Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH-2024 (AP)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2024(AP)

గణితశాస్త్రం – 1B

Time : 3 Hours | Max.Marks : 75

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $10 \times 2 = 20$

1. $(3, y), (2,7)$ లను కలిపే సరళరేఖ, $(-1, 4), (0, 6)$ లను సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న y విలువ కనుగొనుము.
2. $3x+4y-1=0$ అనే రేఖ దృష్ట్యా $(1,2)$ యొక్క ప్రతిబింబము కనుగొనుము.
3. $A=(6,3,-4), B=(-2,-1,2)$ లను కలిపే రేఖా ఖండం $\overline{AB}$ మధ్యబిందువుకూ $(3,-1,2)$బిందువుకూ మధ్య గల దూరాన్ని కనుక్కోండి.
4. $(-2,1,3)$ బిందువు ద్వారా పోయే తలము యొక్క అభిలంబరేఖకు దిక్ సంఖ్యలు $(3,-5,4)$ అయితే తలానికి సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.
5. $\underset{x\to 0}{Lt} \dfrac{\sin ax}{x\cos x}$ ను గణించండి.
6. $\underset{x\to \infty}{Lt} \dfrac{11x^3-3x+4}{13x^3-5x^2-7}$ ను గణించండి.
7. $f(x)=xe^x \sin x$ అయిన $f'(x)$ ను కనుగొనుము.
8. $y = ae^{nx}+be^{-nx}$ అయిన $y'' = n^2y$ అని నిరూపించండి.
9. $y=e^x+x$ ప్రమేయానికి $x=5, \Delta x=0.02$ అయినప్పుడు Δy , dy లను కనుగొనుము.
10. $f(x) = x(x+3)\, e^{-x/2}$ అనే ప్రమేయమునకు $[-3,0]$ అనే అంతరంలో రోల్స్ సిద్ధాంతమును సరిచూడుము.

సెక్షన్-బి

II. ఈ క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 4 = 20$

11. $A=(4,0), B=(-4,0), |PA-PB|=4$ అయితే P బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.
12. 45° కోణంతో అక్షాలను భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు, రూపాంతరం చెందిన వక్రం సమీకరణం $17x^2-16xy+17y^2=225$ అయిన ఆ వక్రం యొక్క మూల సమీకరణం కనుక్కోండి.
13. ఒక సరళరేఖ $P(3,4)$ గుండాపోతూ X-అక్షం ధనదిశతో 60° కోణాన్ని చేస్తోంది. P నుండి 5 యూనిట్ల దూరంలో ఆ రేఖపై ఉన్న బిందువుల నిరూపకాలను కనుక్కోండి.
14. $f(x)=\begin{cases} \sin x & x\le 0 \\ x^2+a & 0<x<1 \\ bx+3 & 1\le x\le 3 \\ -3 & x>3 \end{cases}$ గా నిర్వచితమైన ప్రమేయం R పై అవిచ్ఛిన్నం అయ్యే a,b లను కనుక్కోండి.
15. ప్రాథమిక సూత్రాన్ని ఉపయోగించి $\cos ax$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.
16. $y=a^{1-k}.x^k$ అనే వక్రానికి ఉపలంబఖండము స్థిరమయితే k విలువ కనుగొనుము.
17. ఒక సమఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం 9 క్యూబిక్ సెం.మీ/సె. చొప్పున పెరుగుచున్నది. భుజం పొడవు 10 సెం.మీ గా ఉన్నప్పుడు ఉపరితల వైశాల్యం పెరిగే రేటును కనుగొనుము.

సెక్షన్-సి

III. ఈ క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 7 = 35$

18. $(5,-2),(-1, 2), (1, 4)$ శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం లంబకేంద్రాన్ని కనుక్కోండి.
19. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ అనునది ఒక సరళరేఖాయుగ్మాన్ని సూచించే ఈ క్రింది నియమాలను నిరూపించండి. (a) $\Delta=abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ (b) $h^2\ge ab, f^2\ge bc, g^2\ge ac$.
20. $2x^2-2xy+3y^2+2x-y-1=0$ వక్రం $x+2y=k$ రేఖల ఖండన బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపే రేఖలు పరస్పరం లంబాలయితే k విలువ కనుక్కోండి.
21. రెండు రేఖల దిక్ కొసైన్‌లు $l+m+n=0$, $2mn+3nl-5lm=0$ అనే సమీకరణాలను తృప్తి పరిస్తే, ఆ సరళరేఖలు పరస్పరము లంబంగా ఉండునని చూపుము.
22. $(\sin x)^{\log x}+x^{\sin x}$ యొక్క అవకలనిని కనుగొనుము.
23. $x2/3 + y2/3 = a2/3$ వక్రంపై ఏదైనా బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ నిరూపకాక్షాలను A, B బిందువులలో ఖండిస్తే, AB పొడవు స్థిరమనిచూపండి.
24. 30 సెం.మీ X 80 సెం.మీ కొలతలుగా ఉండే ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారపు రేకు ముక్క నాలుగు మూలల నుంచి భుజంగా ఉండే చతురస్రాకార ముక్కలను కత్తిరించి మిగిలిన రేకును మడిచి మూతలేని పెట్టెను తయారు చేశారు. ఆ పెట్టె ఘనపరిమాణం గరిష్ఠం అయితే x ఎంత?

BABY BULLET-Q

IPE AP MARCH-2024
SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. (3, y), (2, 7) లను కలిపే సరళరేఖ, (–1, 4), (0, 6) లను సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న y విలువ కనుగొనుము.

Sol: A = (3, y), B = (2, 7) అనుకొనిన

$\overline{AB}$ యొక్క వాలు $m_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{7-y}{2-3} = \dfrac{7-y}{-1} = y - 7$

C = (–1, 4), D = (0, 6) అనుకొనిన

$\overline{CD}$ యొక్క వాలు $m_2 = \dfrac{6-4}{0+1} = \dfrac{2}{1} = 2$

$m_1 = m_2$ [$\because$ ఇచ్చిన రేఖలు సమాంతరాలు]

$\Rightarrow y - 7 = 2 \Rightarrow y = 2 + 7 = 9 \quad \therefore y = 9$

---

2. 3x+4y–1=0 అనే రేఖ దృష్ట్యా (1,2) యొక్క ప్రతిబింబము కనుగొనుము.

Sol: 3x+4y–1 = 0 అనే రేఖ దృష్ట్యా (1, 2) యొక్క ప్రతిబింబము (h, k) అనుకొనుము.

ఇక్కడ, $(x_1, y_1) = (1,2)$, a=3, b=4, c = –1.

$$\therefore \frac{h - x_1}{a} = \frac{k - y_1}{b} = \frac{-2(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{h-1}{3} = \frac{k-2}{4} = \frac{-2[3(1) + 4(2) - 1]}{3^2 + 4^2} = \frac{-2(10)}{25} = -2\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{h-1}{3} = -\frac{4}{5} \Rightarrow h - 1 = -\frac{12}{5} \Rightarrow h = 1 - \frac{12}{5} = \frac{5-12}{5} = -\frac{7}{5}$$

$$\frac{k-2}{4} = -\frac{4}{5} \Rightarrow k - 2 = -\frac{16}{5} \Rightarrow k = 2 - \frac{16}{5} = \frac{10-16}{5} = \frac{-6}{5}$$

$\therefore$ (1, 2) యొక్క ప్రతిబింబం $(h,k) = \left(-\dfrac{7}{5}, -\dfrac{6}{5}\right)$

---

3. A = (6,3,–4) , B= (–2,–1,2) లను కలిపే రేఖా ఖండం $\overline{AB}$ మధ్యబిందువుకూ (3,–1,2)బిందువుకూ మధ్య గల దూరాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: AB యొక్క మధ్య బిందువుM అనుకొనుము $\Rightarrow M = \left(\dfrac{6-2}{2}, \dfrac{3-1}{2}, \dfrac{-4+2}{2}\right) = (2,1,-1)$.

ఇప్పుడు, P = (3,–1,2), M = (2, 1, –1) $\Rightarrow PM = \sqrt{(3-2)^2 + (-1-1)^2 + (2+1)^2}$

$= \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ units.

BABY BULLET-Q

4. (–2,1,3) బిందువు ద్వారా పోయే తలము యొక్క అభిలంబరేఖకు దిక్ సంఖ్యలు (3,–5,4) అయితే తలానికి సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: (x, y, z) అనే బిందువు గుండా పోవుచూ a,b,c లు తలము అభిలంబరేఖ దిక్ సంఖ్యలుగా గల సమీకరణము $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$. ఇక్కడ, $(x_1,y_1,z_1)=(-2,1,3)$ మరియు $a=3,\ b=-5,\ c=4$

∴ కావలసిన సమీకరణము $3(x+2)-5(y-1)+4(z-3)=0 \Rightarrow 3x+6-5y+5+4z-12=0 \Rightarrow 3x-5y+4z-1=0$.

---

5. $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{\sin ax}{x\cos x}$ ను గణించుము.

Sol: $$\underset{x\to 0}{Lt}\frac{\sin ax}{x\cos x}=\underset{x\to 0}{Lt}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)\frac{1}{(\cos x)}=a\frac{1}{(\cos 0)}=a\frac{1}{1}=a \qquad \left(\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k\right)$$

---

6. $\underset{x\to\infty}{Lt}\dfrac{11x^3-3x+4}{13x^3-5x^2-7}$ ను గణించుము.

Sol: లవ, హారాలలో x యొక్క అత్యధిక సాధారణ కారకము x^3 ను తీయగా

$$\underset{x\to\infty}{Lt}\frac{11x^3-3x+4}{13x^3-5x^2-7}=\underset{x\to\infty}{Lt}\frac{\cancel{x^3}\left(11-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(13-\frac{5}{x}-\frac{7}{x^3}\right)}=\underset{\frac{1}{x}\to 0}{Lt}\frac{11-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{13-\frac{5}{x}-\frac{7}{x^3}}=\frac{11-0+0}{13-0-0}=\frac{11}{13}$$

---

7. $f(x)=xe^x\sin x$ అయిన $f'(x)$ ను కనుగొనుము.

Sol: $$\frac{d}{dx}(uvw)=uv\frac{d}{dx}w+uw\frac{d}{dx}v+vw\frac{d}{dx}u$$

$$\therefore f'(x)=\frac{d}{dx}(xe^x\sin x)=xe^x\frac{d}{dx}\sin x+x\sin x\frac{d}{dx}e^x+e^x\sin x\frac{d}{dx}(x)$$

$$=xe^x(\cos x)+x\sin x(e^x)+e^x\sin x(1)$$

$$=xe^x\cos x+x\sin x(e^x)+e^x\sin x$$

$$=e^x(x\cos x+x\sin x+\sin x)$$

BABY BULLET-Q

8. **$y = ae^{nx}+be^{-nx}$ అయిన $y'' = n^2y$ అని నిరూపించండి.**

Sol: దత్తాంశం నుండి $y = ae^{nx}+be^{-nx}$; 'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$y' = ae^{nx}(n)+be^{-nx}(-n)$. మరల 'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా $y'' = ae^{nx}(n)(n)+be^{-nx}(-n)(-n)$

$\Rightarrow y'' = n^2ae^{nx}+n^2be^{-nx} = n^2(ae^{nx}+be^{-nx}) = n^2y \qquad \therefore\ y''=n^2y.$

---

9. **$y = e^x+x$ అనే ప్రమేయానికి $x = 5$, $\Delta x = 0.02$ అయినప్పుడు Δy, dy లను కనుగొనుము.**

Sol: దత్తాంశం $y=f(x)=e^x+x$; $x=5, \Delta x=0.02$

(i) $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$

$=[e^{x+\Delta x}+(x+\Delta x)]-(e^x+x)$

$=[e^{5+0.02}+(\not{5}+0.02)]-(e^5+\not{5}) = e^{5.02}+0.02-e^5 = e^5(e^{0.02}-1)+0.02$

(ii) $dy = f'(x)\Delta x = (e^x+1)\,\Delta x = (e^5+1)(0.02)$

---

10. **$f(x) = x(x + 3)\,e^{-x/2}$ అనే ప్రమేయమునకు $[-3, 0]$ అనే అంతరంలో రోల్స్ సిద్ధాంతమును సరిచూడుము.**

Sol: దత్త ప్రమేయము $f(x)$ (i) $[-3, 0]$ మీద అవిచ్ఛిన్నము మరియు (ii) $(-3, 0)$ లో అవకలనీయము

ఇప్పుడు, $f(x) = x(x + 3)e^{-x/2}$

$\Rightarrow f(-3) = (-3)(-3+3)e^{-3/2} = -3(0)e^{-3/2}=0$. మరియు $f(0) = (0)(0+3)e^{-3/2}=0 \therefore\ f(-3) = f(0)$

కావున, $f(x)$ అనునది రోల్స్ సిద్ధాంతం యొక్క 3 నియమాలను తృప్తిపరుస్తుంది.

$\therefore$రోల్స్ సిద్ధాంతం ప్రకారం $f'(c) = 0$ అగునట్లు $c\in(-3, 0)$ ఉండును.

ఇప్పుడు, $f(x) = x(x+3)e^{-x/2} =(x^2+3x)e^{-x/2}$. $\quad f'(x)=(x^2+3x)e^{-x/2}\left(-\frac{1}{2}\right)+e^{-x/2}(2x+3)$

$$= e^{-x/2}\left[\frac{-x^2-3x}{2}+2x+3\right] = e^{-x/2}\left[\frac{-x^2-3x+4x+6}{2}\right] = e^{-x/2}\left[\frac{-x^2+x+6}{2}\right]$$

కావున, $f'(c) = 0 \Rightarrow e^{-c/2}\left(\frac{-c^2+c+6}{2}\right)=0 \Rightarrow -c^2+c+6=0$

$\Rightarrow c^2-c-6 = 0 \Rightarrow (c+2)(c-3) = 0 \Rightarrow c = -2$ or 3

ఈ రెండు విలువలలో $-2\in(-3,0)$. కావున, రోల్స్ సిద్ధాంతం సరిచూడబడినది.

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-బి

11. లంబకోణ త్రిభుజ కర్ణానికి కొనలు (4,0), (0,4) అయిన మూడవ శీర్షానికి బిందుపథాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: • P(x, y) బిందుపథ బిందువు.

• A=(4,0), B=(0,4) దత్త బిందువులు.

★ దత్త నియమం నుండి: $\angle APB=90^0$

★ $\Rightarrow PA^2+PB^2=AB^2$

★ $\Rightarrow [(x-4)^2+(y-0)^2]+[(x-0)^2+(y-4)^2]=(4-0)^2+(0-4)^2$

• $\Rightarrow (x^2-8x+16)+y^2+x^2+(y^2-8y+16)=16+16$

• $\Rightarrow 2x^2+2y^2-8x-8y=0$

• $\Rightarrow 2(x^2+y^2-4x-4y)=0$

• $\Rightarrow x^2+y^2-4x-4y=0$

• $\therefore$ P(x,y) బిందుపథం $x^2+y^2-4x-4y=0$

---

12. 45° కోణంతో అక్షాలను భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు, రూపాంతరం చెందిన వక్రం సమీకరణం $17x^2-16xy+17y^2=225$ అయిన ఆ వక్రం యొక్క మూల సమీకరణం కనుక్కోండి.

Sol: ★దత్త రూపాంతర(నూతన) సమీకరణం $17X^2-16XY+17Y^2=225$ ....(1) గా వ్రాద్దాం.

• భ్రమణ పరివర్తన కోణం $\theta=45^o$ అయిన

★$X=x\cos\theta+y\sin\theta=x\cos45^o+y\sin45^o=x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow X=\frac{x+y}{\sqrt{2}}$

$Y=y\cos\theta-x\sin\theta=y\cos45^o-x\sin45^o=y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow Y=\frac{y-x}{\sqrt{2}}$

• (1) నుండి, మూల సమీకరణం

• $17\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2-16\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right)+17\left(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right)^2=225$

★$\Rightarrow 17\left(\frac{x^2+y^2+2xy}{2}\right)-16\left(\frac{y^2-x^2}{2}\right)+17\left(\frac{y^2+x^2-2xy}{2}\right)=225$ $[\because (x+y)(y-x)=(y+x)(y-x)=y^2-x^2]$

★ $\Rightarrow \frac{17x^2+17y^2+\cancel{34xy}-16y^2+16x^2+17x^2+17y^2-\cancel{34xy}}{2}=225$

★ $\Rightarrow 50x^2+18y^2=2(225)\Rightarrow \cancel{2}(25x^2+9y^2)=\cancel{2}(225)\Rightarrow 25x^2+9y^2=225$

కావున, కావలసిన మూల సమీకరణం $25x^2+9y^2=225$.

BABY BULLET-Q

13. ఒక సరళరేఖ P(3,4) గుండాపోతూ x–అక్షం ధనదిశతో 60^0 కోణాన్ని చేస్తోంది. P నుంచి 5 యూ॥ దూరంలో ఆ రేఖపై ఉన్న బిందువుల నిరూపకాలను కనుక్కోండి.

Sol : దత్త బిందువు $P(x_1,y_1)=(3,4),\ r=5,\ \theta=60^o$

కావలసిన బిందువులు $(x_1\pm r\cos\theta, y_1\pm r\sin\theta)=(3\pm5\cos60^o, 4\pm5\sin60^o)=\left(3\pm5\left(\frac{1}{2}\right),4\pm5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$=\left(3+5\left(\frac{1}{2}\right),4+5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\left(\frac{11}{2},\frac{8+5\sqrt{3}}{2}\right)$ మరియు $\left(3-5\left(\frac{1}{2}\right),4-5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{8-5\sqrt{3}}{2}\right)$

---

14. $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{if } x\le 0\\ x^2+a & \text{if } 0<x<1\\ bx+3 & \text{if } 1\le x\le 3\\ -3 & \text{if } x>3\end{cases}$ గా నిర్వచితమైన ప్రమేయం R పై అవిచ్ఛిన్నం అయ్యే a,b లను కనుక్కోండి.

Sol: f(x) ప్రమేయం R మీద అవిచ్ఛిన్నం ⇒ x =0,3 ల వద్ద f(x) అవిచ్ఛిన్నం అగును.

(i) x =0 వద్ద f(x) అవిచ్ఛిన్నం

$$L.H.L=\underset{x\to0-}{Lt} f(x)=\underset{x\to0-}{Lt} \sin x=\sin 0=0$$

$$R.H.L=\underset{x\to0+}{Lt} f(x)=\underset{x\to0+}{Lt} x^2+a=0^2+a=a$$

కాని, x =0 వద్ద f(x) అవిచ్ఛిన్నం ⇒ L.H.L = R.H.L ⇒ a=0

(ii)x =3 వద్ద f(x) అవిచ్ఛిన్నం

$$L.H.L=\underset{x\to3-}{Lt} f(x)=\underset{x\to3-}{Lt} (bx+3)=3b+3$$

$$R.H.L=\underset{x\to3+}{Lt} f(x)=\underset{x\to3+}{Lt} (-3)=-3$$

కాని, x =3 వద్ద f(x) అవిచ్ఛిన్నం ⇒ L.H.L = R.H.L ⇒ 3b+3 = –3

⇒3b= –6 ⇒b= –2

BABY BULLET-Q

15. పాథమిక సూత్రాన్ని ఉపయోగించి cosax యొక్క అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: f(x)=cosax అనుకుంటే

f(x+h)=cosa(x+h)=cos(ax+ah)

ప్రాథమిక సూత్రం నుండి $f'(x)=\underset{h\to 0}{Lt}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\cos(ax+ah)-\cos(ax)}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lt}\frac{1}{h}\left[-2\sin\left(\frac{(ax+ah)+ax}{2}\right)\sin\left(\frac{(\cancel{ax}+ah)-\cancel{ax}}{2}\right)\right] \quad \left[\because \cos C-\cos D=-2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)\right]$$

$$=-2\underset{h\to 0}{Lt}\frac{1}{h}\left[\sin\left(\frac{2ax+ah}{2}\right)\sin\left(\frac{ah}{2}\right)\right]=-2\underset{h\to 0}{Lt}\frac{1}{h}\left[\sin\left(ax+\frac{ah}{2}\right)\sin\frac{ah}{2}\right]$$

$$=-2\underset{h\to 0}{Lt}\sin\left(ax+\frac{ah}{2}\right)\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\sin\left(\frac{ah}{2}\right)}{h}=-2\sin(ax+0)\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$=-\cancel{2}\sin ax\left(\frac{a}{\cancel{2}}\right)=-a\sin ax$$

---

16. $y=a^{1-k}.x^k$ అనే వక్రానికి ఉపలంబఖండము స్థిరమయితే k విలువ కనుగొనుము.

Sol: • దత్త వక్రం పై బిందువు P(x,y) అనుకొనుము.

★$y=a^{1-k}x^k$ ను x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా, $\dfrac{dy}{dx}=a^{1-k}kx^{k-1}$

★∴ P(x,y) వద్ద ఉపఅభిలంబరేఖ పొడవు $\left|y\dfrac{dy}{dx}\right|=|ya^{1-k}kx^{k-1}|$

$$=|(a^{1-k}x^k)a^{1-k}(k)x^{k-1}|=|ka^{2-2k}.x^{2k-1}|$$

★పై సమాసము ఒక స్థిరవిలువ అయినచో $2k-1=0 \Rightarrow k=1/2$

BABY BULLET-Q

17. **ఒక సమఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం 9 క్యూబిక్ సెం.మీ/సె. చొప్పున పెరుగుచున్నది. భుజం పొడవు 10 సెం.మీ గా ఉన్నప్పుడు ఉపరితల వైశాల్యం పెరిగే రేటును కనుగొనుము.**

Sol:
- సమఘనము యొక్క భుజము పొడవు= x ,
- ఘనపరిమాణం=V మరియు ఉపరితల వైశాల్యం=S అనుకొనుము

★ దత్తాంశం నుండి $\frac{dV}{dt}=9$ క్యూబిక్ సెం.మీ/సె. మరియు x=10 సెం.మీ

★ సమఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం $V=x^3$

★ 't' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా $\frac{dV}{dt}=3x^2\frac{dx}{dt}$

★ $\Rightarrow 9=3x^2\frac{dx}{dt}\Rightarrow\frac{dx}{dt}=\frac{9}{3x^2}=\frac{3}{x^2}$

★ ఉపరితల వైశాల్యం $S=6x^2$

★ 't' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

★ $\frac{dS}{dt}=12x\frac{dx}{dt}=12x\left(\frac{3}{x^2}\right)$

★ $=\frac{36}{x}=\frac{36}{10}=3.6$ సెం.మీ^{2}/సె.

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-సి

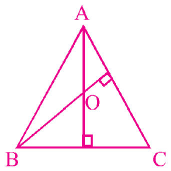
18. (5,–2), (–1,2), (1,4) శీర్షాలుగా గల త్రిభుజ లంబకేంద్రాన్ని కనుక్కోండి.

Sol:
- లంబకేంద్రం O(x,y) అనుకొనిన
- A=(5,–2), B=(–1,2), C= (1,4) శీర్షాలు

స్టెప్ 1: A (5,–2) గుండా పోయే ఉన్నతి సమీకరణం:

$\overline{BC}$ యొక్క వాలు m $=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-2}{1+1}=\frac{2}{2}=1$

దీనికి లంబంగా ఉండే రేఖవాలు $\frac{-1}{m}=\frac{-1}{1}=-1$



A(5,–2) గుండా పోతూ వాలు –1 గా కలిగిన ఉన్నతి సమీకరణం $y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$

$\Rightarrow y+2=-1(x-5)\Rightarrow y+2=-x+5$
$\Rightarrow x+y-3=0$ .... (1)

స్టెప్ 2: B(–1,2) గుండా పోయే ఉన్నతి సమీకరణం

$\overline{AC}$ యొక్క వాలు

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-(-2)}{1-5}=\frac{6}{-4}=-\frac{3}{2}$

దీనికి లంబంగా ఉండే రేఖవాలు $\frac{-1}{m}=\frac{-1}{-\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$

B(–1,2) గుండా పోతూ వాలు $\frac{2}{3}$ గా కలిగిన ఉన్నతి సమీకరణం $y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$

$\Rightarrow y-2=\frac{2}{3}(x+1)\Rightarrow 3y-6=2(x+1)$

$\Rightarrow 3y-6=2x+2\Rightarrow 2x-3y+2+6=0$
$\Rightarrow 2x-3y+8=0$ .... (2)

స్టెప్ 3: (1), (2) లను సాధించగా O వచ్చును.

$(1)\Rightarrow x+y-3=0$
$(2)\Rightarrow 2x-3y+8=0$

$\therefore \frac{x}{1(8)-(-3)(-3)}=\frac{y}{(-3)(2)-(8)(1)}=\frac{1}{1(-3)-(2)(1)}$

$\Rightarrow \frac{x}{8-9}=\frac{y}{-6-8}=\frac{1}{-3-2}$

$\Rightarrow \frac{x}{-1}=\frac{y}{-14}=\frac{1}{-5}\Rightarrow x=\frac{-1}{-5}=\frac{1}{5};\ y=\frac{-14}{-5}=\frac{14}{5}$

$\Rightarrow x=\frac{1}{5}$, $y=\frac{14}{5}$

$\therefore$ లంబకేంద్రం $O(x,y)=\left(\frac{1}{5},\frac{14}{5}\right)$

BABY BULLET-Q

19. **$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ అనునది ఒక సరళరేఖాయుగ్మాన్ని సూచించే ఈ క్రింది నియమాలను నిరూపించండి. (a) $\Delta=abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ (b) $h^2\geq ab,\ f^2\geq bc,\ g^2\geq ac$.**

Sol: ★$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c\equiv(l_1x+m_1y+n_1)(l_2x+m_2y+n_2)$ అనుకొందాం.

- సరూప పదాల గుణకాలను పోల్చగా

★ $a=l_1l_2,\ b=m_1m_2,\ c=n_1n_2,\ 2h=l_1m_2+l_2m_1,\ 2g=l_1n_2+l_2n_1,\ 2f=m_1n_2+m_2n_1$

(a) $(2h)(2g)(2f)=(l_1m_2+l_2m_1)(l_1n_2+l_2n_1)(m_1n_2+m_2n_1)$

- పై పదాలను గుణించి వాటిని ఒక క్రమపద్ధతిలో వ్రాయగా

★ $8fgh=l_1l_2(m_1^2n_2^2+m_2^2n_1^2)+m_1m_2(n_1^2l_2^2+n_2^2l_1^2)+n_1n_2(l_1^2m_2^2+l_2^2m_1^2)+2l_1l_2m_1m_2n_1n_2$

★ $=l_1l_2[(m_1n_2+m_2n_1)^2-2m_1m_2n_1n_2]+m_1m_2[(n_1l_2+n_2l_1)^2-2n_1n_2l_1l_2)]+$

$+n_1n_2[(l_1m_2+l_2m_1)^2-2l_1l_2m_1m_2)]+2l_1l_2m_1m_2n_1n_2$

★ $\Rightarrow 8fgh=a((2f)^2-2bc)+b((2g)^2-2ac)+c((2h)^2-2ab)+2abc=4af^2+4bg^2+4ch^2-4abc$

- $\Rightarrow 8fgh=4(af^2+bg^2+ch^2-abc)\Rightarrow 2fgh=af^2+bg^2+ch^2-abc$
- $\Rightarrow abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$

★ **(b)** $h^2-ab=\left(\dfrac{l_1m_2+l_2m_1}{2}\right)^2-\dfrac{(l_1l_2)(m_1m_2)}{1}$

★ $=\dfrac{(l_1m_2+l_2m_1)^2-4l_1l_2m_1m_2}{4}=\dfrac{(l_1m_2-l_2m_1)^2}{4}\geq 0$

- $\therefore h^2-ab\geq 0\Rightarrow h^2\geq ab$

★ $g^2-ac=\left(\dfrac{l_1n_2+l_2n_1}{2}\right)^2-\dfrac{(l_1l_2)(n_1n_2)}{1}$

★ $=\dfrac{(l_1n_2+l_2n_1)^2-4(l_1n_2)(l_2n_1)}{4}=\dfrac{(l_1n_2-l_2n_1)^2}{4}\geq 0$

- $\therefore g^2-ac\geq 0\Rightarrow g^2\geq ac$

★ $f^2-bc=\left(\dfrac{m_1n_2+m_2n_1}{2}\right)^2-\dfrac{(m_1m_2)(n_1n_2)}{1}$

★ $=\dfrac{(m_1n_2+m_2n_1)^2-4(m_1n_2)(m_2n_1)}{4}=\dfrac{(m_1n_2-m_2n_1)^2}{4}\geq 0$

- $\therefore f^2-bc\geq 0\Rightarrow f^2\geq bc$

BABY BULLET-Q

20. **$2x^2-2xy+3y^2+2x-y-1=0$ వక్రం $x+2y=k$ రేఖల ఖండన బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపే రేఖలు పరస్పరం లంబాలయితే k విలువ కనుక్కోండి.**

Sol: • దత్తరేఖ $x+2y=k \Rightarrow \frac{x+2y}{k}=1$ ...(1)

• దత్త వక్రం $2x^2-2xy+3y^2+2x-y-1=0$............(2)

• (1) & (2) ల నుండి సమఘాతీకరణ సమీకరణం

★ $2x^2-2xy+3y^2+2x(1)-y(1)-(1)^2=0$

★ $\Rightarrow 2x^2-2xy+3y^2+2x\left(\frac{x+2y}{k}\right)-y\left(\frac{x+2y}{k}\right)-\frac{(x+2y)^2}{k^2}=0$

★ $\Rightarrow \frac{k^2(2x^2-2xy+3y^2)+k(2x^2+4xy)-k(xy+2y^2)-(x^2+4y^2+4xy)}{k^2}=0$

★ $\Rightarrow k^2(2x^2-2xy+3y^2)+k(2x^2+4xy)-k(xy+2y^2)-(x^2+4y^2+4xy)=0$

★ $\Rightarrow x^2(2k^2+2k-1)+y^2(3k^2-2k-4)+xy(-2k^2+3k-4)=0$

• సరళరేఖాయుగ్మాలు పరస్పర లంబాలు అయితే

★ x^2 గుణకం + y^2 గుణకం = 0

• $\Rightarrow (2k^2 \cancel{+2k} -1)+(3k^2 \cancel{-2k} -4)=0 \Rightarrow 5k^2-5=0$

• $\Rightarrow \cancel{5}(k^2-1)=0 \Rightarrow k^2-1=0 \Rightarrow k^2=1 \Rightarrow k=\pm1$

కావున, k విలువ ±1

BABY BULLET-Q

21. **రెండు రేఖల దిక్ కొసైన్‌లు $l+m+n=0, 2mn+3nl-5lm=0$ అనే సమీకరణాలను పరస్పరము లంబంగా ఉండునని చూపుము.**

Sol: దత్తాంశం నుండి $l+m+n=0 \Rightarrow l=-(m+n)$ ....(1);

$2mn+3nl-5lm=0$ .....(2)

(1) & (2) లను సాధించగా $2mn-3n(m+n)+5m(m+n)=0$

$\Rightarrow 2mn-3mn-3n^2+5m^2+5mn=0 \Rightarrow 5m^2+4mn-3n^2=0$

$$\Rightarrow \frac{5m^2}{n^2}+\frac{4mn}{n^2}-\frac{3n^2}{n^2}=0 \Rightarrow 5\left(\frac{m}{n}\right)^2+4\left(\frac{m}{n}\right)-3=0$$

పై సమీకరణమును $\frac{m}{n}$ లో వర్గ సమీకరణంగా పరిగణిస్తూ వాటి మూలాలను $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}$ అనుకుంటే

మూలాల లబ్ధం $\frac{m_1}{n_1}.\frac{m_2}{n_2}=\frac{c}{a}=\frac{-3}{5}$ [$\because ax^2+bx+c=0$ యొక్క మూలాల లబ్ధం $\alpha\beta=\frac{c}{a}$]

$$\Rightarrow \frac{m_1m_2}{n_1n_2}=-\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{m_1m_2}{3}=\frac{n_1n_2}{-5} \quad ....(3)$$

(1) నుండి, $n=-(l+m)$

n యొక్క ఈ విలువను (2) లో ప్రతిక్షేపించగా $-2m(l+m)-3l(l+m)-5lm=0$

$\Rightarrow -2lm-2m^2-3l^2-3lm-5lm=0 \Rightarrow 3l^2+10lm+2m^2=0$

$$\Rightarrow \frac{3l^2}{m^2}+\frac{10lm}{m^2}+\frac{2m^2}{m^2}=0 \Rightarrow 3\left(\frac{l}{m}\right)^2+10\left(\frac{l}{m}\right)+2=0$$

పై సమీకరణమును $\frac{l}{m}$ లో వర్గ సమీకరణంగా పరిగణిస్తూ వాటి మూలాలను $\frac{l_1}{m_1}, \frac{l_2}{m_2}$ అనుకుంటే

మూలాల లబ్ధం $\frac{l_1}{m_1}.\frac{l_2}{m_2}=\frac{c}{a}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{l_1l_2}{m_1m_2}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{l_1l_2}{2}=\frac{m_1m_2}{3}$ .....(4)

(3), (4) నుండి $\frac{l_1l_2}{2}=\frac{m_1m_2}{3}=\frac{n_1n_2}{-5}=k$ (అనుకుంటే)

$\Rightarrow l_1l_2=2k, m_1m_2=3k, n_1n_2=-5k$

$\therefore l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=2k+3k-5k=5k-5k=0.$

ఈ రెండు సరళరేఖలు పరస్పరము లంబము.

BABY BULLET-Q

22. $(\sin x)^{\log x}+x^{\sin x}$ **యొక్క అవకలనిని కనుగొనుము.**

Sol: ★ $y=(\sin x)^{\log x}+x^{\sin x}$...........(1) అనుకొందాం.

- $u=(\sin x)^{\log x}$ అనుకొనిన

ఇరువైపులా log తీసుకొనగా

$\log u=\log(\sin x)^{\log x}$

$\Rightarrow \log u=\log x[\log\sin x]$

uv సూత్రాన్ని ఉపయోగించి అవకలనం చేయగా

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\log x\left(\frac{1}{\sin x}(\cos x)\right)+\log\sin x\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\left(\log x.\cot x+\frac{\log\sin x}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}=u\left(\log x.\cot x+\frac{\log\sin x}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}=\sin x^{\log x}\left(\log x\cot x+\frac{\log\sin x}{x}\right)$$

$v=x^{\sin x}$ అనుకొనిన

ఇరువైపులా log తీసుకొనగా

$\log v=\log x^{\sin x}$

$\Rightarrow \log v=\sin x[\log x]$

uv సూత్రాన్ని ఉపయోగించి అవకలనం చేయగా

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}=\sin x\left(\frac{1}{x}\right)+\log x.\cos x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}=\left(\frac{\sin x}{x}+\log x.\cos x\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx}=v\left(\frac{\sin x}{x}+\log x.\cos x\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx}=x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\log x.\cos x\right)$$

(1) నుండి $y=u+v$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\sin x^{\log x}\left(\log x.\cot x+\frac{\log\sin x}{x}\right)+x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\log x.\cos x\right)$$

BABY BULLET-Q

23. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ **వక్రంపై ఏదైనా బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ నిరూపకాక్షాలను A,B బిందువులతో ఖండిస్తే, AB పొడవు స్థిరమని చూపండి.**

Sol: ★ దత్త వక్రానికి పరామితీయ బిందువు $P(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ అయిన

- $x=a\cos^3\theta$ and $y=a\sin^3\theta$

★ $$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\frac{d}{d\theta}(a\sin^3\theta)}{\frac{d}{d\theta}(a\cos^3\theta)}=\frac{a.3\sin^2\theta(\cos\theta)}{a.3\cos^2\theta(-\sin\theta)}=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

- $P(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు $m=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

★ $\therefore$ $P(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ వద్ద $-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ వాలుగా గల స్పర్శరేఖా సమీకరణం $y-y_1=m(x-x_1)$

★ $$\Rightarrow y-a\sin^3\theta=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(x-a\cos^3\theta)$$

- $$\Rightarrow \frac{y-a\sin^3\theta}{\sin\theta}=-\frac{(x-a\cos^3\theta)}{\cos\theta}$$

- $$\Rightarrow \frac{y}{\sin\theta}-\frac{a\sin^3\theta}{\sin\theta}=-\frac{x}{\cos\theta}+\frac{a\cos^3\theta}{\cos\theta}$$

- $$\Rightarrow \frac{x}{\cos\theta}+\frac{y}{\sin\theta}=a\cos^2\theta+a\sin^2\theta=a(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a(1)$$

- $$\Rightarrow \frac{x}{a\cos\theta}+\frac{y}{a\sin\theta}=1$$

★ $\therefore$ $A=(a\cos\theta, 0)$, $B=(0, a\sin\theta)$

- $$\therefore AB=\sqrt{(a\cos\theta-0)^2+(0-a\sin\theta)^2}$$

$$=\sqrt{a^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}=\sqrt{a^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\sqrt{a^2(1)}=a$$

$\therefore$ కావున AB పొడవు స్థిరము

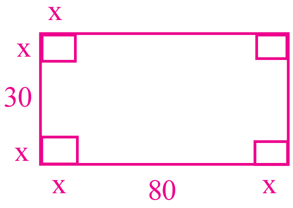
BABY BULLET-Q

24. 30 సెం.మీ x 80 సెం.మీ కొలతలుగా ఉండే ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారపు రేకు ముక్క నాలుగు మూలల నుంచి భుజంగా ఉండే చతురస్రాకార ముక్కలను కత్తిరించి మిగిలిన రేకును మడిచి మూతలేని పెట్టెను తయారు చేశారు. ఆ పెట్టె ఘనపరిమాణం గరిష్ఠం అయితే x ఎంత?

Sol: ★పెట్టె యొక్క

ఎత్తు $h=x$

పొడవు $l=80-2x$ } .....(1)



వెడల్పు $b=30-2x$ అనుకొనుము.

★పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణం $V=lbh=(80-2x)(30-2x)(x)$

• $=2(40-x)\,2(15-x)(x)$

• $=4(40-x)(15-x)(x)=4(600-40x-15x+x^2)x$

• $=4(600-55x+x^2)x=4(x^3-55x^2+600x)$

★$V(x)=4(x^3-55x^2+600x)$ .....(2)

•(2) ను x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

•$V'(x)=4(3x^2-110x+600)$ .....(3)

•$V'(x)=0 \Rightarrow \not{4}(3x^2-110x+600)=0$

గరిష్ట లేదా కనిష్ట విలువ వద్ద $V'(x)=0$ అగును.

★ $\Rightarrow 3x^2-90x-20x+600=0$

• $\Rightarrow 3x(x-30)-20(x-30)=0 \Rightarrow (3x-20)(x-30)=0$

• $\Rightarrow 3x=20$ (or) $x=30 \Rightarrow x=20/3$ (or) $x=30$

• ఇప్పుడు (3)ను x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

★ $V''(x)=4(6x-110)$ ....(4)

★ $x=\frac{20}{3}$ వద్ద (4) నుండి

★ $V''\left(\frac{20}{3}\right)=4\left(\not{6}\left(\frac{20}{\not{3}}\right)-110\right)=4(40-110)=4(-70)=-280$

•కావున $V''\left(\frac{20}{3}\right)<0$

•∴ $V(x)$ యొక్క గరిష్ట విలువ $x=\frac{20}{3}$ సెం.మీ. వద్ద ఉండును.

BABY BULLET-Q