{4\bar{i}+3\bar{j}+3\bar{k}}{\sqrt{34}}$

---

6. **$2\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}$ అనే బిందువు గుండా పోవుచూ, $4\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k}$ అనే సదిశకు సమాంతరంగా ఉండే సరళరేఖ సదిశా సమీకరణం రాయండి.**

Sol: దత్త బిందువు $A(\bar{a}) = 2\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}$ మరియు సమాంతర సదిశ $\bar{b} = 4\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k}$ సరళరేఖ సదిశా సమీకరణం $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}$, $t \in R$

$\therefore \; \bar{r} = (2\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}) + t(4\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k}), t \in R$

---

7. **$2\bar{i}+\lambda\bar{j}-\bar{k}$, $4\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$ అనే సదిశలు లంబంగా ఉన్న λ విలువ కనుగొనుము.**

Sol: $\bar{a} = 2\bar{i}+\lambda\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{b} = 4\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$

దత్తాంశం నుండి $\bar{a} \perp \bar{b} \Rightarrow \bar{a}.\bar{b} = 0$

$\therefore (2\bar{i}+\lambda\bar{j}-\bar{k}).(4\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}) = 0 \Rightarrow 2(4)-2\lambda-2=0 \Rightarrow 8-2\lambda-2=0 \Rightarrow 6-2\lambda=0$

$\Rightarrow 2\lambda=6 \Rightarrow \lambda=3$

8. $\sin 78^\circ + \cos 132^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ అని నిరూపించండి.

Sol: L.H.S $= \sin 78^\circ + \cos 132^\circ = \sin 78^\circ + \cos(90^\circ + 42^\circ)$

$$= \sin 78^\circ - \sin 42^\circ = 2\cos\left(\frac{78^\circ+42^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{78^\circ-42^\circ}{2}\right) \quad \left[\because \sin C - \sin D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)\right]$$

$$= 2\cos 60^\circ \sin 18^\circ = \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \text{R.H.S}$$

---

9. $\sin^2 82\frac{1}{2}^\circ - \sin^2 22\frac{1}{2}^\circ$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

Sol: $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$ అని మనకు తెలుసు

$$\therefore \sin^2 82\frac{1}{2}^\circ - \sin^2 22\frac{1}{2}^\circ = \sin(82\frac{1}{2}^\circ + 22\frac{1}{2}^\circ).\sin(82\frac{1}{2}^\circ - 22\frac{1}{2}^\circ)$$

$$= \sin(105^\circ).\sin 60^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ).\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{2}}$$

---

10. $\text{Tanh}^{-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log_e 3$ అని చూపండి.

Sol: $\text{Tanh}^{-1}x = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ అని మనకు తెలుసు

$$\therefore \text{Tanh}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{\frac{3}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}\right) = \frac{1}{2}\log_e(3)$$

సెక్షన్-బి

11. $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ **అయిన $(aI+bE)^3=a^3I+3a^2bE$, అని చూపండి.**

Sol: దత్తాంశం నుండి $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$$aI+bE=a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a\end{bmatrix}$$

$$L.H.S=(aI+bE)^3=\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+0 & ab+ab\\ 0+0 & 0+a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a^2 & 2ab\\ 0 & a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^3 & 3a^2b\\ 0 & a^3\end{bmatrix}\text{.........(1)}$$

$$R.H.S=a^3I+3a^2bE=a^3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+3a^2b\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^3 & 0\\ 0 & a^3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 3a^2b\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^3 & 3a^2b\\ 0 & a^3\end{bmatrix}\text{......(2)}$$

$\therefore$ (1), (2) ల నుండి L.H.S= R.H.S కావున నిరూపించబడినది.

---

12. **$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ లు అతలీయ సదిశలైతే, $-\bar{a}+4\bar{b}-3\bar{c}, 3\bar{a}+2\bar{b}-5\bar{c}, -3\bar{a}+8\bar{b}-5\bar{c}, -3\bar{a}+2\bar{b}+\bar{c}$ అనే నాలుగు బిందువులు సతలీయములని చూపండి.**

Sol: 'O' ఆది బిందువు అయిన

$\overline{OP}=-\bar{a}+4\bar{b}-3\bar{c}, \overline{OQ}=3\bar{a}+2\bar{b}-5\bar{c}, \overline{OR}=-3\bar{a}+8\bar{b}-5\bar{c}, \overline{OS}=-3\bar{a}+2\bar{b}+\bar{c},$

$\therefore \overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP}=(3\bar{a}+2\bar{b}-5\bar{c})-(-\bar{a}+4\bar{b}-3\bar{c})=4\bar{a}-2\bar{b}-2\bar{c}$

$\overline{PR}=\overline{OR}-\overline{OP}=(-3\bar{a}+8\bar{b}-5\bar{c})-(-\bar{a}+4\bar{b}-3\bar{c})=-2\bar{a}+4\bar{b}-2\bar{c}$

$\overline{PS}=\overline{OS}-\overline{OP}=(-3\bar{a}+2\bar{b}+\bar{c})-(-\bar{a}+4\bar{b}-3\bar{c})=-2\bar{a}-2\bar{b}+4\bar{c}$

$$[\overline{PQ}\ \overline{PR}\ \overline{PS}]=\begin{vmatrix}4 & -2 & -2\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{vmatrix}[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]=[4(16-4)+2(-8-4)-2(4+8)][\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$$

$=[4(12)+2(-12)-2(12)]\,[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]=[48-24-24][\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]=0\times[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]=0$

$\overline{PQ}, \overline{PR}, \overline{PS}$ అనే సదిశలు సతలీయములు.

కావున P,Q,R,S అనే బిందువులు సతలీయములని నిరూపించబడినది.

13. **ఏవైనా మూడు సదిశలు $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ లకు $[\bar{b}+\bar{c}\ \ \bar{c}+\bar{a}\ \ \bar{a}+\bar{b}]=2[\bar{a}\bar{b}\bar{c}]$ అని నిరూపించండి.**

Sol: $\left[\bar{b}+\bar{c}\ \ \bar{c}+\bar{a}\ \ \bar{a}+\bar{b}\right]=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]=[0(0-1)-1(0-1)+1(1-0)][\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]=2[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$

---

14. **$\tan 70^o-\tan 20^o=2\tan 50^o$ అని నిరూపించండి.**

Sol: $70^o-20^o=50^o \Rightarrow \tan(70^o-20^o)=\tan 50^o$ tan(A–B) ఫార్ముల్లాను అనువర్తింప చేయగా

$$\Rightarrow \frac{\tan 70^o-\tan 20^o}{1+\tan 70^o\tan 20^o}=\tan 50^o \Rightarrow \frac{\tan 70^o-\tan 20^o}{1+\cancel{\tan 70^o}\ \cancel{\cot 70^o}}=\tan 50^o \qquad [\because \tan 20^o=\tan(90^o-70^o)=\cot 70^o]$$

$$\Rightarrow \frac{\tan 70^o-\tan 20^o}{1+1}=\tan 50^o \Rightarrow \frac{\tan 70^o-\tan 20^o}{2}=\tan 50^o \Rightarrow \tan 70^o-\tan 20^o=2\tan 50^o$$

---

15. **$\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$ ను సాధించుము.**

Sol: దత్త సమీకరణం $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$

దీనిని $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$, తో భాగించగా

$$\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 30^o\sin x+\cos 30^o\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\ \sin\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}.$$ దీని ప్రధాన విలువ $\alpha=\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $\theta=2n\pi\pm\alpha,\ n\in Z$

$$\Rightarrow x-\frac{\pi}{6}=2n\pi\pm\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}, n\in Z$$

16. $\mathbf{Tan^{-1}\frac{1}{2}+Tan^{-1}\frac{1}{5}+Tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}}$ **అని నిరూపించండి.**

Sol: $Tan^{-1}x+Tan^{-1}y=Tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ అని మనకు తెలుసు

$$\therefore Tan^{-1}\frac{1}{2}+Tan^{-1}\frac{1}{5}=Tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}.\frac{1}{5}}\right)=Tan^{-1}\left(\frac{\frac{5+2}{\cancel{10}}}{\frac{10-1}{\cancel{10}}}\right)=Tan^{-1}\frac{7}{9}$$

$$\therefore L.H.S=Tan^{-1}\frac{7}{9}+Tan^{-1}\frac{1}{8}=Tan^{-1}\left(\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}.\frac{1}{8}}\right)=Tan^{-1}\left(\frac{\frac{56+9}{\cancel{72}}}{\frac{72-7}{\cancel{72}}}\right)$$

$$=Tan^{-1}\left(\frac{65}{65}\right)=Tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}=R.H.S$$

---

17. **ΔABCలో $a:b:c=7:8:9$ అయిన $cosA:cosB:cosC=14:11:6$ అని చూపండి.**

Sol: దత్తాంశము నుండి $a:b:c=7:8:9 \Rightarrow a=7k, b=8k, c=9k$

ఇప్పుడు $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(8k)^2+(9k)^2-(7k)^2}{2.(8k)(9k)}=\frac{k^2(8^2+9^2-7^2)}{2.8.9.k^2}$

$$=\frac{64+81-49}{2.8.9}=\frac{96}{2.8.9}=\frac{2}{3}$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{(7k)^2+(9k)^2-(8k)^2}{2.7k.9k}=\frac{k^2(7^2+9^2-8^2)}{2.7.9.k^2}$$

$$=\frac{49+81-64}{2.7.9}=\frac{66}{2.7.9}=\frac{11}{21}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(7k)^2+(8k)^2-(9k)^2}{2.7k.8k}=\frac{k^2(7^2+8^2-9^2)}{2.7.8.k^2}$$

$$=\frac{49+64-81}{2.7.8}=\frac{32}{2.7.8}=\frac{2}{7}$$

$$\therefore \cos A:\cos B:\cos C=\frac{2}{3}:\frac{11}{21}:\frac{2}{7}=21\left(\frac{2}{3}\right):21\left(\frac{11}{21}\right):21\left(\frac{2}{7}\right)=14:11:6$$

సెక్షన్-సి

18. $A=\{1,2,3\}, B=\{\alpha,\beta,\gamma\}, C=\{p,q,r\}$ మరియు $f:A\to B$, $g:B\to C$ లను $f=\{(1,\alpha), (2,\gamma), (3,\beta)\}$, $g=\{(\alpha,q), (\beta,r), (\gamma,p)\}$గా నిర్వచిస్తే f మరియు g లు ద్విగుణ ప్రమేయాలు, $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$అని చూపండి.

Sol: f, g ల క్రమయుగ్మాలను పరిశీలించగా f, g లు రెండూ అన్వేకం, సంగ్రస్తం. కావున f, g లు ద్విగుణాలు.

దత్తాంశం నుండి $f=\{(1,\alpha), (2,\gamma),(3,\beta)\}$, $g=\{(\alpha,q),(\beta,r),(\gamma,p)\}$

$\Rightarrow gof=\{(1,q),(2,p),(3,r)\}\Rightarrow(gof)^{-1}=\{(q,1),(p,2),(r,3)\}$

మరియు $g^{-1}=\{(q,\alpha), (r,\beta), (p,\gamma)\}$, $f^{-1}=\{(\alpha,1), (\gamma,2), (\beta,3)\}$

$\Rightarrow f^{-1}og^{-1}=\{(q,1), (p,2), (r,3)\}$.

19. పరిమిత గణితాను గమన సిద్ధాంతంనుపయోగించి $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+.....+$ n పదాల వరకు $=\frac{n}{3n+1}$ అని చూపండి

Sol: n వ పదము కనుగొనుట:

1,4,7... లు అంకశ్రేఢిలో ఉన్నాయి. ఇక్కడ a=1, d=3

$\therefore T_n = a+(n-1)d \Rightarrow T_n = 1+(n-1)3 = 1+3n-3 = 3n-2$

4,7,10... లు అంకశ్రేఢిలో ఉన్నాయి. ఇక్కడ a=4, d=3

$\therefore T_n = 4+(n-1)3 = 3n+1$

$\therefore\therefore$ n వ పదము $T_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$$S(n) : \frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+.....+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

Step 1: S(1) యొక్క L.H.S $=\frac{1}{1.4}=\frac{1}{4}$;

S(1) యొక్క R.H.S $=\frac{1}{3.1+1}=\frac{1}{4}$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S. కావున S(1) సత్యము

Step 2: $k\in N$ నకు S(k) సత్యము అనుకొనుము.

$$S(k) : \frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+.....+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{k}{3k+1} \quad .....(1)$$

Step 3: ఇప్పుడు S(k+1) సత్యమని చూపవలెను.

(k+1) వ పదము $=\frac{1}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)}=\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$

(1)నకు ఇరువైపులా (k+1) పదాన్ని కలుపగా

$$\text{L.H.S} = \left[\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+.....+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}\right]+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$=\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$=\frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$=\frac{(k+1)\cancel{(3k+1)}}{\cancel{(3k+1)}(3k+4)}=\frac{k+1}{3k+4}=\frac{k+1}{3k+3+1}=\frac{k+1}{3(k+1)+1}=\text{R.H.S}$$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S.

కావున, S(k) సత్యమైన S(k+1) కూడా సత్యమగును.

కావున పరిమిత గణితానుగమన సిద్ధాంతం నుంచి ప్రతి $n\in N$ కి దత్త ప్రవచనం S(n) సత్యం

20. $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$ అని చూపండి.

Sol: $$\text{L.H.S} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 0 & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c^2-a^2 & c^3-a^3 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} \because R_2 \Rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \Rightarrow R_3 - R_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 0 & (b-a)(b+a) & (b-a)(b^2+ba+a^2) \\ 0 & (c-a)(c+a) & (c-a)(c^2+ca+a^2) \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} \because a^2-b^2 = (a-b)(a-b) \\ a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \end{pmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 0 & a+b & a^2+ab+b^2 \\ 0 & a+c & a^2+ac+c^2 \end{vmatrix}$$

$$= [(b-a)(c-a)]\left[(a+b)(a^2+ac+c^2)-(a+c)(a^2+ab+b^2)\right]$$

$$= [(b-a)(c-a)]\left[\left[(\cancel{a^3}+\cancel{a^2c}+ac^2)+(\cancel{ba^2}+\cancel{abc}+bc^2)\right]-\left[(\cancel{a^3}+\cancel{a^2b}+ab^2)+(\cancel{ca^2}+\cancel{abc}+cb^2)\right]\right]$$

$$= [(b-a)(c-a)]\left[ac^2+bc^2-ab^2-cb^2\right]$$

$$= [(b-a)(c-a)]\left[a(c^2-b^2)+bc(c-b)\right]$$

$$= [(b-a)(c-a)]\left[a(c^2-b^2)+bc(c-b)\right]$$

$$= [(b-a)(c-a)][a(c-b)(c+b)+bc(c-b)]$$

$$= [(b-a)(c-a)]\left[[c-b]\left(a(c+b)+bc\right)\right]$$

$$= [(b-a)(c-a)][[c-b](ac+ab+bc)]$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) = \text{R.H.S}$$

21. **x+y+z=1, 2x+2y+3z=6, x+4y+9z=3 రేఖీయ సమీకరణాలను క్రామర్ పద్ధతిన సాధించండి.**

Sol: ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థను మాత్రిక సమీకరణ రూపంలో వ్రాయగా $AX = D$, ఇక్కడ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ఇప్పుడు, $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$

$= 1(18-12) - 1(18-3) + 1(8-2)$

$= 1(6)–1(15)+1(6)=6–15+6=–3$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$=1(18–12)–1(54–9)+1(24–6)$

$=1(6)–1(45)+1(18)=6–45+18=–21$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$=1(54–9)–1(18–3)+1(6–6)$

$=1(45)–1(15)+1(0)=45–15+0=30$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$=1(6–24)–1(6–6)+1(8–2)$

$=1(–18)–1(0)+1(6)=–18–0+6=–12$

$\therefore$ క్రామర్ పద్ధతి ప్రకారం,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\cancel{-21}}{\cancel{3}} = 7;\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\cancel{30}}{\cancel{-3}} = 10;\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\cancel{-12}}{\cancel{-3}} = 4$$

$\therefore$ సాధన x=7, y= –10, z=4

22. $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}, \bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}, \bar{c} = -\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}$, $\bar{d} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, అయిన $|(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})|$ ను కనుగొనుము

Sol: దత్తాంశం నుండి $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}, \bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}, \bar{c} = -\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}, \bar{d} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$,

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i}(1-6) - \bar{j}(2+3) + \bar{k}(-4-1) = -5\bar{i} - 5\bar{j} - 5\bar{k} \quad ....(1)$$

$$\bar{c}\times\bar{d} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i}(1+4) - \bar{j}(-1+4) + \bar{k}(-1-1) = 5\bar{i} - 3\bar{j} - 2\bar{k} \quad ....(2)$$

1) & (2) ల నుండి,

$$\therefore (\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -5 & -5 & -5 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \bar{i}(10-15) - \bar{j}(10+25) + \bar{k}(15+25) = -5\bar{i} - 35\bar{j} + 40\bar{k}$$

$$= 5(-\bar{i} - 7\bar{j} + 8\bar{k})$$

$$\therefore |(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})| = 5\sqrt{(-1)^2 + (-7)^2 + 8^2} = 5\sqrt{1+49+64} = 5\sqrt{114}$$

---

23. A+B+C=180° అయిన sin2A+sin2B+sin2C=4sinAsinBsinC అని చూపండి.

Sol: L.H.S = sin2A+sin2B+sin2C

$= 2\sin\left(\frac{2A+2B}{2}\right)\cos\left(\frac{2A-2B}{2}\right) + \sin 2C$ $\quad \left[\because \sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\right]$

$= 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$ $\quad [\because \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta]$

$= 2\sin(180^\circ - C)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$ $\quad [\because (A+B)+C = 180^\circ]$

$= 2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$ $\quad [\because \sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta]$

$= 2\sin C[\cos(A-B) + \cos C]$ $\quad$ [2sinC కామన్ తీయగా]

$= 2\sin C[\cos(A-B) + \cos(180^\circ - (A+B))]$ $\quad [\because (A+B)+C = 180^\circ]$

$= 2\sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$ $\quad [\because \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta]$

$= 2\sin C(2\sin A\sin B)$ $\quad [\because \cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A\sin B]$

$= 4\sin A\sin B\sin C$ = R.H.S

24. $r_1=2, r_2=3, r_3=6, r=1$, అయిన $a=3, b=4, c=5$ అని నిరూపించండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $r_1=2, r_2=3, r_3=6$ మరియు $r=1$, అప్పుడు

$$\Delta = \sqrt{rr_1r_2r_3} = \sqrt{1\times2\times3\times6} = \sqrt{36} = 6$$

ఇప్పుడు, $r = \frac{\Delta}{s} \Rightarrow 1 = \frac{6}{s} \quad \therefore s = 6$

i) $r_1 = \frac{\Delta}{s-a} \Rightarrow s-a = \frac{\Delta}{r_1} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{2}} = 3$

$\therefore s-a=3 \Rightarrow 6-a=3$

$\Rightarrow a = 6-3 = 3$

ii) $r_2 = \frac{\Delta}{s-b} \Rightarrow s-b = \frac{\Delta}{r_2} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{3}} = 2$

$\therefore s-b=2 \Rightarrow 6-b=2$

$\Rightarrow b = 6-2 = 4$

iii) $r_3 = \frac{\Delta}{s-c} \Rightarrow s-c = \frac{\Delta}{r_3} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{6}} = 1$

$\therefore s-c=1 \Rightarrow 6-c=1$

$\Rightarrow c = 6-1 = 5$