# 2B (TM)

BULLET

## MODEL PAPER

A 'MULTI QUESTION PAPER' WITH 'BULLET ANSWERS'

## SAQ & LAQ SECTIONS

## SAQ సెక్షన్ - B

### Q11. వృత్తము:

- **$x^2+y^2-8x-2y-8=0$ వృత్తము $x+y+1=0$ సరళరేఖపై చేయు అంతరఖండం యొక్క జ్యా పొడవు కనుగొనుము.**

**A:** $x^2+y^2+8x-2y-8=0$ వృత్తానికి

కేంద్రము $C=(4,1)$, వ్యాసార్థము $r=\sqrt{16+1+8}=\sqrt{25}=5$

కేంద్రము $(4,1)$ నుండి $x+y+1=0$ రేఖకు లంబదూరము $p$ అయితే

$$p=\frac{|4+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{3\times 2}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

$\therefore$ జ్యా పొడవు $=2\sqrt{r^2-p^2}=2\sqrt{5^2-(3\sqrt{2})^2}$

$=2\sqrt{25-9(2)}=2\sqrt{25-18}=2\sqrt{7}$

- **$x^2+y^2-2x+4y=0$ అనే వృత్తం మీద $(3,-1)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము కనుగొనుము మరియు ఆ స్పర్శరేఖకు సమాంతరముగా ఉన్న స్పర్శరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము.**

**A: (i) $(3,-1)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుట:**

$(3,-1)$ వద్ద $S\equiv x^2+y^2-2x+4y=0$ స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$S_1=0$

$\Rightarrow x(3)+y(-1)-(x+3)+2(y-1)=0$

$\Rightarrow 3x-y-x-3+2y-2=0\Rightarrow 2x+y-5=0$

**(ii) సమాంతర స్పర్శరేఖను కనుగొనుట:**

$2x+y-5=0$ స్పర్శరేఖ వాలు $m=-2$.

మరియు $x^2+y^2-2x+4y=0\Rightarrow g=-1;\ f=2$.

వ్యాసార్థం $r=\sqrt{1^2+(-2)^2-0}=\sqrt{1+4-0}=\sqrt{5}$

**సూత్రం:** $m$ వాలుగా కలిగిన స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$y+f=m(x+g)\pm r\sqrt{1+m^2}$

$\Rightarrow (y+2)=-2(x-1)\pm\sqrt{5}\sqrt{1+4}$

$\Rightarrow (y+2)=-2(x-1)\pm 5\Rightarrow 2x+y\pm 5=0$

$\therefore$ లంబ స్పర్శరేఖ సమీకరణం $2x+y+5=0$

- **$S=x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ వృత్తానికి బాహ్య బిందువు $(0,0)$ నుండి గీచిన స్పర్శరేఖలు లంబంగా ఉండటానికి నియమం కనుక్కోండి.**

**A:** $P(0,0)$ నుండి $S=0$కు గల స్పర్శరేఖాయుగ్మం మధ్యకోణం $\theta$ అయితే $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{r}{\sqrt{S_{11}}}$

$$\Rightarrow \tan\frac{90^\circ}{2}=\frac{\sqrt{g^2+f^2-c}}{\sqrt{0^2+0^2+2g(0)+2f(0)+c}}$$

$$\Rightarrow \tan 45^0=1=\frac{\sqrt{g^2+f^2-c}}{\sqrt{c}}$$

$$\Rightarrow 1^2=\frac{g^2+f^2-c}{c}$$

$\Rightarrow c=g^2+f^2-c\Rightarrow g^2+f^2=2c$

- **$x^2+y^2-4x+6y-12=0$ వృత్తం దృష్ట్యా $x+y+2=0$ రేఖ ధ్రువము కనుగొనుము.**

**A:** $x+y+2=0$ రేఖ ధ్రువము $P(x_1,y_1)$ అనుకొనుము.

$S=x^2+y^2-4x+6y-12=0$ వృత్తం దృష్ట్యా $P(x_1,y_1)$ ధ్రువము

$S_1=0$

$\Rightarrow x_1x+y_1y-2(x_1+x)+3(y_1+y)-12=0$

$\Rightarrow (x_1-2)x+(y_1+3)y-2x_1+3y_1-12=0$

పై సమీకరణాన్ని $x+y+2=0$ తో పోల్చగా,

$$\frac{x_1-2}{1}=\frac{y_1+3}{1}=\frac{-2x_1+3y_1-12}{2}=k(say)$$

$\Rightarrow x_1-2=k;\ y_1+3=k$ మరియు $-2x_1+3y_1-12=2k$

$\Rightarrow x_1=k+2,\ y_1=k-3$

$\therefore -2(k+2)+3(k-3)-12=2k$

$\Rightarrow -2k-4+3k-9-12=2k\Rightarrow k=-25$

$\therefore x_1=k+2=-25+2=-23$ మరియు $y_1=k-3=-25-3=-28$

$\therefore$ ధృవం $P(x_1,y_1)=(-23,-28)$

- **$x^2+y^2-2x-2y-1=0$ అనే వృత్తం దృష్ట్యా $x+y-5=0$, $2x+ky-8=0$ అనే రేఖలు సంయుగ్మాలైతే $k$ విలువ కనుగొనుము.**

**A:** దత్త రేఖల నుండి, $l_1=1, m_1=1, n_1=-5;$

$l_2=2, m_2=k, n_2=-8;$

$x^2+y^2-2x-2y-1=0$ దత్త వృత్తం నుండి

$\Rightarrow g=-1, f=-1, c=-1$

వ్యాసార్థం $r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

**సంయుగ్మ రేఖల నియమం:**

$r^2(l_1l_2+m_1m_2)=(l_1g+m_1f-n_1)(l_2g+m_2f-n_2)$

$\Rightarrow 3((1\times 2)+(1\times k))=(-1-1+5)(-2-k+8)$

$\Rightarrow 3(2+k)=(3)(6-k)\Rightarrow 2+k=6-k$

$\Rightarrow 2k=4\Rightarrow k=2$

### Q12: వృత్త సరణులు:

- **$x^2+y^2-4x-6y+5=0, x^2+y^2-2x-4y-1=0$, $x^2+y^2-6x-2y=0$ అనే వృత్తాల మూలకేంద్రం కనుక్కోండి**

**A:** ఇచ్చిన వృత్తాలు $S=x^2+y^2-4x-6y+5=0$,

$S'=x^2+y^2-2x-4y-1=0,\ S''=x^2+y^2-6x-2y=0$

మొదటి మరియు రెండవ వృత్తాల మూలాక్షము $S-S'=0$

$\Rightarrow (-4x+2x)+(-6y+4y)+(5+1)=0$

$\Rightarrow -2x-2y+6=0\Rightarrow -2(x+y-3)=0\Rightarrow x+y-3=0$ .... (1)

మొదటి మరియు మూడవ వృత్తాల మూలాక్షము $S-S''=0$

$\Rightarrow (-4x+6x)+(-6y+2y)+5=0\Rightarrow 2x-4y+5=0$ .... (2)

ఇప్పుడు, $(1)\times 2\Rightarrow 2x+2y-6=0$ ....(3)

$(3)-(2)\Rightarrow 6y-11=0\Rightarrow y=11/6$

(1)నుండి, $x=3-y=3-\frac{11}{6}=\frac{18-11}{6}=\frac{7}{6}$

$\therefore$ మూలకేంద్రం $(7/6,11/6)$

- **$x^2+y^2+2x+2y+1=0$, $x^2+y^2+4x+3y+2=0$ అనే వృత్తాల ఉమ్మడి జ్యా సమీకరణం మరియు పొడవును కనుగొనుము.**

**A:** దత్త వృత్తాలు $S\equiv x^2+y^2+2x+2y+1=0$ మరియు
$S'\equiv x^2+y^2+4x+3y+2=0$
వీటి ఉమ్మడి జ్యా సమీకరణము $S-S'=0$
$\Rightarrow -2x-y-1=0 \Rightarrow 2x+y+1=0$
$S\equiv x^2+y^2+2x+2y+1=0$ అనే వృత్త

కేంద్రం $C(-1,-1)$, వ్యాసార్థము $r=\sqrt{1^2+1^2-1}=\sqrt{1+1-1}=\sqrt{1}=1$
$C(-1,-1)$ నుండి $2x+y+1=0$ అనే రేఖకు గల లంబదూరం

$$=\frac{|2(-1)-1+1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|-2|}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\therefore$ ఉమ్మడి జ్యా పొడవు

$$p=2\sqrt{r^2-p^2}=2\sqrt{1-\frac{4}{5}}=2\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\text{ units}$$

- **$x^2+y^2-2x+4y-8=0$ వృత్తానికి, AB అనే జ్యా సమీకరణం $x+y=3$ అయితే $\overline{AB}$ వ్యాసంగా ఉండే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.**

**A:** దత్త వృత్తం $S\equiv x^2+y^2-2x+4y-8=0$
మరియు రేఖ $L\equiv x+y-3=0$
$S=0$, $L=0$ల ఖండన బిందువు గుండా పోవు ఏదైనా వృత్త సమీకరణం
$S+\lambda L=0$
$\Rightarrow (x^2+y^2-2x+4y-8)+\lambda(x+y-3)=0$
$\Rightarrow x^2+y^2-(2-\lambda)x+(4+\lambda)y-(3\lambda+8)=0$....(1)
పై వృత్త కేంద్రం $\left(\frac{2-\lambda}{2},-\frac{4+\lambda}{2}\right)$

$L=0$ అనే రేఖ వృత్త వ్యాసమైతే పై వృత్త కేంద్రం $L=x+y-3=0$ పై ఉండును. $\Rightarrow\left(\frac{2-\lambda}{2}\right)-\left(\frac{4+\lambda}{2}\right)-3=0$
$\Rightarrow 2-\lambda-4-\lambda-6=0 \Rightarrow 2\lambda=-8 \Rightarrow \lambda=-4$
(1) నుండి కావలసిన వృత్త సమీకరణం
$x^2+y^2-(2+4)x+(4-4)y-(-12+8)=0$
$\Rightarrow x^2+y^2-6x+4=0$

- **$x^2+y^2-8x-6y+21=0$, $x^2+y^2-2x-15=0$ వృత్తాల ఖండన బిందువుల గుండా మరియు (1,2) బిందువు గుండా పోయే వృత్త సమీకరణము కనుగొనుము.**

**A:** దత్త వృత్తాలు $S=x^2+y^2-8x-6y+21=0$, $S'=x^2+y^2-2x-15=0$
వృత్తాల మూలాక్షం $L=S-S'=0$
$\Rightarrow -8x+2x-6y+21+15=0 \Rightarrow -6x-6y+36=0$
$\Rightarrow -6(x+y-6)=0 \Rightarrow x+y-6=0$

$S=0$, $L=0$ల ఖండన బిందువు గుండా పోవు ఏదైనా వృత్త సమీకరణం
$S'+\lambda L=0$
$\Rightarrow (x^2+y^2-2x-15)+\lambda(x+y-6)=0$ .....(1)
(1) బిందువు (1,2) గుండా పోతే $\Rightarrow (1+4-2-15)+\lambda(1+2-6)=0$
$\Rightarrow -12+\lambda(-3)=0 \Rightarrow 3\lambda=-12 \Rightarrow \lambda=-4$
$\lambda=-4$ విలువను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా $(x^2+y^2-2x-15)-4(x+y-6)=0$
$\Rightarrow x^2+y^2-2x-15-4x+4y+24=0$
$\Rightarrow x^2+y^2-6x-4y+9=0$

## Q13 & 14: దీర్ఘవృత్తము:

- **$9x^2+16y^2-36x+32y-92=0$ దీర్ఘవృత్తానికి ఉత్కేంద్రత, నాభుల నిరూపకాలు, నాభి లంబం పొడవు, నియతరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.**

**A:** దత్త దీర్ఘవృత్తం $9x^2+16y^2-36x+32y-92=0$
$\Rightarrow (9x^2-36x)+(16y^2+32y)=92$
$\Rightarrow 9(x^2-4x+4)+16(y^2+2y+1)=92+36+16$
$\Rightarrow 9(x-2)^2+16(y+1)^2=144$
$\Rightarrow \frac{9(x-2)^2}{144}+\frac{16(y+1)^2}{144}=1 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-(-1))^2}{9}=1$,
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ తో పోల్చగా,
$a^2=16, b^2=9 \Rightarrow a=4, b=3 \Rightarrow a>b$.

ఇది క్షితిజ సమాంతర దీర్ఘవృత్తము మరియు $(h,k)=(2,-1)$

(i) ఉత్కేంద్రత $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{16-9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

(ii) నాభులు $=(h\pm ae,k)=(2\pm\frac{4\sqrt{7}}{4},-1)=(2\pm\sqrt{7},-1)$

(iii) నాభిలంబం పొడవు $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(9)}{4}=\frac{9}{2}$

(iv) నియత రేఖల సమీకరణాలు

$$x=h\pm\frac{a}{e}=2\pm\frac{4x4}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}\pm16}{\sqrt{7}} \Rightarrow \sqrt{7}x=(2\sqrt{7}\pm16)$$

- **$9x^2+16y^2=144$ దీర్ఘవృత్తానికి, నిరూపకాక్షాలపై సమాన అంతరఖండాలు చేసే స్పర్శరేఖ సమీకరణం కనుక్కోండి.**

**A:** దత్త దీర్ఘవృత్తం $9x^2+16y^2=144 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$
$\Rightarrow a^2=16 \Rightarrow a=4$ and $b^2=9 \Rightarrow b=3$
అక్షాలపై సమానాంతరఖండాలు చేసే సరళరేఖ రూపం $x\pm y+k=0$
దీని వాలు $m=\pm1$
m వాలుగా కలిగిన స్పర్శరేఖ సమీకరణం $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$
$\therefore$ కావలసిన స్పర్శరేఖ సమీకరణాలు

$$y=\pm x\pm\sqrt{16(1)+9}=\pm x\pm5 \Rightarrow y=\pm x\pm5$$

- **నాభుల మధ్యదూరం 2 మరియు నాభిలంబం పొడవు 15/2 గా కలిగిన దీర్ఘవృత్తము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.**

**A:** $S(ae,0)$ మరియు $S'(-ae,0)$ నాభుల మధ్యదూరం 2
$\Rightarrow 2ae=2 \Rightarrow ae=1$ ....(1)
నాభిలంబం పొడవు 15/2

$\frac{2b^2}{a}=\frac{15}{2} \Rightarrow b^2=\frac{15}{4}a$ ......(2)
$b^2=a^2(1-e^2)=a^2-a^2e^2=a^2-(ae)^2=a^2-1$ ......(3)

(2) & (3) నుండి, $\frac{15}{4}a=a^2-1 \Rightarrow 15a=4a^2-4$
$\Rightarrow 4a^2-15a-4=0 \Rightarrow (a-4)(4a+1)=0 \Rightarrow a=4$ (or) $-\frac{1}{4}$
$a=4$ అయిన $b^2=a^2-1=16-1=15$
$\therefore$ దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$

- **$9x^2+16y^2=144$ అనే దీర్ఘవృత్తం యొక్క ఉత్కేంద్రత, నాభులు, నాభి లంబం పొడవు, నియత రేఖ సమీకరణాలు కనుగొనుము.**

**A:** దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $9x^2+16y^2=144$

$$\Rightarrow \frac{9x^2}{144}+\frac{16y^2}{144}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$$

ఇక్కడ, $a^2=16, b^2=9 \Rightarrow a>b$.

కావున దీర్ఘవృత్తం క్షితిజ సమాంతరం.

(i) ఉత్కేంద్రత $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{16-9}{16}}=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

(ii) నాభులు $=(\pm ae,0)=\left(\pm 4\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right),0\right)=(\pm\sqrt{7},0)$

(iii) నాభిలంబం పొడవు $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(9)}{4}=\frac{9}{2}$

(iv) నియతరేఖ సమీకరణం $x=\pm\frac{a}{e}=\pm 4\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\right)=\frac{\pm 16}{\sqrt{7}}$

$\Rightarrow \sqrt{7}x=\pm 16 \Rightarrow \sqrt{7}x\pm 16=0$

- **$2x^2+y^2=8$ దీర్ఘవృత్తానికి క్రింది నియమాలు పాటించే స్పర్శరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి. (i) $x-2y-4=0$ సరళరేఖకు సమాంతరంగా (ii) $x+y+2=0$ సరళరేఖకు లంబంగా**

**A:** ఇచ్చిన దీర్ఘవృత్తం $2x^2+y^2=8 \Rightarrow \frac{2x^2}{8}+\frac{y^2}{8}=1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1 \Rightarrow a^2=4, b^2=8$

(i) $x-2y-4=0$ రేఖ వాలు $m=1/2$

$\therefore m$ వాలుగా కలిగిన స్పర్శరేఖ సమీకరణం $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{4\times\frac{1}{4}+8}=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{9}=\frac{1}{2}x\pm 3$

$\Rightarrow 2y=x\pm 6 \Rightarrow x-2y\pm 6=0$

(ii) $x+y+2=0$ వాలు $-1$

$\Rightarrow$ దాని లంబరేఖ వాలు $m=1$

$\therefore m=1$ వాలుగా కలిగిన స్పర్శరేఖ సమీకరణం $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

$\Rightarrow y=(1)x\pm\sqrt{4(1)^2+8}=x\pm\sqrt{12}=x\pm 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow x-y\pm 2\sqrt{3}=0$

- **దీర్ఘవృత్తమునకు గీచిన లంబస్పర్శరేఖల ఖండనబిందువులు ఒక వృత్తముపై ఉంటాయని చూపండి.**

**A:** దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $S\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$

బిందుపథంపై ఒక బిందువు $P(x_1,y_1)$ అనుకొనుము

m వాలు కలిగిన స్పర్శరేఖ సమీకరణం $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

ఈ స్పర్శరేఖ $P(x_1,y_1)$, గుండా పోతే $y_1=mx_1\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

$\Rightarrow y_1-mx_1=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2} \Rightarrow (y_1-mx_1)^2=a^2m^2+b^2$

$\Rightarrow (y_1^2+m^2x_1^2-2x_1y_1m)-a^2m^2-b^2=0$

$\Rightarrow m^2(x_1^2-a^2)-2mx_1y_1+(y_1^2-b^2)=0$ ....(1)

(1) అనునది m లో వర్గ సమీకరణం మరియు దానిమూలాలు $m_1,m_2$ (ఇవి స్పర్శరేఖ వాలులు)

స్పర్శరేఖలు లంబముగా ఖండించుకుంటే $m_1m_2=-1$

(1) నుండి మూలాల లబ్దం $=\frac{y_1^2-b^2}{x_1^2-a^2}=-1$

$\Rightarrow y_1^2-b^2=-(x_1^2-a^2)=-x_1^2+a^2 \Rightarrow x_1^2+y_1^2=a^2+b^2$

$\therefore P(x_1,y_1)$ బిందుపథం $x^2+y^2=a^2+b^2$.

## Q15: అతిపరావలయము:

- **$x^2-4y^2=4$ అనే అతిపరావలయం యొక్క కేంద్రం, ఉత్కేంద్రత, నాభులు, నాభిలంబం పొడవు, నియత రేఖ సమీకరణంలను కనుగొనుము.**

**A:** దత్త అతిపరావలయం $x^2-4y^2=4 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$

ఇక్కడ $a^2=4, b^2=1$

(i) కేంద్రం $C=(0,0)$

(ii) ఉత్కేంద్రత $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{4+1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

(iii) నాభులు $=(\pm ae,0)=\left(\pm 2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right),0\right)=(\pm\sqrt{5},0)$

(iv) నాభిలంబం పొడవు $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(1)}{2}=1$

(v) నియతరేఖల సమీకరణం : $x=\pm\frac{a}{e} \Rightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}/2} \Rightarrow x=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}$

- **$3x^2-4y^2=12$ అతిపరావలయానికి $y=x-7$ రేఖకు (a) సమాంతరంగాను (b) లంబంగాను ఉండే స్పర్శరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.**

**A:** దత్త అతిపరావలయం $3x^2-4y^2=12$

$\Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1 \Rightarrow a^2=4, b^2=3$

$y=x-7$ రేఖ వాలు $m=1 \Rightarrow$ దీని లంబరేఖ వాలు $-1$

m వాలుగా కలిగిన స్పర్శరేఖ సమీకరణం $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

(i) వాలు $m=1$ కలిగిన స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$y=1.x\pm\sqrt{4(1)^2-3}=x\pm 1 \Rightarrow x-y\pm 1=0$

(ii) వాలు $m=-1$ లంబ స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$y=(-1)x\pm\sqrt{4(1)^2-3}=-x\pm 1 \Rightarrow x+y\pm 1=0$

- **$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ అనే అతిపరావలయమునకు గీచిన లంబస్పర్శరేఖల ఖండనబిందువులు $x^2+y^2=a^2-b^2$ అనే వృత్తముపై ఉంటాయని చూపండి.**

**A:** అతిపరావలయసమీకరణం $S=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$

బిందుపథంపై ఒక బిందువు $P(x_1,y_1)$ అనుకొనుము

m వాలు కలిగిన స్పర్శరేఖ సమీకరణం $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

ఈ స్పర్శరేఖ $P(x_1,y_1)$, గుండా పోతే

$y_1-mx_1=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2} \Rightarrow (y_1-mx_1)^2=a^2m^2-b^2$

$\Rightarrow (y_1^2-2mx_1y_1+m^2x_1^2)-a^2m^2+b^2=0$

$\Rightarrow m^2(x_1^2-a^2)-2mx_1y_1+(y_1^2+b^2)=0$ .......(1)

(1) అనునది m లో వర్గ సమీకరణం మరియు దానిమూలాలు $m_1,m_2$ (ఇవి స్పర్శరేఖ వాలులు)

స్పర్శరేఖలు లంబముగా ఖండించుకుంటే $m_1m_2=-1$

(1) నుండి మూలాల లబ్దం $\frac{y_1^2+b^2}{x_1^2-a^2}=-1$

$\Rightarrow x_1^2+y_1^2=a^2-b^2$

$P(x_1,y_1)$ బిందుపథం $x^2+y^2=a^2-b^2$.

## Q16 : నిశ్చిత సమాకలనులు:

- $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x} dx$ ను గణించండి.

**A:** $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ అని మనకు తెలుసు

$$\therefore I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x} dx \quad .....(1)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^5\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin^5\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^5\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\cos^5 x + \sin^5 x} dx \quad ........(2)$$

(1) & (2) లను కలుపగా

$$I + I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\cos^5 x + \sin^5 x} dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^5 x + \cos^5 x}{\sin^5 x + \cos^5 x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} 1\,dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore 2I = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

- $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+5\cos x}$ ను గణించండి.

**A:** $\tan\frac{x}{2} = t$ అనుకుంటే $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ మరియు $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ .

$$x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$

$$\therefore I = \int_0^1 \frac{(2dt)/(1+t^2)}{4+5\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int_0^1 \frac{(2dt)/(1+t^2)}{\frac{4(1+t^2)+5(1-t^2)}{1+t^2}}$$

$$= 2\int_0^2 \frac{1}{9-t^2} dt = 2.\frac{1}{2.3} \log\left[\frac{3+t}{3-t}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \log\frac{4}{2} = \frac{1}{3} \log 2$$

## Q17: అవకలన సమీకరణాలు:

- $(xy^2+x)\,dx + (yx^2+y)\,dy = 0$ ను సాధించుము.

**A:** ఇచ్చిన సమీకరణము విభజనీయ చలరాశుల అవకలన సమీకరణము.

$$\therefore (xy^2+x)dx+(yx^2+y)dy=0$$
$$\Rightarrow (xy^2+x)dx = -(yx^2+y)dy$$
$$\Rightarrow x(y^2+1)dx = -y(x^2+1)dy \Rightarrow \frac{x}{x^2+1}dx = -\frac{y}{y^2+1}dy$$
$$\Rightarrow \int \frac{2x}{x^2+1}dx = -\int \frac{2y}{y^2+1}dy$$
$$\Rightarrow \log(x^2+1) = -\log(y^2+1) + \log c$$
$$\Rightarrow \log(x^2+1) + \log(y^2+1) = \log c$$
$$\Rightarrow \log(x^2+1)(y^2+1) = \log c \Rightarrow (x^2+1)(y^2+1) = c$$

$\therefore$ సాధన $(x^2+1)(y^2+1) = c$

- $\frac{dy}{dx} - x\tan(y-x) = 1$ ను సాధించుము.

**A:** $y - x = t \Rightarrow \frac{dy}{dx} - 1 = \frac{dt}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} + 1$

$$\Rightarrow \left(\frac{dt}{dx}+1\right) - x\tan t = 1 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = x\tan t \Rightarrow \frac{1}{\tan t}dt = xdx$$
$$\Rightarrow \int \cot t\,dt = \int x\,dx \Rightarrow \log(\sin t) = \frac{x^2}{2} + c$$
$$\Rightarrow 2\log\sin t = x^2 + c \Rightarrow 2\log\sin(y-x) = x^2 + c$$

- $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + y = e^{\mathrm{Tan}^{-1}x}$ ను సాధించుము.

**A:** దత్త అవకలన సమికరణం $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + y = e^{\mathrm{Tan}^{-1}x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + y\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{e^{\mathrm{Tan}^{-1}x}}{1+x^2}$$

పై సమీకరణము $\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x)$ అనే రూపంలోకలదు. .

ఇది yలో రేఖీయ అవకలజ సమీకరణము

ఇక్కడ $P = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int P dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{Tan}^{-1}x$

$$\therefore IF = e^{\int P dx} = e^{\mathrm{Tan}^{-1}x}.$$

కావున సాధన $y(I.F) = \int (I.F)Q\,dx$

$$\Rightarrow ye^{\mathrm{Tan}^{-1}x} = \int e^{\mathrm{Tan}^{-1}x}\left(\frac{e^{\mathrm{Tan}^{-1}x}}{1+x^2}\right)dx.$$

$$\mathrm{Tan}^{-1}x = t \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}dx = dt$$

$$\therefore ye^t = \int e^t.e^t dt = \int e^{2t}dt = \frac{1}{2}e^{2t} + c$$

$$\Rightarrow ye^{\mathrm{Tan}^{-1}x} = \frac{1}{2}e^{2\mathrm{Tan}^{-1}x} + c$$

# LAQ సెక్షన్ - C

## Q18 & 19: వృత్తము

- **A(1,2),B(3,–4), C(5, –6) బిందువుల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణాన్ని మరియు వృత్త కేంద్రాన్ని కనుక్కోండి.**

**Sol:** A=(1,2), B=(3,–4), C=(5,–6) మరియు $S(x_1,y_1)$ ను వృత్త కేంద్రం అనుకొందాం.

$\Rightarrow SA=SB=SC$

ఇప్పుడు, $SA=SB \Rightarrow SA^2=SB^2$

$\Rightarrow (x_1-1)^2+(y_1-2)^2=(x_1-3)^2+(y_1+4)^2$

$\Rightarrow (x_1^2-2x_1+1)+(y_1^2-4y_1+4)$

$=(x_1^2-6x_1+9)+(y_1^2+8y_1+16)$

$\Rightarrow 4x_1-12y_1-20=0 \Rightarrow 4(x_1-3y_1-5)=0$

$\Rightarrow x_1-3y_1-5=0$ ..........(1)

మరియు , $SA = SC \Rightarrow SA^2 = SC^2$

$\Rightarrow (x_1-1)^2+(y_1-2)^2=(x_1-5)^2+(y_1+6)^2$

$\Rightarrow (x_1^2-2x_1+1)+(y_1^2-4y_1+4)$

$=(x_1^2-10x_1+25)+(y_1^2+12y_1+36)$

$\Rightarrow 8x_1-16y_1-56=0 \Rightarrow 8(x_1-2y_1-7)=0$

$\Rightarrow x_1-2y_1-7=0$ ..........(2)

$(1)-(2) \Rightarrow -y_1+2=0 \Rightarrow y_1=2$

$(1) \Rightarrow x_1-6-5=0 \Rightarrow x_1=11$

$\therefore S(x_1,y_1)$ వృత్తం యొక్క కేంద్రం = (11,2).

మరియు A=(1,2)

కావున వ్యాసార్థం $r=SA \Rightarrow r^2=SA^2$

$\therefore r^2=(11-1)^2+(2-2)^2=10^2=100$

$\therefore$ (11, 2) కేంద్రం మరియు వ్యాసార్థం $r^2=100$ గా గల వృత్త సమీకరణం

$(x-11)^2+(y-2)^2=100$

$\Rightarrow (x^2-22x+121)+(y^2-4y+4)=100$

$\Rightarrow x^2+y^2-22x-4y+25=0$

- **(1, 1), (–6, 0), (–2, 2), (–2, –8) బిందువులు చక్రీయాలని చూపండి.**

**A:** A=(1,1), B=(–6,0), C=(–2,2), D=(–2,–8) అనుకోండి.

$S(x_1,y_1)$ వృత్త కేంద్రం అనుకొనుము

$\Rightarrow SA=SB=SC$

ఇప్పుడు, $SA=SB \Rightarrow SA^2=SB^2$

$\Rightarrow (x_1-1)^2+(y_1-1)^2=(x_1+6)^2+(y_1-0)^2$

$\Rightarrow (x_1^2-2x_1+1)+(y_1^2-2y_1+1)=(x_1^2+12x_1+36)+y_1^2$

$\Rightarrow 14x_1+2y_1+34=0 \Rightarrow 2(7x_1+y_1+17)=0$

$\Rightarrow 7x_1+y_1+17=0$ .........(1)

మరియు, $SB=SC \Rightarrow SB^2=SC^2$

$\Rightarrow (x_1+6)^2+(y_1-0)^2=(x_1+2)^2+(y_1-2)^2$

$\Rightarrow (x_1^2+12x_1+36)+y_1^2=(x_1^2+4x_1+4)+(y_1^2-4y_1+4)$

$\Rightarrow 8x_1+4y_1+28=0 \Rightarrow 4(2x_1+y_1+7)=0$

$\Rightarrow 2x_1+y_1+7=0$ ......(2)

(1) & (2) లను సాధిస్తే వృత్త కేంద్రం $S(x_1,y_1)$ వస్తుంది.

$(1)-(2) \Rightarrow 5x_1+10=0 \Rightarrow 5x_1=-10 \Rightarrow x_1=-2$

(1) నుండి $7(-2)+y_1+17=0 \Rightarrow y_1+3=0 \Rightarrow y_1=-3$

$\therefore$ వృత్త కేంద్రం $S(x_1,y_1)=(-2,-3)$

మరియు $A=(1,1) \Rightarrow r=SA \Rightarrow r^2=SA^2$

$\therefore r^2=(1+2)^2+(1+3)^2=9+16=25$

$\therefore$ కావున కేంద్రం (–2, –3) మరియు వ్యాసార్థం $r^2=25$ గా గల వృత్త సమీకరణం $(x+2)^2+(y+3)^2=25$

$\Rightarrow (x^2+4x+4)+(y^2+6y+9)=25$

$\Rightarrow x^2+y^2+4x+6y-12=0$

ఇప్పుడు D(–2,–8)ను పై సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$(-2)^2+(-8)^2+4(-2)+6(-8)-12$

$=4+64-8-48-12=68-68=0$

$\therefore$ D(–2,–8) నే బిందువు వృత్తం పై ఉండును.

$\therefore$ ఇచ్చిన 4 బిందువులు చక్రీయాలు

• **(4,1) (6,5) బిందువులు గుండా పోతూ, 4x+3y–24=0రేఖపై కేంద్రము ఉండే వృత్త సమీకరణం కనుగొనుము.**

**A:** A=(4,1), B=(6,5) అనుకొండి

$S(x_1,y_1)$ వృత్త కేంద్రం అనుకొనుము.

$\Rightarrow SA=SB \Rightarrow SA^2=SB^2$.

$\Rightarrow (x_1-4)^2+(y_1-1)^2=(x_1-6)^2+(y_1-5)^2$

$\Rightarrow (x_1^2-8x_1+16)+(y_1^2-2y_1+1)$

$=(x_1^2-12x_1+36)+(y_1^2-10y_1+25)$

$\Rightarrow 17-8x_1-2y_1=61-12x_1-10y_1$

$\Rightarrow 17-8x_1-2y_1-61+12x_1+10y_1=0$

$\Rightarrow 4x_1+8y_1-44=0$..... (1)

కాని$(x_1,y_1)$ కేంద్రం 4x+3y–24=0 పై ఉండును

$\Rightarrow 4x_1+3y_1-24=0$ ........... (2)

(2)–(1) $\Rightarrow -5y_1+20=0 \Rightarrow 5y_1=20 \Rightarrow y_1=4$

(2) నుండి, $4x_1+3(4)-24=0 \Rightarrow 4x_1-12=0$

$\Rightarrow 4x_1=12 \Rightarrow x_1=3$

∴వృత్త కేంద్రం $S(x_1,y_1)=(3,4)$.

మరియు A=(4,1) వ్యాసార్థం $r=SA \Rightarrow r^2=SA^2$.

$\therefore r^2=(3-4)^2+(4-1)^2=1+9=10$

∴ కేంద్రం(3,4) మరియు వ్యాసార్థం $r^2=10$ గా గల వృత్త సమీకరణం

$(x-3)^2+(y-4)^2=10$

$\Rightarrow (x^2+9-6x)+(y^2+16-8y)=10 \Rightarrow x^2+y^2-6x-8y+15=0$

• **$x^2+y^2-4x-6y-12=0$, $x^2+y^2+6x+18y+26=0$ వృత్తాలు ఒకదానికొకటి స్పృశించుకొంటాయని చూపి ఆ స్పర్శబిందువు మరియు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ కనుగొనుము.**

**A:** మొదటి వృత్తంనకు $S\equiv x^2+y^2-4x-6y-12=0$ ;

కేంద్రం $C_1=(2,3)$,వ్యాసార్థం $r_1=\sqrt{4+9+12}=\sqrt{25}=5$

రెండవ వృత్తంనకు $S'\equiv x^2+y^2+2x-8y+13=0$

కేంద్రం $C_2=(-3,-9)$, వ్యాసార్థం $r_2=\sqrt{1+16-13}=2$

$C_1C_2=\sqrt{(2+3)^2+(3+9)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$

మరియు, $r_1+r_2=5+8=13=C_1C_2$.

∴ రెండు వృత్తాలు ఒకదానికొకటి బాహ్యంగా స్పృశించుకొనును.

ఇప్పుడు, $r_1:r_2=5:8$

కావున స్పర్శబిందువు P $C_1(2,3)$, $C_2(-3,-9)$లను 5 : 8 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించును.

$$\therefore P=\left(\frac{5(-3)+8(2)}{5+8},\frac{5(-9)+8(3)}{5+8}\right)=\left(\frac{1}{13},\frac{-21}{13}\right)$$

ఈ స్పర్శబిందువు వద్ద S=0 మరియు S'=0 ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ సమీకరణం S–S' = 0

$\Rightarrow (x^2+y^2-4x-6y-12)-(x^2+y^2+6x+18y+26)=0$

$\Rightarrow (-4x-6x)-6y-18y-12-26=0$

$\Rightarrow -10x-24y-38=0 \Rightarrow -2(5x+12y+19)=0$

$\Rightarrow 5x+12y+19=0$

• **$x^2+y^2+22x-4y-100=0$, $x^2+y^2-22x+4y+100=0$ వృత్తాలకు ప్రత్యక్ష ఉమ్మడి స్పర్శరేఖల సమీకరణము కనుగొనుము.**

**A:** $x^2+y^2+22x-4y-100=0$, వృత్తానికి కేంద్రం $C_1=(-11,2)$,

వ్యాసార్థం $r_1=\sqrt{121+4+100}=\sqrt{225}=15$

$x^2+y^2-22x+4y+100=0$, వృత్తానికి కేంద్రం $C_2=(11,-2)$,

వ్యాసార్థం $r_2=\sqrt{121+4-100}=\sqrt{25}=5$

ఇప్పుడు,$C_1C_2=\sqrt{(-11-11)^2+(2+2)^2}$

$=\sqrt{484+16}=\sqrt{500}=10\sqrt{5}$

$r_1+r_2=15+5=20$. కావున $C_1C_2>r_1+r_2$

మరియు , $r_1:r_2=15:5=3:1$

అంతర సరూపకేంద్రం E అనునది $\overline{C_1C_2}$ ను బాహ్యంగా $r_1:r_2=3:1$ నిష్పత్తిలో విభజించును.

$$\Rightarrow E=\left(\frac{3(11)-(1)(-11)}{3-1},\frac{3(-2)-1(2)}{3-1}\right)=(22,-4)$$

m వాలు కలిగి బిందువు (22,–4)గుండా పోవు స్పర్శరేఖా సమీకరణం$(y+4)=m(x-22) \Rightarrow mx-y-22m-4=0$....(1)

$C_2(11,-2)$నుండి (1)కుగల లంబదూరం $r_2=5$

$$\Rightarrow \frac{|11m+2-22m-4|}{\sqrt{m^2+1}}=5 \Rightarrow \frac{|-11m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=5$$

$\Rightarrow |11m+2|=5\sqrt{m^2+1} \Rightarrow (11m+2)^2=25(m^2+1)$

$\Rightarrow 121m^2+4+44m=25m^2+25$

$\Rightarrow 96m^2+44m-21=0$

$\Rightarrow 96m^2+72m-28m-21=0$

$\Rightarrow 24m(4m+3)-7(4m+3)=0$

$\Rightarrow (24m-7)(4m+3)=0 \Rightarrow m=\frac{7}{24},\frac{-3}{4}$

∴ 7/24 వాలు కలిగి బిందువు (22,–4) గుండాపోవు స్పర్శరేఖ సమీకరణం$(y+4)=\frac{7}{24}(x-22)$

$\Rightarrow 24(y+4)=7(x-22) \Rightarrow 7x-24y-250=0$

∴ –3/4 వాలు కలిగి బిందువు (22,–4) గుండాపోవు స్పర్శరేఖ సమీకరణం

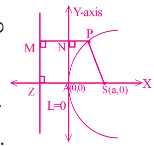
$(y+4)=\frac{-3}{4}(x-22) \Rightarrow 4(y+4)=-3(x-22)$

$\Rightarrow 4y+16=-3x+66 \Rightarrow 3x+4y-50=0$

**Q20:పరావలయము:**

- **పరావలయపు ప్రామాణిక రూపమును ప్రవచించుము.**

**A:** పరావలయపు నాభి S మరియు నియతరేఖ L=0 అనుకొనుము.
నియత రేఖపై S యొక్క విక్షేపము Z అనుకొనుము.
SZ యొక్క మధ్యబిందువును A అనుకొనుము
అప్పుడు SA=AZ $\Rightarrow \frac{SA}{AZ}=1$
అనగా A బిందువు పరావలయం పై ఉండును.




AS పరావలయపు ప్రధాన అక్షాన్ని X-అక్షము.
ASకు లంబముగా A గుండాపోయే రేఖను Y-అక్షము.
అప్పుడు A=(0,0) అగును.
AS=a అనుకుంటే S=(a,0), Z=(−a,0) అగును
అప్పుడు నియతరేఖ సమీకరణము x=−a ⇒ x+a=0
పరావలయంపై $P(x_1,y_1)$ అనే బిందువును తీసుకొనుము.
Y-అక్షంపై P యొక్క విక్షేపము N అనుకొనుము.
నియతరేఖపై P యొక్క విక్షేపము M అనుకొనుము.
ఇక్కడ $PM=PN+NM=x_1+a$
(∵ PN = Pయొక్క x-నిరూపకం మరియు NM=AZ=AS=a)
ఇప్పుడు పరావలయపు 'నాభి-నియతరేఖ ధర్మం' ప్రకారం

$$\frac{SP}{PM}=1 \Rightarrow SP=PM \Rightarrow SP^2=PM^2$$

$$\Rightarrow (x_1-a)^2+(y_1-0)^2=(x_1+a)^2$$

$$\Rightarrow y_1^2=(x_1+a)^2-(x_1-a)^2 \Rightarrow y_1^2=4ax_1$$

$[\because (a+b)^2-(a-b)^2=4ab]$

∴ $P(x_1,y_1)$ యొక్క బిందుపథ సమీకరణము $y^2=4ax$

- **(−2,1), (1,2),(−1,3) బిందువులగుండా పోతూ, x-అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే అక్షంగల పరావలయ సమీకరణము కనుగొనుము.**

**A:** X-అక్షానికి సమాంతరంగా అక్షము గల పరావలయ సమీకరణము $x=ly^2+my+n$.
పరావలయము (−2,1) గుండా పోవును
$\Rightarrow -2=l(1^2)+m(1)+n \Rightarrow l+m+n=-2$ ........(1)
పరావలయము (1,2)గుండా పోవును
$\Rightarrow 1=l(2)^2+m(2)+n \Rightarrow 4l+2m+n=1$ ........(2)
పరావలయము (−1,3)గుండా పోవును
$\Rightarrow -1=l(3)^2+m(3)+n \Rightarrow 9l+3m+n=-1$ ........(3)
$(2)-(1) \Rightarrow 3l+m=3$ .....(4)
$(3)-(1) \Rightarrow 8l+2m=1$ .....(5)
$2\times(4) \Rightarrow 6l+2m=6$ .......(6)
$(5)-(6) \Rightarrow 2l=-5 \Rightarrow l=-5/2$

$$(5) \Rightarrow 2m=1-8l=1+8\times\frac{5}{2}=1+20=21$$

$$\therefore 2m=21 \Rightarrow m=21/2$$

$$(1) \Rightarrow n=-2-l-m=-2+\frac{5}{2}-\frac{21}{2}=\frac{-4+5-21}{2}=\frac{-20}{2}=-10$$

$l=-5/2, m=21/2, n=-10$ విలువలను $x=ly^2+my+n$ లో ప్రతిక్షేపిస్తే, కావలసిన పరావలయ సమీకరణము

$$x=-\frac{5}{2}y^2+\frac{21}{2}y-10$$

$$\Rightarrow 2x=-5y^2+21y-20 \Rightarrow 5y^2+2x-21y+20=0$$

- **$x^2+y^2=2a^2$ అనే వృత్తము మరియు $y^2=8ax$ అనే పరావలయాల ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు $y=\pm(x+2a)$అని చూపుము.**

**A:** దత్త పరావలయము $y^2=8ax \Rightarrow y^2=4(2a)x$ ........(1)

∴ (1) నకు వాలు m గల స్పర్శరేఖ సమీకరణము $y=mx+\frac{2a}{m}$ .......(2)

పై సమీకరణమునుy=mx+cతో పోల్చగా $c=\frac{2a}{m}$

దత్త వృత్తము $x^2+y^2=2a^2$.......(3)

(2) మరియు (3) మధ్య స్పర్శరేఖ నియమము

$c^2=r^2(1+m^2)$ ను అనువర్తింపజేయగా

$$\left(\frac{2a}{m}\right)^2=2a^2(1+m^2) \Rightarrow \frac{4a^2}{m^2}=2a^2(1+m^2) \Rightarrow \frac{2}{m^2}=(1+m^2)$$

$$\Rightarrow (1+m^2)m^2=2 \Rightarrow (1+m^2)m^2=(1+1^2)1^2 \Rightarrow m^2=1 \Rightarrow m=\pm1$$

(2)నుండి కావలసిన ఉమ్మడి స్పర్శరేఖల సమీకరణములు

$$y=\pm x+\frac{2a}{\pm1} \Rightarrow y=\pm(x+2a)$$

- **$y^2=4ax$ పరావలయంలో అంతర్లిఖించిన త్రిభుజం శీర్షాలు $(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)$ అయితే $\frac{1}{8a}|(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)|$ చ.యూనిట్లు అని చూపండి.**

**A:** త్రిభుజ శీర్షాలు $P(x_1,y_1)=(at_1^2, 2at_1)$,
$Q(x_2,y_2)=(at_2^2,2at_2)$, $R(x_3,y_3)=(at_3^2,2at_3)$
ΔPQR వైశాల్యం

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_2 & x_1-x_3 \\ y_1-y_2 & y_1-y_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} at_1^2-at_2^2 & at_1^2-at_3^2 \\ 2at_1-2at_2 & 2at_1-2at_3 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{a.2a}{2}\begin{vmatrix} t_1^2-t_2^2 & t_1^2-t_3^2 \\ t_1-t_2 & t_1-t_3 \end{vmatrix}$$

$$=a^2\begin{vmatrix} (t_1-t_2)(t_1+t_2) & (t_1-t_3)(t_1+t_3) \\ t_1-t_2 & t_1-t_3 \end{vmatrix}$$

$$=a^2(t_1-t_2)(t_1-t_3)\begin{vmatrix} t_1+t_2 & t_1+t_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=a^2(t_1-t_2)(t_1-t_3)|(t_1+t_2-t_1-t_3)|$$

$$=a^2|(t_1-t_2)(t_2-t_3)(t_3-t_1)|$$

$$=a^2\left|\left(\frac{y_1}{2a}-\frac{y_2}{2a}\right)\left(\frac{y_2}{2a}-\frac{y_3}{2a}\right)\left(\frac{y_3}{2a}-\frac{y_1}{2a}\right)\right|$$

$\left(\because 2at_1=y_1 \Rightarrow t_1=\frac{y_1}{2a},......\right)$

$$=\frac{a^2}{2a.2a.2a}|(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)|$$

$$=\frac{1}{8a}|(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)| \text{ చ.యూనిట్లు}$$

**Q21&22: సమాకలనము:**

- **$I_n=\int\sin^n x dx$ నకు లఘూకరణ సూత్రమును రాబట్టి దానినుండి $\int\sin^4 x dx$ ను గణించుము.**

**A:** $I_n=\int\sin^n x dx=\int\sin^{n-1}x(\sin x)dx$.

మొదటి ప్రమేయము $u=\sin^{n-1}x$ మరియు

రెండవ ప్రమేయము $v=\sin x \Rightarrow \int v=-\cos x$

విభాగ సమాకలన సూత్రము నుండి

$I_n=\sin^{n-1}x(-\cos x)-\int(n-1)\sin^{n-2}x\cos x(-\cos x)dx$

$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\cos^2 x dx$

$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$

$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)[\int\sin^{n-2}xdx-\int\sin^n xdx]$

$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)[I_{n-2}-I_n]$

$I_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$

$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}-nI_n+I_n$

$\Rightarrow nI_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}+\cancel{I_n}-\cancel{I_n}$

$$\Rightarrow I_n=\frac{-\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)I_{n-2} \quad ....(1)$$

$n=4,2,0$ విలువలను వరుసగా (1)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$I_4=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}I_2$$

$$=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}\left[-\frac{\sin x\cos x}{2}+\frac{1}{2}I_0\right]$$

$$=\frac{-\sin^3 x\cos x}{4}-\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{3}{8}I_0$$

$$=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}-\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{3}{8}x \quad [\because I_0=x]$$

- **$I_n=\int\cos^n x dx$ నకు లఘూకరణ సూత్రమును రాబట్టి దాని నుండి $\int\cos^4 x dx$ ను గణించుము.**

**A:** $I_n=\int\cos^n x dx=\int\cos^{n-1}x(\cos x)dx$.

మొదటి ప్రమేయము $u=\cos^{n-1}x$ మరియు

రెండవ ప్రమేయము $v=\cos x \Rightarrow \int v=\sin x$

విభాగ సమాకలన సూత్రము నుండి

$I_n=\cos^{n-1}x(\sin x)-\int(n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x)\sin x\,dx$

$=\cos^{n-1}x(\sin x)+(n-1)\int\cos^{n-2}x(\sin x)\sin x\,dx$

$=\cos^{n-1}x(\sin x)+(n-1)\int\cos^{n-2}x(\sin^2 x)dx$

$=\cos^{n-1}x(\sin x)+(n-1)\int\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx$

$=\cos^{n-1}x(\sin x)+(n-1)\int\cos^{n-2}xdx-(n-1)\int\cos^n x\,dx$

$=\cos^{n-1}x(\sin x)+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$

$\therefore I_n=\cos^{n-1}x(\sin x)+(n-1)I_{n-2}-nI_n+I_n$

$\Rightarrow nI_n=\cos^{n-1}x(\sin x)+(n-1)I_{n-2}+\cancel{I_n}-\cancel{I_n}$

$$\therefore I_n=\frac{\cos^{n-1}x(\sin x)}{n}+\frac{(n-1)}{n}I_{n-2} \quad ...(1)$$

$n=4,2,0$ విలువలను వరుసగా (1) లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$I_4=\frac{\cos^3 x\sin x}{4}+\frac{3}{4}I_2$$

$$\Rightarrow\frac{\cos^3 x\sin x}{4}+\frac{3}{4}\left[\frac{\cos x\sin x}{2}+\frac{1}{2}I_0\right]$$

$$=\frac{\cos^3 x\sin x}{4}+\frac{3}{8}\cos x\sin x+\frac{3}{8}I_0$$

$$=\frac{\cos^3 x\sin x}{4}+\frac{3}{8}\cos x\sin x+\frac{3}{8}x+c$$

- **$\int\tan^n x dx$, ను గణించి దాని నుండి $\int\tan^5 x dx$ విలువను కనుగొనుము.**

**A:** $I_n=\int\tan^n x dx=\int(\tan^{n-2}x)\tan^2 x dx$

$=\int(\tan^{n-2}x)(\sec^2 x-1)dx$

$=\int\tan^{n-2}x\sec^2 xdx-\int\tan^{n-2}xdx$

$=\frac{\tan^{n-1}}{n-1}-I_{n-2}$ .....(1) $[\because f(x)=\tan x, f'(x)=\sec^2 x]$

$n=5,3,1$ విలువలను వరుసగా $(1)$ లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$I_5=\int\tan^5 xdx=\frac{\tan^4 x}{4}-I_3=\frac{\tan^4 x}{4}-\left(\frac{\tan^2 x}{2}-I_1\right)$$

$$=\frac{\tan^4 x}{4}-\frac{\tan^2 x}{2}+\int\tan xdx$$

$$=\frac{\tan^4 x}{4}-\frac{\tan^2 x}{2}+\log|\sec x|+c$$

- **$I_n=\int\sec^n x dx$ నకు లఘూకరణ సూత్రమును రాబట్టి దానినుండి $\int\sec^5 x dx$ ను గణించుము.**

**A:** $I_n=\int\sec^n xdx=\int(\sec^{n-2}x)\sec^2 xdx$

మొదటి ప్రమేయము $u=\sec^{n-2}x$

రెండవ ప్రమేయము $v=\sec^2 x \Rightarrow \int v=\tan x$

విభాగ సమాకలన సూత్రము నుండి

$I_n=(\sec^{n-2}x)\tan x-\int(n-2)(\sec^{n-3}x)\sec x\tan x(\tan x)dx$

$=(\sec^{n-2}x)(\tan x)-(n-2)\int(\sec^{n-2}x)\tan^2 xdx$

$=(\sec^{n-2}x)(\tan x)-(n-2)\int(\sec^{n-2}x)(\sec^2 x-1)dx$

$=(\tan x)(\sec^{n-2}x)-(n-2)\int(\sec^n x-\sec^{n-2}x)dx$

$=(\sec^{n-2}x)(\tan x)-(n-2)\int\sec^n xdx+(n-2)\int\sec^{n-2}xdx$

$\therefore I_n=(\sec^{n-2}x)(\tan x)-(n-2)I_n+(n-2)I_{n-2}$

$\Rightarrow I_n+(n-2)I_n=(\sec^{n-2}x)(\tan x)+(n-2)I_{n-2}$

$\Rightarrow I_n[1+(n-2)]=\sec^{n-2}x(\tan x)+(n-2)I_{n-2}$

$\Rightarrow I_n[(n-1)]=\sec^{n-2}x(\tan x)+(n-2)I_{n-2}$

$$I_n=\frac{(\sec^{n-2}x)\tan x}{n-1}+\frac{(n-2)}{n-1}I_{n-2} \quad ....(1)$$

$n=5,3,1$ విలువలను వరుసగా (1)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$I_5=\int\sec^5 xdx=\frac{\sec^3 x\tan x}{4}+\frac{3}{4}I_3$$

$$=\frac{\sec^3 x\tan x}{4}+\frac{3}{4}\left(\frac{\sec x.\tan x}{2}\right)+\frac{3}{8}I_1$$

$$=\frac{\sec^3 x\tan x}{4}+\frac{3}{4}\left(\frac{\sec x.\tan x}{2}\right)+\frac{3}{8}\int\sec x\,dx$$

$$=\frac{\sec^3 x\tan x}{4}+\frac{3}{8}\sec x\tan x+\frac{3}{8}\log|\sec x+\tan x|+c$$

- $\int \frac{2\cos x+3\sin x}{4\cos x+5\sin x}dx$ ను గణించండి.

**A:** $(2\cos x+3\sin x)$

$= A\frac{d}{dx}(4\cos x+5\sin x)+B(4\cos x+5\sin x)$

$\Rightarrow (2\cos x+3\sin x)$

$= A(-4\sin x+5\cos x)+B(4\cos x+5\sin x)$

sinx యొక్క గుణకాలను పోల్చగా, $-4A+5B=3$ .......(1)

cosx యొక్క గుణకాలను పోల్చగా, $5A+4B=2$ .........(2)

$(1)\times 5 \Rightarrow -20A+25B=15$ .....(3)

$(2)\times 4 \Rightarrow 20A+16B=8$ ....(4)

$(3)+(4) \Rightarrow 41B=23 \Rightarrow B=\frac{23}{41}$

(1) నుండి, $4A=5B-3=5\left(\frac{23}{41}\right)-3=\frac{115-123}{41}=\frac{-8}{41}$

$\therefore \not{4}A=\frac{-\not{8}}{41} \Rightarrow A=\frac{-2}{41}$

$\therefore\ I=\int \frac{2\cos x+3\sin x}{4\cos x+5\sin x}dx$

$=\int \frac{\frac{-2}{41}\frac{d}{dx}(4\cos x+5\sin x)+\frac{23}{41}(4\cos x+5\sin x)}{4\cos x+5\sin x}dx$

$=\frac{-2}{41}\int \frac{\frac{d}{dx}(4\cos x+5\sin x)}{4\cos x+5\sin x}dx+\frac{23}{41}\int 1\ dx$

$=\frac{-2}{41}\log|4\cos x+5\sin x|+\frac{23}{41}x+c$

$\left[\because \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+c\right]$

- $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2-2x+10}}dx$ ను గణించండి.

**A:** $2x+5=A\frac{d}{dx}(x^2-2x+10)+B$

$\Rightarrow 2x+5=A(2x-2)+B=2Ax-2A+B$

x యొక్క గుణకాలను పోల్చగా, $2A=2 \Rightarrow A=1$

స్థిరపదాలను పోల్చగా,

$-2A+B=5 \Rightarrow B=5+2A=5+2(1)=7 \Rightarrow B=7$

$\therefore \int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2-2x+10}}dx$

$=\int \frac{\frac{d}{dx}(x^2-2x+10)}{\sqrt{x^2-2x+10}}dx+7\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}$

$=2\sqrt{x^2-2x+10}+7\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+3^2}}$

$=2\sqrt{x^2-2x+10}+7\text{Sinh}^{-1}\left(\frac{x-1}{3}\right)+c$

**Q23: నిశ్చిత సమాకలనులు:**

- $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ ను గణించండి.

**A:** $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$ అని మనకు తెలుసు

$\therefore I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx$

$=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx-\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx-I$

$\Rightarrow I+I=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx \Rightarrow 2I=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$\cos x=t \Rightarrow \sin x dx=-dt$

$x=0 \Rightarrow t=\cos 0=1$ మరియు $x=p \Rightarrow t=\cos\pi=-1$

$\therefore I=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}[\text{Tan}^{-1}t]_{-1}^{1}$

$=\frac{\pi}{2}[\text{Tan}^{-1}(1)-\text{Tan}^{-1}(-1)]=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$

- $\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$ ను గణించండి.

**A:** $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$ అని మనకు తెలుసు

$\therefore I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin^3(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx$

$=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx-\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$

$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx-I \Rightarrow I+I=2I=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$

$\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x dx}{1+\cos^2 x}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x\sin x dx}{1+\cos^2 x}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{(1-\cos^2 x)\sin x dx}{1+\cos^2 x}$

$\cos x=t \Rightarrow -\sin x dx=dt;$

$x=0 \Rightarrow t=\cos 0=1$ మరియు $x=\pi \Rightarrow t=\cos\pi=-1$

$\therefore I=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}-\frac{(1-t^2)}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{t^2-1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{t^2+1-2}{t^2+1}dt$

$=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\left(1-\frac{2}{1+t^2}\right)dt=\frac{\pi}{2}[t-2\text{Tan}^{-1}t]_1^{-1}$

$=\frac{\pi}{2}[-1-2\text{Tan}^{-1}(-1)]-[1-2\text{Tan}^{-1}1]$

$=\frac{\pi}{2}\left[-1-2\left(-\frac{\pi}{4}\right)-1+2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-2\right]=\frac{\pi}{2}[\pi-2]$

- $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$ (లేదా) $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)dx$ ను గణించండి.

**A:** $x = \tan\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta d\theta$

$x=0 \Rightarrow \theta = 0; x = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

మరియు $1+x^2 = 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\therefore \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\log(1+\tan\theta)}{\sec^2\theta}\sec^2\theta d\theta$

$= \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta)d\theta$

$\therefore I = \int_0^{\pi/4} \log[1+\tan\theta]d\theta = \int_0^{\pi/4} \log\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]d\theta$

$= \int_0^{\pi/4} \log\left[1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}\right]d\theta = \int_0^{\pi/4} \log\left[1+\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right]d\theta$

$= \int_0^{\pi/4} \log\left[\frac{(1+\tan\theta)+(1-\tan\theta)}{1+\tan\theta}\right]d\theta$

$= \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1+\tan\theta}\right)d\theta = \int_0^{\pi/4} [\log 2 - \log(1+\tan\theta)]\, d\theta$

$= \log 2\int_0^{\pi/4} 1\, d\theta - \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta)d\theta = \log 2\int_0^{\pi/4} 1\, d\theta - I$

$= \log 2[\theta]_0^{\pi/4} - I \Rightarrow I + I = (\log 2)\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2I = \left(\frac{\pi}{4}\right)(\log 2)$

$\Rightarrow I = \left(\frac{\pi}{8}\right)(\log 2)$

- $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x}dx$ ను గణించండి.

**A:** $\sin x - \cos x = t$ అనుకుంటే $(\cos x+\sin x)dx = dt$అగును

ఇప్పుడు $x=0 \Rightarrow t = \sin 0 - \cos 0 = 0-1 = -1$మరియు

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

$(\sin x - \cos x)^2 = t^2 \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x = t^2$

$\Rightarrow 1 - \sin 2x = t^2 \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$

$\therefore 9+16\sin 2x = 9+16(1-t^2) = 9+16-16t^2 = 25-16t^2$

$\therefore I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x}dx = \int_{-1}^{0} \frac{dt}{25-16t^2}$

$= \int_{-1}^{0} \frac{dt}{5^2-(4t)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2(5)}\cdot\log\left[\frac{5+4t}{5-4t}\right]_{-1}^{0}$

$= \frac{1}{40}\left[\log\left[\frac{5+0}{5-0}\right] - \log\left[\frac{5-4}{5+4}\right]\right] = \frac{1}{40}\left[\log 1 - \log\frac{1}{9}\right]$

$= \frac{1}{40}\left[0 - \log 9^{-1}\right] = \frac{1}{40}[\log 9] = \frac{\log 3^2}{40} = \frac{2\log 3}{40} = \frac{\log 3}{20}$

## Q24:అవకలన సమీకరణాలు:

- $(x^2+y^2)dx = 2xydy$ ను సాధించండి.

**A:** దత్త అవకలన సమీకరణం $(x^2+y^2)dx = 2xydy$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}$.....(1)

(1) ఇది ఒక సమఘాత అవకలన సమీకరణము

$y = vx$ అనుకుంటే $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$\therefore (1) \Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2+(vx)^2}{2x(vx)}$

$= \frac{x^2+v^2x^2}{2x^2v} = \frac{x^2(1+v^2)}{2x^2v} = \frac{1+v^2}{2v}$

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} - v$

$= \frac{1+v^2-2v^2}{2v} = \frac{1-v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{2v}$

$\therefore \frac{2v}{1-v^2}dv = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{2v}{1-v^2}dv = \int\frac{dx}{x}$

$\Rightarrow -\int\frac{-2v}{1-v^2}dv = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow -\log(1-v^2) = \log x + \log c$

$\Rightarrow \log x + \log(1-v^2) = \log c$

$\Rightarrow \log(x(1-v^2)) = \log c \Rightarrow x(1-v^2) = c$

$\Rightarrow x\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right) = c;\ \left(\because v = \frac{y}{x}\right)$

$\Rightarrow x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2}\right) = c \Rightarrow x^2 - y^2 = cx$.

$\therefore$ సాధన $x^2 - y^2 = cx$

- $\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ బిందువు గుండా పోయే $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$ అవకలన సమీకరణం సాధనను కనుగొనుము.

**Sol:** దత్త అవకలన సమీకరణం $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$....(1)

(1) ఇది ఒక సమఘాత అవకలన సమీకరణము

$y=vx$ అనుకుంటే $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$(1) \Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx - x\cos^2 v}{x} = v - \cos^2 v$

$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = -\cos^2 v \Rightarrow \sec^2 v\, dv = -\frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \int\sec^2 v\, dv = -\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \tan v = -\log|x| + c$

$\Rightarrow \tan\frac{y}{x} + \log|x| = c$ ........(2)

ఈ వక్రం $(x,y) = \left(1,\frac{\pi}{4}\right)$బిందువు గుండా పోతే

$\tan\frac{\pi}{4} + \log 1 = c \Rightarrow 1 + 0 = c \Rightarrow c = 1$

$\therefore$ (2)నుండి కావలసిన సాధన, $\tan\frac{y}{x} + \log|x| = 1$.

- **$(x^2y-2xy^2)dx=(x^3-3x^2y)dy$ ను సాధించండి.**

**A:** దత్త అవకలన సమీకరణం

$(x^2y-2xy^2)dx=(x^3-3x^2y)dy$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x^2y-2xy^2}{x^3-3x^2y} \text{ ...........(1)}$$

(1) సమఘాత అవకలన సమీకరణము

y=vx అనుకుంటే $\frac{dy}{dx}=v+\frac{xdv}{dx}$

$$\therefore (1)\Rightarrow v+\frac{xdv}{dx}=\frac{x^2(v.x)-2.x.(v^2x^2)}{x^3-3x^2vx}$$

$$=\frac{vx^3-2v^2x^3}{x^3-3vx^3}=\frac{x^3(v-2v^2)}{x^3(1-3v)}=\frac{v-2v^2}{1-3v}$$

$$\therefore v+\frac{xdv}{dx}=\frac{v-2v^2}{1-3v}\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{v-2v^2}{1-3v}-v$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{v-2v^2-v+3v^2}{1-3v}=\frac{v^2}{1-3v}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{1-3v}{v^2}dv \Rightarrow \int\frac{dx}{x}=\int\left(\frac{1-3v}{v^2}\right)dv$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{x}=\int\frac{1}{v^2}dv-\int\frac{3v}{v^2}dv \Rightarrow \log x+\log c=\frac{-1}{v}-3\log v$$

$$\Rightarrow \log x+\log c+3\log v=\frac{-1}{v}\Rightarrow \log xv^3c=\frac{-1}{v}$$

$$\Rightarrow \log x\left(\frac{y^3}{x^3}\right)c=\frac{-1}{y/x}\Rightarrow \log\left(\frac{y^3}{x^2}\right)c=\frac{-x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{y^3}{x^2}c=e^{-x/y}\Rightarrow c=\frac{x^2}{y^3}e^{-x/y}$$

- **$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+3}{2x-2y+5}$ ను సాధించండి.**

**A:** దత్త అవకలన సమీకరణం

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+3}{2x-2y+5}=\frac{(x-y)+3}{2(x-y)+5} \text{ .....(1)}$$

$\frac{x-y+3}{2x-2y+5}$ ను $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ తో పోల్చగా,

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{2};\frac{b_1}{b_2}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}}$$

కావున $x-y=v$ అనుకుంటే

$$1-\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1-\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore (1)\Rightarrow 1-\frac{dv}{dx}=\frac{v+3}{2v+5}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx}=1-\frac{v+3}{2v+5}=\frac{2v+5-v-3}{2v+5}=\frac{v+2}{2v+5}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx}=\frac{v+2}{2v+5}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dv}=\frac{2v+5}{v+2}$$

$$\Rightarrow dx=\left(\frac{2v+5}{v+2}\right)dv=\left(\frac{2v+4+1}{v+2}\right)dv$$

$$=\left(\frac{2(v+2)+1}{v+2}\right)dv=\left(2+\frac{1}{v+2}\right)dv$$

ఇరువైపులా సమాకలనం చేయగా,

$$\int dx=\int 2dv+\int\frac{dv}{v+2}$$

$$\Rightarrow x=2v+\log(v+2)+c$$

$$\Rightarrow x=2(x-y)+\log[(x-y)+2]+c$$

$$\Rightarrow x-2y+\log(x-y+2)=c$$