7. కణాల వ్యవస్థలు, భ్రమణ గమనం

స్టడీ నోట్స్

1. **ఈ అధ్యాయములో మనం నేర్చుకునే అంశాలు:** ద్రవ్యరాశి కేంద్రము, గరిమనాభి, ద్రవ్యరాశి కేంద్ర చలనము, రేఖీయ ద్రవ్యవేగము, సదిశాలబ్ధము, కోణీయ వేగం, కోణీయ త్వరణం, టార్క్, కోణీయ ద్రవ్యవేగము, జడత్వభ్రామకం, లంబాక్ష సిద్ధాంతము, సమాంతర అక్ష సిద్ధాంతము.

2. **ద్రవ్యరాశి కేంద్రము:** ఒక వస్తువు ద్రవ్యరాశి అంతయు ఏ బిందువు వద్ద కేంద్రీకృతమైనట్టుగా భావించవచ్చునో ఆ బిందువును వస్తువు యొక్క ద్రవ్యరాశి కేంద్రము అని అంటారు. బాహ్యబలమంతయు ఆ బిందువు వద్దనే పని చేయుచున్నట్లు వస్తువు గమనము ఉండును.

   ఉదా: త్రిభుజాకార పటలమునకు దాని కేంద్రభాసం ద్రవ్యరాశి కేంద్రమగును.

3. **గురుత్వ కేంద్రము లేక గరిమనాభి:** వస్తువు భారమంతయూ పని చేయు బిందువును గరిమనాభి అని అంటారు. ఈ బిందువు పరంగా వస్తువులోని అన్ని కణముల గురుత్వబలముల టార్క్ మొత్తము సున్న.

4. **ద్రవ్యరాశి కేంద్ర చలనము:**

   ఉదా 1: ఒక బాంబు దారి మధ్యలో ప్రేలక పోయినట్లయితే ఏ పరావలయ మార్గములో ప్రయాణించునో, అదే మార్గములో ద్రవ్యరాశి కేంద్రము పయనించునట్లుగా పగిలిపోయిన దాని ముక్కలు పయనించును.

   ఉదా 2: ఒక గదను గాలిలోనికి విసిరినపుడు, దాని ద్రవ్యరాశి కేంద్రము సరళమైన పరావలయ మార్గములో ప్రయాణించును. కాని గదలోని వేర్వేరు కణాలు వేర్వేరు సంక్లిష్ట మార్గములలో ప్రయాణించును.

5. **రేఖీయ ద్రవ్యవేగ నిత్యత్వ నియమం:** వ్యవస్థ పై బాహ్య బలములు పనిచేయనంత వరకు, వ్యవస్థ మొత్తము రేఖీయ ద్రవ్యవేగము స్థిరముగా ఉండును.

6. **సదిశా లబ్ధము:** $\bar{a}$, $\bar{b}$ లు రెండు సదిశలు. వాని మధ్య కోణం θ అయిన వాని సదిశా లబ్ధమును ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచించారు. $\bar{a}\times\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\theta\hat{n}$

   $\bar{a}$, $\bar{b}$ లు ఉన్న తలమునకు లంబదిశలో యూనిట్ సదిశ $\hat{n}$.

   $\bar{a}\times\bar{b}$ దిశను కుడి చేతి మర నిబంధనతో కనుగొనవచ్చును.

7. **కోణీయ స్థాన భ్రంశం (θ)** : ఒక కణం యొక్క స్థానాన్ని సూచించే వ్యాసార్ధ సదిశ, నిర్ణీత సమయంలో తిరిగే కోణాన్ని కోణీయ స్థానభ్రంశం అంటారు.

   S.I ప్రమాణం : రేడియన్

   మితి ఫార్ములా : $[M^0L^0T^0]$

8. **కోణీయ వేగం(ω)** : కణం యొక్క 'కోణీయ స్థానభ్రంశం' లోని 'మార్పు రేటు' ను కోణీయ వేగం అని అంటారు. $\omega = \frac{\theta}{t}$

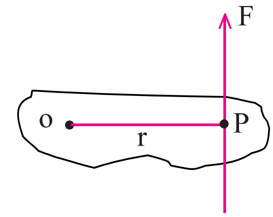
   S.I ప్రమాణం : రేడియన్ / సెకను

   మితి ఫార్ములా : $[M^0L^0T^{-1}]$

   ఉదా : గడియారంలోని సెకనుల ముల్లు కోణీయ వేగం. $\omega = \frac{2\pi}{60}\,\text{rad s}^{-1}$ $(\because \omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T})$

9. **కోణీయ త్వరణం (α)** : కణం 'కోణీయ వేగం' లోని 'మార్పురేటు' ను కోణీయ త్వరణం అని అంటారు.

10.1 బల భ్రామకము లేదా టార్క్ : 'ఒక బిందువు పరంగా భ్రమణం చెందగల వస్తువు మీద బలాన్ని ప్రయోగిస్తే అది భ్రమణం చెందుతుంది. ఆ భ్రమణ పరిమాణాన్నే టార్క్ అంటారు.' బలపరిమాణం మరియు భ్రమణాక్షం నుండి బలం యొక్క చర్యారేఖకు గల లంబ దూరముల లబ్ధముగా టార్క్‌ను కొలుస్తారు.

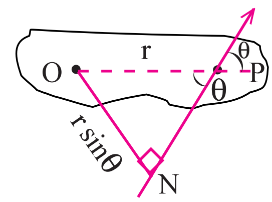


టార్క్ (τ) = బలం × లంబదూరం

$\tau = F\,r$

గమనిక : O బిందువు పరంగా బలభ్రామకం (τ) = బలం × లంబదూరం

$= F \times r \sin\theta$

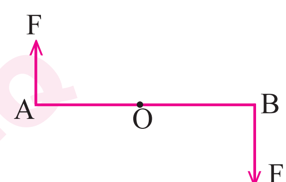


సదిశాపరంగా, $\tau = \vec{r} \times \vec{F}$

టార్క్ S.I ప్రమాణం : Nm

మితి ఫార్ములా : $[M^1L^2T^{-2}]$

10.2 బలయుగ్మం : పరిమాణంలో సమానంగా, దిశలో వ్యతిరేకంగా ఉండి సరేఖీయం కాని రెండు బలాలు బలయుగ్మాన్ని ఏర్పరుస్తాయి. దీని వల్ల వస్తువు భ్రమణ చలనానికి లోనవుతుంది.

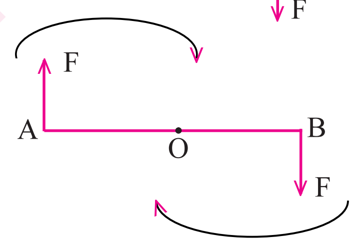


10.3 బలయుగ్మ భ్రామకం : రెండు బలాల మధ్య లంబదూరం మరియు ఆ రెండింటిలో ఏదో ఒక బల పరిమాణంల లబ్ధాన్ని బలయుగ్మ భ్రామకం లేదా బలయుగ్మ టార్క్ అంటారు.

బల యుగ్మ భ్రామకం $(\tau) = (F \times OA) + (F \times OB) = F(OA + OB)$

$\tau = F \,.\, AB$

ఇక్కడ AOB ను భ్రమణాక్షం అంటారు.



10.4 జడత్వ భ్రామకం (I) : భ్రమణ చలనంలో ఉన్న దృఢవస్తువు తన కోణీయ వేగమును తనకుతానుగా మార్చుకోలేదు. కోణీయ వేగంలోని మార్పును వ్యతిరేకించే వస్తు లక్షణాన్ని జడత్వ భ్రామకం లేదా భ్రమణ జడత్వం అంటారు. ఒక దృఢ వస్తువు యొక్క వివిధ 'కణాల ద్రవ్యరాశులు' మరియు 'భ్రమణాక్షం నుండి' వాటి లంబదూరాల వర్గాల లబ్ధాన్ని ఆ అక్షం పరంగా దృఢ వస్తువు యొక్క జడత్వ భ్రామకం అని నిర్వచిస్తాము.

సూత్రం : $I = Mr^2$, **S.I ప్రమాణం :** $Kg\ m^2$, **మితి ఫార్ములా :** $M^1L^2T^0$

జడత్వ భ్రామకం ఆధారపడే అంశాలు :

(i) వస్తువు యొక్క ద్రవ్యరాశి (ii) భ్రమణాక్షం యొక్క స్థానం (iii) భ్రమణాక్షం దృష్ట్యా ద్రవ్యరాశి వితరణ

11.1 లంబాక్ష సిద్ధాంతము : ఒక సమతల పటలంలోని ఏదైనా ఒక బిందువు గుండా పటతలానికి లంబంగా ఉన్న అక్షం పరంగా,జడత్వ భ్రామకం' ఆ పటలం తలంలో పరస్పరం లంబంగా ఉండి, అదే బిందువు గుండా పోయే రెండు అక్షాల జడత్వ భ్రామకాల మొత్తానికి సమానం. **సూత్రం :** $I_z = I_x + I_y$

11.2 సమాంతర అక్ష సిద్ధాంతం : ఏదేని ఒక అక్షం పరంగా ఒక 'దృఢ వస్తువు యొక్క జడత్వ భ్రామకం'ఈ క్రింది వాటి మొత్తానికి సమానం (i) వస్తు ద్రవ్యరాశి కేంద్రం గుండా పోయే సమాంతర అక్షం పరంగా జడత్వ భ్రామకం (ii) వస్తు ద్రవ్యరాశి మరియు రెండు సమాంతర అక్షాల మధ్య లంబదూరాల వర్గాల లబ్ధము.

సూత్రం : $I = I_G + Mr_0^2$

12.1 కోణీయ ద్రవ్యవేగం (L) : ఒక వస్తువు రేఖీయ ద్రవ్యవేగం యొక్క భ్రామకమే కోణీయ ద్రవ్యవేగం. కణం రేఖీయ ద్రవ్యవేగం మరియు ఒక బిందువు నుండి కణం గమన రేఖకు గల లంబదూరాల లబ్ధాన్ని ఆ బిందువు దృష్ట్యా కోణీయ ద్రవ్యవేగం అంటారు.

సూత్రం : $L = I\,\omega = mvr$

12.2 కోణీయ ద్రవ్యవేగ నిత్యత్వ నియమం : భ్రమణంలో ఉన్న వ్యవస్థపై ఫలిత బాహ్య టార్క్ పని చేయకపోతే వ్యవస్థ కోణీయ ద్రవ్యవేగం ఎల్లప్పుడూ స్థిరం. అనగా $I\,\omega =$ స్థిరరాశి, $I_1\omega_1 = I_2\,\omega_2$

13.1 వేరు వేరు అక్షాల పరంగా వివిధ వస్తువుల జడత్వ భ్రామకాలు :

	వస్తువు పేరు	భ్రమణాక్షం	జడత్వ భ్రామకం
1.	R వ్యాసార్ధము గల వృత్తాకార రింగు	(i) కేంద్రము గుండా పోతూ దాని తలానికి లంబముగా ఉండే తిర్యక్ అక్షం. (ii) ఏదైనా వ్యాసం (iii) దాని తలానికి లంబముగా గీసిన స్పర్శరేఖ (iv) దాని తలంలో గీసిన స్పర్శరేఖ	MR^2 $\frac{MR^2}{2}$ $2MR^2$ $\frac{3MR^2}{2}$
2.	R వ్యాసార్ధము గల వృత్తాకార బిళ్ల.	(i) కేంద్రము గుండా పోతూ దాని తలానికి లంబముగా ఉండే తిర్యక్ అక్షం. (ii) ఏదైనా వ్యాసం (iii) దాని తలానికి లంబముగా గీసిన స్పర్శరేఖ (iv) దాని తలంలో గీసిన స్పర్శరేఖ	$\frac{MR^2}{2}$ $\frac{MR^2}{4}$ $\frac{3MR^2}{2}$ $\frac{5MR^2}{4}$
3.	ద్రవ్యరాశి M మరియు వ్యాసార్ధము R గల బోలు స్థూపం	(i) దాని సొంత అక్షం (ii) కేంద్రము గుండా పోతూ దాని సొంత అక్షానికి లంబముగా	MR^2 $M\left[\frac{l^2}{12}+\frac{R^2}{2}\right]$
4.	ఘన స్థూపం	దాని సొంత అక్షం	$\frac{MR^2}{2}$
5.	బోలు గోళం	ఏదైనా వ్యాసం	$\frac{2}{3}MR^2$
6.	ఘన గోళం	(i) ఏదైనా వ్యాసం (ii) దాని తలంలో గీసిన స్పర్శరేఖ	$\frac{2}{5}MR^2$ $\frac{7}{5}MR^2$
7.	L పొడవు గల ఏకరీతి కడ్డీ	(i) కేంద్రము గుండా పోతూ దాని పొడవుకు లంబంగా (ii) ఒక చివర గుండా పోతూ దాని పొడవుకు లంబంగా	$ML^2/12$ $ML^2/3$
8.	దీర్ఘచతురస్రాకార పలక	కేంద్రము గుండా పోతూ దాని తలానికి లంబంగా	$M\left[\frac{l^2+b^2}{12}\right]$

13.2 రేఖీయ మరియు భ్రమణ చలనాల మధ్య పోలికలు :

రేఖీయ చలనం	భ్రమణ చలనం
1. స్థానభ్రంశం x	1. కోణీయ స్థానభ్రంశం θ
2. వేగం $v = \frac{ds}{dt}$	2. కోణీయ వేగం $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
3. త్వరణం $a = \frac{dv}{dt}$	3. కోణీయ త్వరణం $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
4. ద్రవ్యరాశి $m = F/a$	4. జడత్వ భ్రామకం $I = Mk^2$
5. బలం $F = ma = \frac{dp}{dt}$	5. టార్క్ $\tau = I\alpha = \frac{dL}{dt}$
6. పని $w = FS = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$	6. పని $w = \tau\theta = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$
7. గతిశక్తి $E_k = \frac{1}{2}mv^2$	7. గతిశక్తి $E_R = \frac{1}{2}I\omega^2$
8. సామర్థ్యం $P = Fv$	8. సామర్థ్యం $P = \tau\omega$
9. రేఖీయ ద్రవ్యవేగం $p = mv$	9. కోణీయ ద్రవ్యవేగం $L = I\omega$

ముఖ్య సూత్రాలు

1. $x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + ...}{m_1 + m_2 + m_3 + ...}$, $y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + ...}{m_1 + m_2 + m_3 + ...}$

2.1 $v_{cm} = \frac{m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3 + ...}{m_1 + m_2 + m_3 + ...}$ 2.2. $a_{cm} = \frac{m_1a_1 + m_2a_2 + m_3a_3 + ...}{m_1 + m_2 + m_3 + ...}$

3. $\bar{a}, \bar{b}$ ల సదిశా లబ్ధం $\bar{a} \times \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\theta\hat{n}$

4.1 కోణీయ వేగం (ω): $\omega = \frac{\theta}{t}$ 4.2. కోణీయ త్వరణం $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

5. జడత్వ భ్రామకం $I = Mk^2$

6. టార్క్ (లేదా) బల భ్రామకం: $\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F} = Fr\sin\theta = I\alpha$

7. కోణీయ ద్రవ్యవేగం $L = mvr = mr^2\omega = I\omega = \bar{r} \times \bar{p}$

8. టార్క్ మరియు కోణీయ ద్రవ్యవేగంల మధ్య సంబంధం $\tau = \frac{dL}{dt}$

9. భ్రమణ గతిశక్తి $E_r = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{L^2}{2I}$

10. లంబాక్ష సిద్ధాంతం: $I_Z = I_X + I_Y$

11. సమాంతరక్ష సిద్ధాంతం: $I = I_G + Mr_0^2$

10. కోణీయ ద్రవ్యవేగ నిత్యత్వ నియమం : $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$