Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH -2024 (AP)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2024(AP)

Time : 3 Hours

గణితశాస్త్రం - 1A

Max Marks: 75

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: **$10 \times 2 = 20$**

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ వాస్తవ మూల్య ప్రమేయంకు ప్రదేశం కనుక్కోండి.

2. $A=\{1,2,3,4\}$, $f:A \to R$ అనే ప్రమేయంను $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x+1}$ గా నిర్వచించిన f యొక్క వ్యాప్తిని కనుక్కోండి.

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & k \end{bmatrix}$ మరియు $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ అయిన k విలువను కనుగొనుము.

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$, $2X+A=B$ అయిన X ను కనుగొనుము.

5. OABC సమాంతర చతుర్భుజంలో యిన $\overline{OA} = \bar{a}, \overline{OC} = \bar{c}$, అయితే BC రేఖ సదిశా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

6. $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j}$ అనే సదిశ దిశలో ఉంటూ పరిమాణం 7 యూనిట్లు గల సదిశను కనుగొనుము.

7. $4\bar{i} + \dfrac{2p}{3}\bar{j} + p\bar{k}$ సదిశ $\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$ కు సమాంతరం అయితే, p విలువను కనుక్కోండి.

8. $\dfrac{\cos 9^\circ + \sin 9^\circ}{\cos 9^\circ - \sin 9^\circ} = \cot 36^\circ$ అని నిరూపించండి.

9. ఆవర్తనం 2/3 గల ఒక సైన్ ప్రమేయమును కనుగొనుము. 10. $\cosh^4 x - \sinh^4 x = \cosh 2x$ అని నిరూపించండి.

సెక్షన్-బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. **$5 \times 4 = 20$**

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ యొక్క అనుబంధ మాత్రికను, విలోమ మాత్రికను కనుక్కోండి.

12. $A(2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k})$, $B(\bar{i} - 3\bar{j} - 5\bar{k})$, $C(3\bar{i} - 4\bar{j} - 4\bar{k})$ అనే బిందువులు ఒక లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క శీర్షాలు అని చూపుము.

13. యూనిట్ సదిశలు $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ మధ్య కోణం θ అయి $\dfrac{1}{2}|\bar{e}_1 - \bar{e}_2| = \sin(\lambda\theta)$ అయితే, λ విలువను కనుక్కోండి.

14. $\cos^4\dfrac{\pi}{8} + \cos^4\dfrac{3\pi}{8} + \cos^4\dfrac{5\pi}{8} + \cos^4\dfrac{7\pi}{8} = \dfrac{3}{2}$ అని చూపండి. **15.** $1+\sin^2\theta = 3\sin\theta\cos\theta, \cos\theta \neq 0$ ను సాధించండి.

16. $\cos\left(2\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{7}\right) = \sin\left(2\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$ అని చూపండి. **17.** $a=(b-c)\sec\theta$ అయిన $\tan\theta = \dfrac{2\sqrt{bc}}{b-c}\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)$ అని నిరూపించండి.

సెక్షన్-సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. **$5 \times 7 = 35$**

18. $f:A \to B$, $g:B \to C$ లు ద్విగుణ ప్రమేయాలు అయిన $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ అని నిరూపించండి.

19. పరిమిత గణితాను గమన సిద్ధాంతంనుపయోగించి $1^2 + (1^2+2^2) + (1^2+2^2+3^2) + \ldots n$ పదాల వరకు $= \dfrac{n(n+1)^2(n+2)}{12}, \forall n \in N$

20. క్రామర్ పద్ధతినుపయోగించి $x+y+z=9$, $2x+5y+7z=52$, $2x+y-z=0$ లను సాధించండి.

21. $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$ అని చూపండి.

22. $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}, \bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}, \bar{c} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ అయితే $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ ని గణన చేయండి. ఈ సదిశ $\bar{a}$ కి లంబంగా ఉంటుందని సరిచూడండి.

23. A,B,C లు త్రిభుజ కోణాలయితే, $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2\sin A \sin B \cos C$ అని రుజువు చేయండి.

24. ΔABC లో $a = 13, b = 14, c = 15$ అయిన $R = \dfrac{65}{8}, r = 4, r_1 = \dfrac{21}{2}, r_2 = 12, r_3 = 14$ అని చూపండి.

IPE AP MARCH-2024
SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ **అనే ప్రమేయపు ప్రదేశము కనుగొనుము.**

Sol: $|x|-x>0 \Rightarrow |x|>x......(1)$

అనగా $x<0$ అయినప్పుడు మాత్రమే $f(x)$ నిర్వచింపబడును

$\therefore$ ప్రదేశం $=(-\infty,0)$

---

2. **$A=\{1,2,3,4\}$, $f:A\to R$ అనే ప్రమేయంను $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$ గా నిర్వచించిన f యొక్క వ్యాప్తిని కనుక్కోండి**

Sol: దత్తాంశం నుండి $A=\{1,2,3,4\}$ మరియు $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$

$$f(1)=\frac{1^2-1+1}{1+1}=\frac{1}{2};\ f(2)=\frac{2^2-2+1}{2+1}=1;\ f(3)=\frac{3^2-3+1}{3+1}=\frac{7}{4};\ f(4)=\frac{4^2-4+1}{4+1}=\frac{13}{5}$$

$\therefore$ **f** యొక్క వ్యాప్తి $f(A)=\left\{\dfrac{1}{2},1,\dfrac{7}{4},\dfrac{13}{5}\right\}$

---

3. $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & k\end{bmatrix}$ **మరియు** $A^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ **అయిన k విలువను కనుగొనుము.**

Sol: దత్తాంశం నుండి $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & k\end{bmatrix}$

$$\therefore A^2=A\times A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(2)+4(-1) & 2(4)+4(k)\\ -1(2)+k(-1) & -1(4)+k(k)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4-4 & 8+4k\\ -2-k & -4+k^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 8+4k\\ -2-k & -4+k^2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}0 & 8+4k\\ -2-k & -4+k^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad [\because A^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}]$$

$$\Rightarrow 8+4k=0\Rightarrow \cancel{4}k=-\cancel{8}\Rightarrow k=-2$$

4. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 7 & 2\end{bmatrix}$ మరియు 2X+A=B అయిన Xను కనుగొనుము.

Sol: దత్తాంశం నుండి $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 7 & 2\end{bmatrix}$

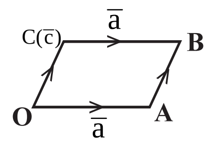
$$2X+A=B \Rightarrow 2X=B-A=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 7 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-1 & 8-2\\ 7-3 & 2-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 4 & -2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\therefore \cancel{2}X=\cancel{2}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow X=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

---

5. OABC సమాంతర చతుర్భుజంలో అయిన $\overline{OA}=\bar{a}, \overline{OC}=\bar{c},$ అయితే BC రేఖ సదిశా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $\overline{OA}=\bar{a}, \overline{OC}=\bar{c}$.



సమాంతర చతుర్భుజం OABC నుండి $\overline{CB}=\overline{OA}=\bar{a}.$

C($\bar{c}$) బిందువు గుండా $\overline{OA}=\bar{a}$ నకు సమాంతరంగా ఉండే

$\overline{\mathbf{BC}}$ రేఖ సదిశా సమీకరణం $\bar{r}=\bar{c}+t\bar{a}, t\in R$]

---

6. $\bar{a}=\bar{i}-2\bar{j}$ అనే సదిశ దిశలో ఉంటూ పరిమాణం7 యూనిట్లు గల సదిశను కనుగొనుము.

Sol: దత్తాంశం నుండి $\bar{a}=\bar{i}-2\bar{j}$ అయిన

$|\bar{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

$\therefore$ యూనిట్ సదిశ $\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}=\dfrac{\bar{i}-2\bar{j}}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ కావలసిన సదిశ $=7\left(\dfrac{\bar{i}-2\bar{j}}{\sqrt{5}}\right)$

---

7. $4\bar{i}+\dfrac{2p}{3}\bar{j}+p\bar{k}$ దిశ $\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$ కు సమాంతరం అయితే, p విలువను కనుక్కోండి.

Sol: $\bar{a}=4\bar{i}+\dfrac{2p}{3}\bar{j}+p\bar{k}$, $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k} \Rightarrow 4\bar{b}=4\bar{i}+8\bar{j}+12\bar{k}$

$4\bar{b}$ నకు సమాంతరంగా $\bar{a}$ ఉన్నది. కావున $\bar{k}$ యొక్క గుణకాలను సరిచూడగా p=12

8. $\dfrac{\cos 9^\circ+\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ-\sin 9^\circ}=\cot 36^\circ$ అని నిరూపించండి.

Sol: $\text{L.H.S}=\dfrac{\cos 9^\circ+\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ-\sin 9^\circ}$

$$=\frac{\dfrac{\cos 9^\circ}{\cos 9^\circ}+\dfrac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ}}{\dfrac{\cos 9^\circ}{\cos 9^\circ}-\dfrac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ}}=\frac{1+\tan 9^\circ}{1-\tan 9^\circ}=\frac{\tan 45^\circ+\tan 9^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 9^\circ}=\tan(45^\circ+9^\circ)=\tan 54^\circ$$

$=\tan(90^\circ-36^\circ)=\cot 36^\circ=\text{R.H.S}$

---

9. ఆవర్తనం 2/3 గల ఒక సైన్ ప్రమేయమును కనుగొనుము.

Sol: కావలసిన సైన్ ప్రమేయము sinkx అనుకొనుము.

sinkx యొక్క ఆవర్తనం $=\dfrac{2\pi}{k}$

$\therefore$ ఆవర్తనం $\dfrac{2\pi}{k}=\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \cancel{2}k=\cancel{6}\pi \Rightarrow k=3\pi$

$\therefore$ కావలసిన సైన్ ప్రమేయము$=\sin(3\pi)x$

---

10. $\cosh^4 x-\sinh^4 x=\cosh 2x$ అని నిరూపించండి.

Sol: $\text{L.H.S}=\cosh^4 x-\sinh^4 x=(\cosh^2 x-\sinh^2 x)(\cosh^2 x+\sinh^2 x)$

$=(1)(\cosh 2x)=\cosh 2x=\text{R.H.S}$

సెక్షన్-బి

11. $A=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}$ **యొక్క అనుబంధ మాత్రికను, విలోమ మాత్రికను కనుక్కోండి.**

Sol: దత్తాంశం నుండి $A=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 1(16-9)-3(4-3)+3(3-4) \quad =7-3-3=1\neq 0$

$\therefore$ A అనుబంధ మాత్రిక

$$\text{Now, Adj A}=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}4&3\\3&4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&4\\1&3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3&3\\3&4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3\\1&3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3&3\\4&3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3\\1&3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}7&-1&-1\\-3&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}^T$$

$$\therefore \text{Adj A}=\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

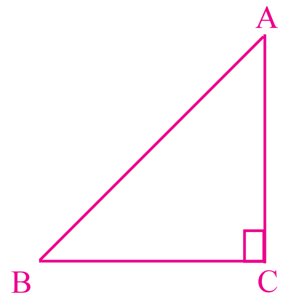
$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{\det A}(\text{Adj A})=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

---

12. $\mathbf{A(2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}), B(\bar{i}-3\bar{j}-5\bar{k}), C(3\bar{i}-4\bar{j}-4\bar{k})}$ **అనే బిందువులు ఒక లంబకోణ త్రిభుజాన్ని ఏర్పరచునని చూపుము.**

Sol: 'O' ఆది బిందువు అయిన $\overline{OA}=(2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}),\ \overline{OB}=(\bar{i}-3\bar{j}-5\bar{k}),\ \overline{OC}=(3\bar{i}-4\bar{j}-4\bar{k})$ అనుకొనుము.

$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=(\bar{i}-3\bar{j}-5\bar{k})-(2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k})=-\bar{i}-2\bar{j}-6\bar{k}$



$\Rightarrow|\overline{AB}|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-6)^2}=\sqrt{1+4+36}=\sqrt{41}$

$\overline{BC}=\overline{OC}-\overline{OB}=(3\bar{i}-4\bar{j}-4\bar{k})-(\bar{i}-3\bar{j}-5\bar{k})=2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$

$\Rightarrow|\overline{BC}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

$\overline{CA}=\overline{OA}-\overline{OC}=(2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k})-(3\bar{i}-4\bar{j}-4\bar{k})=-\bar{i}+3\bar{j}+5\bar{k}$

$\Rightarrow|\overline{CA}|=\sqrt{(-1)^2+3^2+5^2}=\sqrt{1+9+25}=\sqrt{35}$

ఇక్కడ, $|\overline{AB}|^2=41; |\overline{BC}|^2+|\overline{CA}|^2=6+35=41 \Rightarrow |\overline{AB}|^2=|\overline{BC}|^2+|\overline{CA}|^2$

కావున A, B, C లతో ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ఏర్పడును.

13. యూనిట్ సదిశలు $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ మధ్య కోణం θ అయిన $\frac{1}{2}|\bar{e}_1 - \bar{e}_2| = \sin(\lambda\theta)$ అయితే, λ విలువను కనుక్కోండి.

Sol: Given $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ are unit vectors and $(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \theta$ Also, $\frac{1}{2}|\bar{e}_1 - \bar{e}_2| = \sin\lambda\theta \Rightarrow |\bar{e}_1 - \bar{e}_2| = 2\sin\lambda\theta$

$$\Rightarrow |\bar{e}_1 - \bar{e}_2|^2 = (2\sin\lambda\theta)^2 \Rightarrow (|\bar{e}_1|^2 + |\bar{e}_2|^2 - 2\bar{e}_1.\bar{e}_2) = 4\sin^2(\lambda\theta)$$

$$\Rightarrow (1+1-2|\bar{e}_1||\bar{e}_2|\cos\theta) = 4\sin^2\lambda\theta$$

$$\Rightarrow (2-2(1)(1)\cos\theta) = 4\sin^2\lambda\theta \Rightarrow 2(1-\cos\theta) = 4\sin^2\lambda\theta$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\left(\cancel{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = \cancel{4}\sin^2\lambda\theta \Rightarrow \sin^2\frac{\theta}{2} = \sin^2\lambda\theta \qquad \therefore \lambda = \frac{1}{2}$$

---

14. $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$ అని చూపండి.

Sol: $$\cos\frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{4\pi-\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8}$$

$$\cos\frac{5\pi}{8} = \cos\left(\frac{4\pi+\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = -\sin\frac{\pi}{8}$$

$$\cos\frac{7\pi}{8} = \cos\left(\frac{8\pi-\pi}{8}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\frac{\pi}{8}$$

$$\text{L.H.S} = \cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$$

$$= \cos^4\frac{\pi}{8} + \left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^4 + \left(-\sin\frac{\pi}{8}\right)^4 + \left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^4 = \cos^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{\pi}{8}$$

$$= 2\left[\sin^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{\pi}{8}\right]$$

$$= 2\left[\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2 - 2\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}\right], \qquad [\because a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab]$$

$$= 2\left[1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}\right] = 2 - 4\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8} = 2 - \left[2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\right]^2 = 2 - \left[\sin\frac{2\pi}{8}\right]^2$$

$$= 2 - \left[\sin\frac{\pi}{4}\right]^2 = 2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \text{R.H.S}$$

15. $1+\sin^2\theta=3\sin\theta\cos\theta$ను సాధించుము.

Sol: దత్త సమీకరణం $1+\sin^2\theta=3\sin\theta\cos\theta$

దీనిని $\cos^2\theta$ తో భాగించగా, $\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{3\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}$

$\Rightarrow \sec^2\theta+\tan^2\theta=3\tan\theta \Rightarrow (1+\tan^2\theta)+\tan^2\theta=3\tan\theta$ $[\because \sec^2\theta-\tan^2\theta=1]$

$\Rightarrow 2\tan^2\theta-3\tan\theta+1=0$

$\Rightarrow 2\tan^2\theta-2\tan\theta-\tan\theta+1=0$

$\Rightarrow 2\tan\theta(\tan\theta-1)-(\tan\theta-1)=0$

$\Rightarrow (2\tan\theta-1)(\tan\theta-1)=0$

$\Rightarrow \tan\theta=1$ (or) $\tan\theta=1/2$

ఇప్పుడు, $\tan\theta = 1 = \tan \pi/4$.

దీని ప్రధాన విలువ $\alpha=\pi/4$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $\theta=n\pi+\frac{\pi}{4}, n\in Z$ మరియు $\tan\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2}$

దీని ప్రధాన విలువ $\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2}$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $\theta=n\pi+\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2}, n\in Z$

---

16. $\cos\left(2\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{7}\right)=\sin\left(2\mathrm{Tan}^{-1}\frac{3}{4}\right)$అని నిరూపించండి.

Sol: $\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{7}=\alpha\Rightarrow\tan\alpha=\frac{1}{7}$ మరియు $\mathrm{Tan}^{-1}\frac{3}{4}=\beta\Rightarrow\tan\beta=\frac{3}{4}$, అయిన

$$\text{L.H.S}=\cos\left(2\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{7}\right)=\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-\frac{1}{49}}{1+\frac{1}{49}}=\frac{48}{50}=\frac{24}{25}\;\ldots\ldots(1)$$

$$\text{R.H.S}=\sin\left(2\mathrm{Tan}^{-1}\frac{3}{4}\right)=\sin 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1+\tan^2\beta}=\frac{2.\frac{3}{4}}{1+\frac{9}{16}}=\frac{3}{2}\times\frac{16}{25}=\frac{24}{25}\;\ldots\ldots.(2)$$

$\therefore$ (1), (2)ల నుండి $\cos\left(2\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{7}\right)=\sin\left(2\mathrm{Tan}^{-1}\frac{3}{4}\right)$

17. **a=(b–c)secθ అయిన $\tan\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b-c}\sin\left(\frac{A}{2}\right)$ అని నిరూపించండి.**

Sol: దత్తాంశం నుండి a=(b–c)secθ $\Rightarrow \sec\theta = \frac{a}{b-c} \Rightarrow \sec^2\theta = \frac{a^2}{(b-c)^2}$

$\therefore \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1\ [\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1]$

$$= \frac{a^2}{(b-c)^2} - 1 = \frac{a^2-(b-c)^2}{(b-c)^2} = \frac{a^2-(b^2+c^2-2bc)}{(b-c)^2}$$

$$= \frac{2bc-(b^2+c^2-a^2)}{(b-c)^2} = \frac{2bc-(2bc\cos A)}{(b-c)^2}\left(\because \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos A\right)$$

$$= \frac{2bc(1-\cos A)}{(b-c)^2} = \frac{2bc.\left(2\sin^2\frac{A}{2}\right)}{(b-c)^2} = \frac{4bc.\sin^2\frac{A}{2}}{(b-c)^2}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b-c}\sin\left(\frac{A}{2}\right)$$

సెక్షన్-సి

18. $f:A\to B$, $g:B\to C$ లు ద్విగుణ ప్రమేయాలు అయిన $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ అని నిరూపించండి.

Sol: Part -1: $f:A\to B$, $g:B\to C$ లు రెండు ద్విగుణ ప్రమేయాలు

(i) $gof:A\to C$ ద్విగుణ ప్రమేయం. కావున, $(gof)^{-1}: C\to A$ కూడా ద్విగుణ ప్రమేయమగును.

(ii) $f^{-1}:B\to A$, $g^{-1}:C\to B$ లు రెండు ద్విగుణ ప్రమేయాలు$\Rightarrow (f^{-1}og^{-1})$: $C\to A$ కూడా ద్విగుణ ప్రమేయం

కావున, $(gof)^{-1}$ మరియు $f^{-1}og^{-1}$ లకు ఒకే ప్రదేశం 'C' కలదు.

Part–2: $f:A\to B$ ద్విగుణ ప్రమేయం కావున $f(a)=b\Rightarrow a=f^{-1}(b)$........(1), [ఇక్కడ $a\in A$, $b\in B$]

$g:B\to C$ ద్విగుణ ప్రమేయం కావున $g(b)=c\Rightarrow b=g^{-1}(c)$........(2), [ఇక్కడ $b\in B$, $c\in C$]

$gof:A\to C$ ద్విగుణ ప్రమేయం కావున $gof(a)=c \Rightarrow a=(gof)^{-1}(c)$.........(3)

ఇప్పుడు, $(f^{-1}og^{-1})(c)=f^{-1}[g^{-1}(c)]=f^{-1}(b)=a$ ....(4), [(1) & (2) ల నుండి]

$\therefore (gof)^{-1}(c)=(f^{-1}og^{-1})(c)$, $\forall c\in C$, [(3) & (4) ల నుండి]

కావున, $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ అని నిరూపించబడినది.

19. **పరిమిత గణితానుగమన సూత్రంను ఉపయోగించి**

$$1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\dots n \text{ పదాల వరకు } = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}, \forall n \in N \text{ అని చూపండి}$$

Sol: nవ పదము కనుగొనుట:

n వ పదము $T_n = 1^2+2^2+3^2+\dots\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$S(n) : 1^2+(1^2+2^2)+\dots\dots+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$$

Step 1: S(1) యొక్క L.H.S = $1^2 = 1$

$$S(1) \text{ యొక్క R.H.S} = \frac{1(1+1)^2(1+2)}{12} = \frac{1(2^2)3}{12} = \frac{1(4)3}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S.

కావున, S(1) సత్యము

Step 2: $k \in N$ నకు S(k) సత్యము అనుకొనుము.

$$S(k): 1^2+(1^2+2^2)+\dots\dots+\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{k(k+1)^2(k+2)}{12} \qquad \dots\dots(1)$$

Step 3: ఇప్పుడు S(k+1) సత్యమని చూపవలెను.

$$(k+1) \text{ వ పదము} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

(1) నకు ఇరువైపులా (k+1) పదాన్ని కలుపగా

$$\text{L.H.S} = \left[1^2+(1^2+2^2)+\dots\dots+\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\right] + \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{k(k+1)^2(k+2)}{12} + \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{k(k+1)^2(k+2)+2(k+1)(k+2).(2k+3)}{12}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)[k(k+1)+2(2k+3)]}{12}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k^2+5k+6)}{12}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+2)(k+3)}{12} = \frac{(k+1)(k+2)^2(k+3)}{12} = \text{R.H.S}$$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S.

కావున, S(k) సత్యమైన S(k+1) కూడా సత్యమగును.

కావున, పరిమిత గణితానుగమన సిద్ధాంతం నుంచి ప్రతి $n \in N$ కి దత్త ప్రవచనం S(n) సత్యం

20. **$x+y+z=9$, $2x+5y+7z=52$, $2x+y-z=0$ రేఖీయ సమీకరణాలను క్రామర్స్ పద్ధతిన సాధించుము.**

Sol: ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థ యొక్క మాత్రికా సమీకరణ రూపం: $AX = D$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 9 \\ 52 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-5-7) - 1(-2-14) + 1\,(2-10) = -12 + 16 - 8 = -4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 52 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 9(-5-7) - 1(-52-0) + 1\,(52-0) = -108 + 52 + 52 = -4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 2 & 52 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1(-52-0) - 9(-2-14) + 1\,(0-104) = -52 + 144 - 104 = -12$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 5 & 52 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-52) - 1(0-104) + 9(2-10) = -52 + 104 - 72 = -20$$

క్రామర్ పద్ధతి ప్రకారం, $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-4}{-4} = 1$, $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-12}{-4} = 3$, $z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-20}{-4} = 5$

$\therefore$ సాధన $x = 1, y = 3, z = 5$

21. $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$ అని చూపండి

Sol: $\text{L.H.S} = \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2a+2b+2c & a & b \\ 2a+2b+2c & b+c+2a & b \\ 2a+2b+2c & a & c+a+2b \end{vmatrix} (\because C_1 \to C_1 + C_2 + C_3)$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix} (\because R_2 \to R_2 - R_1 \quad R_3 \to R_3 - R_1)$$

$$= 2(a+b+c)1[(a+b+c)^2 - 0] = 2(a+b+c)^3 = \text{R.H.S}$$

22. $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}, \bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}, \bar{c} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, అయిన $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ను గణించుము మరియు అది $\bar{a}$కు లంబంగా ఉంటుందని సరిచూడుము.

Sol: దత్తాంశము నుండి $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}, \bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}, \bar{c} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$

$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$, ను కనుగొనుటకు , మొదటగా బ్రాకెట్ పదము $\bar{b}\times\bar{c}$ ను కనుగొనవలెను

$$\bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i}(1-1) - \bar{j}(1+1) + \bar{k}(-1-1) = -2\bar{j} - 2\bar{k}$$

$$\therefore \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \bar{i}(-6+8) - \bar{j}(-4-0) + \bar{k}(-4-0) = 2\bar{i} + 4\bar{j} - 4\bar{k}$$

ఇప్పుడు, $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}).\bar{a} = (2\bar{i} + 4\bar{j} - 4\bar{k}).(2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}) = 2(2) + 4(3) - 4(4) = 4 + 12 - 16 = 0$

సదిశా లబ్దం సున్నా కావున, $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ నకు $\bar{a}$ లంబంగా ఉన్నది.

---

23. A,B,C లు త్రిభుజ కోణాలయితే, $\cos^2A+\cos^2B-\cos^2C=1-2\sin A\sin B\cos C$ అని రుజువు చేయండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి A,B,C లు త్రిభుజం యొక్క కోణాలైన అప్పుడు $A+B+C=180^\circ$

L.H.S $= \cos^2A + (\cos^2B - \cos^2C)$

$= \cos^2A+\sin(C+B)\sin(C-B)$

$= \cos^2A-\sin(180^\circ-A)\sin(B-C)$ $[\because \sin(-\theta)= -\sin\theta]$

$= \cos^2A-\sin A\sin(B-C)$

$= 1-\sin^2A - \sin A\sin(B-C)$

$= 1-\sin A[\sin A+\sin(B-C)]$

$= 1- \sin A[\sin(180^\circ-(B+C))+\sin(B-C)]$

$= 1- \sin A[\sin(B+C))+\sin(B-C)]$

$= 1- \sin A(2\sin B\cos C)$ $[\because (\sin(A+B))+\sin(A-B))=2\sin A\cos B]$

$= 1-2\sin A\sin B\cos C$ = R.H.S

24. **ΔABC లో a=13, b=14, c=15 అయిన $R=\frac{65}{8}, r=4, r_1=\frac{21}{2}, r_2=12, r_3=14$ అని చూపండి.**

Sol: దత్తాంశం నుండి a=13, b=14, c=15 , అప్పుడు

$$2s=a+b+c=13+14+15=42 \Rightarrow \cancel{2}s=\cancel{42} \Rightarrow s=21$$

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$$

$$=\sqrt{21\times(8)(7)(6)}=\sqrt{(3\times7)(4\times2)(7)(3\times2)}=\sqrt{3^2\times4^2\times7^2}=3\times4\times7=84$$

(i) $R=\frac{abc}{4\Delta}=\frac{13\times14\times15}{4\times84}=\frac{65}{8}$

(ii) $r=\frac{\Delta}{s}=\frac{\cancel{84}}{\cancel{21}}=4$;

(iii) $r_1=\frac{\Delta}{s-a}=\frac{84}{21-13}=\frac{\cancel{84}}{\cancel{8}}=\frac{21}{2}$

(iv) $r_2=\frac{\Delta}{s-b}=\frac{84}{21-14}=\frac{\cancel{84}}{\cancel{7}}=12$

(v) $r_3=\frac{\Delta}{s-c}=\frac{84}{21-15}=\frac{\cancel{84}}{\cancel{6}}=14$