2B (TM)

Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH -2023 (TS)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2023(TS)

Time : 3 Hours **గణితశాస్త్రం – 2B** Max.Marks : 75

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: $10 \times 2 = 20$

1. కేంద్రం $(-1,2)$, వ్యాసార్థం 5 కల్గిన వృత్త సమీకరణమును కనుగొనుము.

2. $x^2+y^2-10x-2y+6=0$ వృత్తానికి $P(3,5)$ వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

3. $x^2+y^2-3x-4y+5=0,\ 3(x^2+y^2)-7x+8y-11=0$ అనే వృత్తాల మూలాక్ష సమీకరణము కనుగొనుము.

4. నాభి దూరము 10 గా కలిగిన $y^2=8x$ పరావలయంపై బిందు నిరూపకాలు కనుగొనుము.

5. $x^2-4y^2=5$ అతిపరావలయానికి $3x-4y+k=0$ స్పర్శరేఖ అయిన k విలువ కనుగొనుము.

6. $\int \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ ను గణించండి.

7. $\int \frac{x^8}{1+x^{18}}dx$ ను గణించండి.

8. $\int_2^3 \frac{2x\,dx}{1+x^2}$ ను గణించండి.

9. $\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\,dx$ ను కనుగొనుము.

10. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2-3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-e^x=4$ అనే అవకలన సమీకరణపు పరిమాణము మరియు తరగతి కనుగొనుము.

సెక్షన్-బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 4 = 20$

11. $x^2+y^2=a^2$ వృత్తం $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ రేఖపై ఏర్పరిచే జ్యా పొడవును కనుక్కోండి.

12. $(2,3)$ కేంద్రం ఉంటూ $x^2+y^2-4x+2y-7=0$ వృత్తాన్ని లంబంగా ఖండించే వృత్త సమీకరణం కనుక్కోండి.

13. $9x^2+16y^2-36x+32y-92=0$ దీర్ఘవృత్తానికి ఉత్కేంద్రత, నాభుల నిరూపకాలు, నాభి లంబం పొడవు, నియతరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

14. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ దీర్ఘవృత్తానికి $lx+my+n=0$ స్పర్శరేఖ కావడానికి నియమం కనుక్కోండి.

15. $3x^2-4y^2=12$ అతిపరావలయానికి $y=x-7$ రేఖకు (i) సమాంతరంగాను (ii) లంబంగాను ఉండే స్పర్శరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

16. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}dx$ ను గణించండి.

17. $\frac{dy}{dx}=\frac{xy+y}{xy+x}$ ను సాధించండి.

సెక్షన్-సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 7 = 35$

18. $(1, 2), (3, -4), (5, -6)$ బిందువుల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

19. $(-2, 3)$ కేంద్రంగా ఉంటూ $3x+4y+4=0$ రేఖపై చేసే జ్యా పొడవు 2 అయ్యే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

20. పరావలయపు ప్రామాణిక రూపము $y^2=4ax$ అని చూపుము.

21. $\int \frac{dx}{5+4\cos 2x}$ ను గణించండి.

22. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$ ను గణించండి.

23. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ ను గణించండి.

24. $(x^2+y^2)dy=2xydx$ ను సాధించండి.

BABY BULLET-Q

IPE TS MARCH-2023
SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. కేంద్రం (–1,2), వ్యాసార్థం 5 కల్గిన వృత్త సమీకరణమును కనుగొనుము.

Sol: దత్త కేంద్రం $C=(a,b)=(-1,2)$ మరియు వ్యాసార్థం $r=5$

వృత్త సమీకరణం $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=5^2$

$\Rightarrow (x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)=25 \Rightarrow x^2+y^2+2x-4y-20=0$

---

2. $x^2+y^2-10x-2y+6=0$ వృత్తానికి P(3,5) వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: దత్త బిందువు $P(x_1,y_1)=(3,5)$ మరియు వృత్తం $x^2+y^2-10x-2y+6=0$. కేంద్రం $C=(-g,-f)=(5,1)$

P(3,5) మరియు C(5,1)గుండా పోయే అభిలంబరేఖ యొక్క వాలు

$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{5-1}{3-5}=\frac{4}{-2}=-2$$

$\therefore$ –2 వాలుగా కలిగిన (3,5) గుండా పోయే అభిలంబరేఖ సమీకరణం $(y-y_1)=m(x-x_1)$

$\Rightarrow y-5=-2(x-3) \Rightarrow y-5=-2x+6 \Rightarrow 2x+y-11=0$

---

3. $x^2+y^2-3x-4y+5=0$, $3(x^2+y^2)-7x+8y+11=0$ అనే వృత్తాల మూలాక్ష సమీకరణము కనుగొనుము.

Sol: దత్త వృతాల సాధారణ రూపాలు $S\equiv x^2+y^2-3x-4y+5=0$ & $S'\equiv x^2+y^2-\frac{7}{3}x+\frac{8}{3}y+\frac{11}{3}=0$

దత్తవృత్తాల మూలాక్ష సమీకరణము $S-S'=0$

$$\Rightarrow\left(-3+\frac{7}{3}\right)x+\left(-4-\frac{8}{3}\right)y+\left(5-\frac{11}{3}\right)=0 \Rightarrow\left(-\frac{2}{3}\right)x-\frac{20}{3}y+\frac{4}{3}=0 \Rightarrow -2x-20y+4=0$$

$\Rightarrow x+10y-2=0$

BABY BULLET-Q

4. నాభి దూరము 10 గా కలిగిన $y^2=8x$ పరావలయంపై బిందు నిరూపకాలు కనుగొనుము.

Sol: ఇచ్చిన పరావలయం $y^2=8x \Rightarrow 4a=8 \Rightarrow a=2$. మరియు నాభి దూరం SP=10

సూత్రం: నాభి దూరం $SP=x_1+a \Rightarrow x_1+2=10 \Rightarrow x_1=8$.

కాని, $y_1^2=8x_1 \Rightarrow y_1^2=8(8) \Rightarrow y_1=\pm 8$ $\quad \therefore P(x_1,y_1)=(8,\pm 8)$

---

5. $x^2-4y^2=5$ అతిపరావలయానికి $3x-4y+k=0$ స్పర్శరేఖ అయిన k విలువ కనుగొనుము.

Sol: ఇచ్చిన అతిపరావలయం $x^2-4y^2=5 \Rightarrow \dfrac{x^2}{5}-\dfrac{4y^2}{5}=1$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{5/4}=1 \Rightarrow a^2=5$ మరియు $b^2=5/4$

$3x-4y+k=0$ ను $lx+my+n=0$ తో పోల్చగా $l=3, m=-4, n=k$

స్పర్శరేఖ నియమం: $n^2=a^2l^2-b^2m^2 \Rightarrow (k)^2=5(3^2)-\dfrac{5}{4}(-4)^2=45-20=25$

$\therefore k^2=25 \Rightarrow k=\pm 5$

Try this: $3x-4y+k=0$ ను $y=mx+c$ రేఖపైకు మార్చి $c^2=a^2m^2-b^2$ అనే నియమంను అనువర్తించవలెను.

---

6. $\int\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ ను గణించండి.

Sol: $I=\int\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=\int\sqrt{2\sin^2 x}\,dx=\sqrt{2}\int\sin x dx=-\sqrt{2}\cos x+c$

---

7. $\int\dfrac{x^8}{1+x^{18}}dx$ ను గణించండి.

Sol: $x^9=t \Rightarrow 9x^8dx=dt \Rightarrow x^8dx=\dfrac{1}{9}dt$

$$\therefore \int\frac{x^8dx}{1+x^{18}}=\int\frac{x^8dx}{1+(x^9)^2}=\frac{1}{9}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{9}Tan^{-1}t+c=\frac{1}{9}Tan^{-1}(x^9)+c$$

BABY BULLET-Q

8. $\int_2^3 \frac{2x\,dx}{1+x^2}$ ను గణించండి.

Sol: $\int_2^3 \frac{2x\,dx}{1+x^2} = [\log|1+x^2|]_2^3 \quad = \log|1+3^2| - \log|1+2^2|$

$= \log 10 - \log 5 = \log\frac{10}{5} = \log 2$

---

9. $\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\,dx$ ను కనుగొనుము.

Sol : $\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = I_n = I_8 \Rightarrow (n=8)$ 'n' సరి సంఖ్య అయినప్పుడు

$\therefore \int_0^{\pi/2} \cos^8 x\,dx = \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2} = \frac{7}{8} x \frac{5}{6} x \frac{3}{4} x \frac{1}{2} x \frac{\pi}{2} = \frac{35\pi}{256}$

---

10. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - e^x = 4$ అనే అవకలన సమీకరణపు పరిమాణము, తరగతి కనుగొనుము.

Sol: దత్త సమీకరణము ఇచ్చుట గరిష్ట తరగతి గల అవకలని $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2$

$\therefore$ దత్త సమీకరణము నుండి పరిమాణము =3 మరియు తరగతి = ఘాతము =2

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-బి

11. $x^2+y^2=a^2$ వృత్తం $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ రేఖపై ఏర్పరిచే జ్యా పొడవును కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చిన వృత్తం $x^2+y^2=a^2$ యొక్క కేంద్రం $C=(0,0)$, వ్యాసార్థం $r=a$

ఇచ్చిన సరళరేఖ $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ అభిలంబరూపంలో కలదు.

కావున (0,0) నుండి సరళరేఖ గల లంబదూరం p

$\therefore$ జ్యా పొడవు = $2\sqrt{r^2-p^2}=2\sqrt{a^2-p^2}$

---

12. (2,3) కేంద్రం ఉంటూ $x^2+y^2-4x+2y-7=0$ వృత్తాన్ని లంబంగా ఖండించే వృత్త సమీకరణం కనుక్కోండి.

Sol : కావలసిన వృత్త సమీకరణము $S=x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.....(1)

S =0 అనే వృత్త కేంద్రం $C(-g,-f)=(2,3)\Rightarrow g=-2, f=-3$

S=0 అనే వృత్తము $x^2+y^2-4x+2y-7=0$ నకు లంబంగా కలదు.

$\therefore 2gg'+2ff'=c+c' \Rightarrow 2g(-2)+2f(1)=c-7 \Rightarrow -4g+2f=c-7$

$g=-2, f=-3$ లను పై సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా

$\Rightarrow -4(-2)+2(-3)=c-7 \Rightarrow c=8-6+7=9$

$g=-2, f=-3, c=9$ లను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా, కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$x^2+y^2+2(-2)x+2(-3)y+9=0 \quad \Rightarrow x^2+y^2-4x-6y+9=0$

BABY BULLET-Q

13. **$9x^2+16y^2-36x+32y-92=0$ దీర్ఘవృత్తానికి ఉత్కేంద్రత, నాభుల నిరూపకాలు, నాభి లంబం పొడవు, నియతరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.**

Sol: ఇచ్చిన దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $9x^2+16y^2-36x+32y-92=0 \Rightarrow (9x^2-36x)+(16y^2+32y)=92$

$\Rightarrow 9(x^2-4x+4)+16(y^2+2y+1) = 92+36+16 \Rightarrow 9(x-2)^2+16(y+1)^2 = 144$

$$\Rightarrow \frac{9(x-2)^2}{144}+\frac{16(y+1)^2}{144}=1 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-(-1))^2}{9}=1,$$

$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ తో పోల్చగా, $a^2=16, b^2=9 \Rightarrow a=4, b=3 \Rightarrow a>b$.

కావున ఇది క్షితిజ సమాంతర దీర్ఘవృత్తం మరియు $(h,k)=(2,-1)$

(i) $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{16-9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

(ii) నాభులు $=(h\pm ae,k)=(2\pm\frac{4\sqrt{7}}{4},-1)=(2\pm\sqrt{7},-1)$

(iii) నాభిలంబం పొడవు$=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(9)}{4}=\frac{9}{2}$

(iv) నియతరేఖ సమీకరణం $x=h\pm\frac{a}{e}=2\pm\frac{4x4}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}\pm16}{\sqrt{7}} \Rightarrow \sqrt{7}x=(2\sqrt{7}\pm16)$

---

14. **$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ దీర్ఘవృత్తానికి $lx+my+n=0$ స్పర్శరేఖ కావడానికి నియమం కనుక్కోండి.**

Sol: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ దీర్ఘవృత్తానికి $P(\theta)=(a\cos\theta, b\sin\theta)$ వద్ద స్పర్శరేఖ $lx+my+n=0$ అనుకొందాం.

దీర్ఘవృత్తంపై $P(\theta)$ వద్ద స్పర్శరేఖ $\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1$

పై సమీకరణాన్ని $lx+my=-n$ తో పోల్చగా

$$\frac{\cos\theta}{al}=\frac{\sin\theta}{bm}=\frac{-1}{n} \Rightarrow \cos\theta=-\frac{al}{n}, \sin\theta=\frac{-bm}{n}$$

ఇప్పుడు $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

$$\Rightarrow \frac{a^2l^2}{n^2}+\frac{b^2m^2}{n^2}=1 \Rightarrow a^2l^2+b^2m^2=n^2$$

BABY BULLET-Q

15. $x^2-4y^2=12$ అతిపరావలయానికి $y=x-7$ రేఖకు (i) సమాంతరంగాను (ii) లంబంగాను ఉండే స్పర్శరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చిన అతిపరావలయం $3x^2-4y^2=12 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1 \Rightarrow a^2=4, b^2=3$

$y=x-7$ అనే రేఖ వాలు $m=1$

$\Rightarrow$ దీని లంబరేఖ వాలు -1

సూత్రం:

m వాలు కలిగిన స్పర్శరేఖ $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

(i) m=1 కలిగిన సమాంతర స్పర్శరేఖ $y=1.x\pm\sqrt{4(1)^2-3}=x\pm1$

$\Rightarrow x-y\pm1=0$

(ii) m=–1 కలిగిన లంబ స్పర్శరేఖ $y=(-1)x\pm\sqrt{4(1)^2-3}=-x\pm1$

$\Rightarrow x+y\pm1=0$

---

16. $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}dx$ ను గణించండి.

Sol: $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$ అని మనకు తెలును

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}dx \quad .....(1)$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^5\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin^5\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^5\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^5 x dx}{\sin^5 x+\cos^5 x} \quad ......(2)$$

(1) మరియు (2), లను కలుపగా

$$2I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^5 x+\cos^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}dx=\int_0^{\pi/2}1\,dx=[x]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore 2I=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

BABY BULLET-Q

17. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+y}{xy+x}$ ను సాధించండి.

Sol: దత్త అవకలన సమీకరణం $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+y}{xy+x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y(x+1)}{x(y+1)} \Rightarrow \frac{y+1}{y}dy = \frac{x+1}{x}dx$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{y}{y}+\frac{1}{y}\right)dy = \int\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)dx \Rightarrow \int\left(1+\frac{1}{y}\right)dy = \int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\Rightarrow y + \log y = x + \log x + \log c \quad \Rightarrow y - x = \log c + \log x - \log y$$

$$\Rightarrow y - x = \log_e\left(\frac{cx}{y}\right)$$

$\therefore$ సాధన $e^{y-x} = \frac{cx}{y}$

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-సి

18. (3,4), (3,2), (1,4) బిందువుల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణాన్ని మరియు వృత్త కేంద్రాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: A=(3,4), B=(3,2), C=(1,4) అనుకోండి

$S(x_1,y_1)$ ను వృత్త కేంద్రం అనుకొందాం.

$\Rightarrow SA=SB=SC$

ఇప్పుడు, $SA=SB \Rightarrow SA^2=SB^2$

$\Rightarrow (x_1-3)^2+(y_1-4)^2=(x_1-3)^2+(y_1-2)^2$

$\Rightarrow (y_1-4)^2=(y_1-2)^2$

$\Rightarrow (y_1-4)=\pm(y_1-2)$

$\Rightarrow (y_1-4)=(y_1-2)$ (or) $(y_1-4)=-(y_1-2)$

ఇప్పుడు, $y_1-4=-(y_1-2)=-y_1+2$

$\Rightarrow 2y_1=6 \Rightarrow y_1=3$ ....(1)

మరియు, $SA=SC \Rightarrow SA^2=SC^2$

$\Rightarrow (x_1-3)^2+(y_1-4)^2=(x_1-1)^2+(y_1-4)^2$

$\Rightarrow (x_1-3)^2=(x_1-1)^2$

$\Rightarrow (x_1-3)=\pm(x_1-1)$

$\Rightarrow (x_1-3)=(x_1-1)$ (or) $(x_1-3)=-(x_1-1)$

ఇప్పుడు, $x_1-3=-(x_1-1)=-x_1+1$

$\Rightarrow 2x_1=4 \Rightarrow x_1=2$ ....(2)

(1) & (2) నుండి

$\therefore S(x_1,y_1)$ వృత్తం యొక్క కేంద్రం = (2,3) మరియు A=(3,4)

కావున వ్యాసార్థం $r=SA \Rightarrow r^2=SA^2$

$\therefore r^2=(2-3)^2+(3-4)^2=1+1=2$

$\therefore$ (2, 3) కేంద్రం మరియు $r^2=2$ గా గల వృత్త సమీకరణం

$(x-2)^2+(y-3)^2=2$

$\Rightarrow (x^2-4x+4)+(y^2-6y+9)=2$

$\Rightarrow x^2+y^2-4x-6y+11=0$

BABY BULLET-Q

19. **(–2, 3) కేంద్రంగా ఉంటూ $3x + 4y + 4 = 0$ రేఖపై చేసే జ్యా పొడవు 2 అయ్యే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.**

Sol: కేంద్రం (–2,3) నుండి రేఖ $3x+4y+4=0$ కు గల లంబ దూరం $p=\frac{|3(-2)+4(3)+4|}{\sqrt{9+16}}=\frac{10}{5}=2$

దత్తాంశం నుండి జ్యా పొడవు $2 \Rightarrow 2\sqrt{r^2-p^2}=2$

$\Rightarrow \sqrt{r^2-p^2}=1 \Rightarrow r^2-p^2=1 \Rightarrow r^2-2^2=1 \Rightarrow r^2=1+4=5$

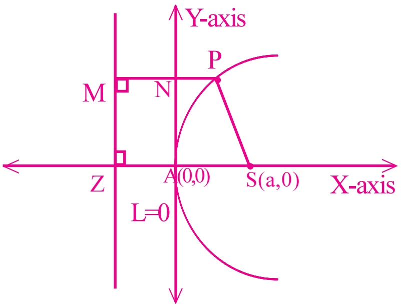
$\therefore$ కేంద్రం (–2, 3) మరియు వ్యాసార్థం $r^2=5$ గా కలిగిన వృత్త సమీకరణం $(x+2)^2+(y-3)^2=5$

$\Rightarrow (x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)=5 \Rightarrow x^2+y^2+4x-6y+8=0$

BABY BULLET-Q

20. పరావలయపు ప్రామాణిక రూపమును ప్రవచించుము.

Sol: పరావలయపు నాభి S మరియు నియతరేఖ L=0 అనుకొనుము.



నియత రేఖపై S యొక్క విక్షేపము Z అనుకొనుము.

SZ యొక్క మధ్యబిందువును A అనుకొనుము

అప్పుడు $SA=AZ \Rightarrow \frac{SA}{AZ}=1$

అనగా A బిందువు పరావలయం పై ఉండును.

AS పరావలయపు ప్రధాన అక్షాన్ని X-అక్షముగా తీసుకొని

ASకు లంబముగా A గుండాపోయే రేఖను Y-అక్షముగా తీసుకొనుము.

అప్పుడు A=(0,0) అగును.

AS=a అనుకుంటే S=(a,0), Z=(−a,0) అగును

అప్పుడు నియతరేఖ సమీకరణము $x=-a \Rightarrow x+a=0$

పరావలయంపై $P(x_1,y_1)$ అనే బిందువును తీసుకొనుము.

Y-అక్షంపై P యొక్క విక్షేపము N అనుకొనుము.

నియతరేఖపై P యొక్క విక్షేపము M అనుకొనుము.

ఇక్కడ $PM=PN+NM=x_1+a$ ($\because$ PN = Pయొక్క x-నిరూపకం మరియు NM=AZ=AS=a)

ఇప్పుడు పరావలయపు 'నాభి–నియతరేఖ ధర్మం' ప్రకారం $\frac{SP}{PM}=1 \Rightarrow SP=PM \Rightarrow SP^2=PM^2$

$\Rightarrow (x_1-a)^2+(y_1-0)^2=(x_1+a)^2$

$\Rightarrow y_1^2=(x_1+a)^2-(x_1-a)^2$

$\Rightarrow y_1^2=4ax_1$ $\quad [\because (a+b)^2-(a-b)^2=4ab]$

$\therefore P(x_1,y_1)$ యొక్క బిందుపథ సమీకరణము $y^2=4ax$

21. $\int \frac{dx}{5+4\cos 2x}$ ను గణించండి.

Sol: $\tan x = t \Rightarrow \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ and $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$$\therefore\ I = \int \frac{\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)}{5+4\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{5(1+t^2)+4(1-t^2)} = \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{1}{3}\text{Tan}^{-1}\left(\frac{t}{3}\right)+c = \frac{1}{3}\text{Tan}^{-1}\left(\frac{\tan x}{3}\right)+c$$

---

22. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$ ను గణించండి.

Sol: Let $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2} = \frac{A(x+1)(x+2)+b(x)(x+2)+C(x)(x+1)}{x(x+1)(x+2)}$

$\Rightarrow A(x+1)(x+2)+b(x)(x+2)+C(x)(x+1)=1$ ......(1)

$x=0$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా $A(1)(2)+B(0)+C(0)=1 \Rightarrow A=1/2$

$x=-1$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా $A(0)+B(-1)(-1+2)+C(0)=1 \Rightarrow -B=1 \Rightarrow B=-1$

$x=-2$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా $A(0)+B(0)+C(-2)(-2+1)=1 \Rightarrow C=1/2$

$$\therefore I = \int \frac{1}{x(x+1)(x+2)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\log|x| - \log|(x+1)| + \frac{1}{2}\log|x+2| + c$$

BABY BULLET-Q

23. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx$ ను గణించండి.

Sol: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ అని మనకు తెలుసు

$$\therefore I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x\right)}} dx$$

$$\Rightarrow I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} dx$$

ఇప్పుడు, $I + I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx + \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx$

$$\Rightarrow 2I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} 1dx = [x]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow I = \frac{\pi}{12}$$

BABY BULLET-Q

24. $(x^2+y^2)dx=2xydy$ ను సాధించండి.

Sol: దత్త సమీకరణము $(x^2+y^2)dx = 2xydy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}$ .....(1). సమఘాత అవకలన సమీకరణము

కావున $y = vx$ అనుకుంటే $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

(1) నుండి $v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2+(vx)^2}{2x(vx)} = \frac{x^2+v^2x^2}{2x^2v} = \frac{x^2(1+v^2)}{2x^2v} = \frac{1+v^2}{2v}$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} - v = \frac{1+v^2-2v^2}{2v} = \frac{1-v^2}{2v}$$

$$\therefore x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{2v} \Rightarrow \frac{2vdv}{1-v^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{2vdv}{1-v^2} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow -\int\frac{-2vdv}{1-v^2} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow -\log(1-v^2) = \log x + \log c \Rightarrow \log x + \log(1-v^2) = \log c$$

$$\Rightarrow \log(x(1-v^2)) = \log c \Rightarrow x(1-v^2) = c \Rightarrow x\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right) = c; \quad \left(\because v = \frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2}\right) = c \Rightarrow \frac{x^2-y^2}{x} = c \Rightarrow x^2-y^2 = cx$$

$\therefore$ సాధన $x^2-y^2 = cx$

BABY BULLET-Q