JR MATHS-1B (TM)

Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH -2023 (TS)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2023(TS)

Time : 3 Hours

గణితశాస్త్రం - 1B

Max.Marks : 75

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: $10 \times 2 = 20$

1. (3, 4), (7, −6) బిందువుల గుండా వెళుతున్న సరళరేఖ యొక్క వాలును కనుగొనుము.
2. $3x + 4y = 5$ సరళరేఖా సమీకరణాన్ని సాధారణ రూపంలోకి మార్చండి.
3. (2, 3– 4) (–3, 3, –2), (–1, 4, 2), (3, 5, 1) శీర్షాలుగా గల చతుర్ముఖి కేంద్రాభాసంను కనుగొనుము.
4. $4x - 4y + 2z + 5 = 0$ అనే తలము యొక్క సమీకరణంను అంతరఖండరూపంలో వ్రాయుము.
5. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$ను గణించండి.
6. $\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{e^{7x}-1}{x}$ ను గణించండి.
7. $\log(\sin(\log x))$ యొక్క అవకలనిని కనుగొనుము.
8. x దృష్ట్యా $\mathrm{Sin}^{-1}(3x-4x^3)$ యొక్క అవకలనిని కనుగొనుము.
9. (–1, 5) వద్ద $y = 5x^2$ అనే వక్రమునకు స్పర్శరేఖ వాలు కనుగొనుము.
10. $y = x^2 + x$ అనే ప్రమేయానికి $x = 10, \Delta x = 0.1$ అయినప్పుడు Δy, dy లను కనుగొనుము.

సెక్షన్-బి

II. ఈ క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 4 = 20$

11. ఒక లంబకోణత్రిభుజపు కర్ణపు కొనలు (0, 6), (6, 0) అయిన ఆ త్రిభుజంపై 3వ శీర్షం యొక్క బిందుపథాన్ని కనుక్కోండి.
12. $\pi/6$ కోణంతో అక్షాలను భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు, $x^2 + 2\sqrt{3}\,xy - y^2 = 2a^2$ రూపాంతర సమీకరణం కనుక్కోండి.
13. $ax + by + c = 0$ రేఖకు $P(x_1, y_1)$ నుంచి లంబపాదం Q(h, k) అయిన $(h - x_1) : a = (k - y_1) : b = -(ax_1 + by_1+c) : (a^2 + b^2)$ అని నిరూపించుము
14. $\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{1-\cos 2mx}{\sin^2 nx}[m,n\in Z]$ ను గణించండి.
15. ప్రాథమిక సూత్రాన్ని ఉపయోగించి tan 2x యొక్క అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.
16. ఒక చతురస్రము యొక్క భుజంలోని పెరుగుదల 2% అయితే దాని వైశాల్యం పెరిగే రేటు శాతాన్ని కనుగొనుము.
17. $x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t)$ అనే వక్రం మీద అనే బిందువు వద్ద ఉపస్పర్శరేఖ మరియు ఉపఅభిలంబ రేఖల పొడవులను కనుగొనుము.

సెక్షన్-సి

III. ఈ క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 7 = 35$

18. (–2,–1),(6, –1), (2, 5) శీర్షాలు గాగల త్రిభుజం లంబకేంద్రాన్ని కనుక్కోండి.
19. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ఒక సరళరేఖాయుగ్మాన్ని సూచిస్తే అప్పుడు వాటి మధ్య కోణం θ అయితే $\cos\theta = \frac{a+b}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$
20. $2x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - y - 1 = 0$ వక్రం $x + 2y = k$ రేఖల ఖండన బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపే రేఖలు పరస్పరం లంబాలయితే k విలువ కనుక్కోండి.
21. ఒక సమఘనము యొక్క రెండు కర్ణాల మధ్య కోణమును కనుగొనుము.
22. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=a(x-y)$ అయిన $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ అని నిరూపించండి.
23. $y^2 = 4(x + 1), y^2 = 36(9 - x)$ వక్రాలు లంబంగా ఖండించుకొంటాయని చూపండి.
24. ఒక సమఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం 9 క్యూబిక్ సెం.మీ/సె. చొప్పున పెరుగుచున్నది. భుజం పొడవు 10 సెం.మీ గా ఉన్నప్పుడు ఉపరితల వైశాల్యం పెరిగే రేటును కనుగొనుము.

IPE TS MARCH-2023

SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. (3, 4), (7, –6) బిందువుల గుండా వెళుతున్న సరళరేఖ యొక్క వాలును కనుగొనుము.

A: దత్తాంశం నుండి $A=(x_1, y_1)=(3, 4)$; $B=(x_2, y_2)=(7, -6)$

A (3,4) , (7,–6) ల గుండా వెళుతున్న సరళరేఖ యొక్క వాలు $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-6-4}{7-3}=\frac{-10}{4}=\frac{-5}{2}$

---

2. 3x + 4y = 5 సమీకరణాన్ని అభిలంబరూపంలోనికి మార్చుము.

A: దత్త సమీకరణం $3x+4y=5\ [\because\ p\geq 0]$

$\sqrt{(3)^2+(4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ తో భాగించగా $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=\frac{5}{5}=1$

ఇక్కడ $p=1, \cos\alpha=\frac{3}{5}, \sin\alpha=\frac{4}{5}$. Hence $\tan\alpha=\frac{4}{3}\Rightarrow\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\in Q_1$

---

3. (2, 3 –4) (–3, 3, –2), (–1, 4, 2), (3, 5, 1) శీర్షాలుగా గల చతుర్ముఖి కేంద్రాభాసంను కనుగొనుము.

A: $A=(2, 3, -4), B=(-3, 3, -2), C=(-1, 4, 2), D=(3, 5, 1)$

కేంద్రభాసం $G=\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}, \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$

$=\left(\frac{2-3-1+3}{4}, \frac{3+3+4+5}{4}, \frac{-4-2+2+1}{4}\right) \quad =\left(\frac{1}{4}, \frac{15}{4}, \frac{-3}{4}\right)$

---

4. 4x–4y+2z+5=0 అనే తలము యొక్క సమీకరణంను అంతరఖండరూపంలో వ్రాయుము.

Sol: ఇచ్చిన తలం యొక్క సమీకరణం $4x-4y+2z+5=0\Rightarrow 4x-4y+2z=-5$

$\Rightarrow\frac{4x}{-5}+\frac{-4y}{-5}+\frac{2z}{-5}=1\Rightarrow\frac{x}{\left(\frac{-5}{4}\right)}+\frac{y}{\left(\frac{5}{4}\right)}+\frac{z}{\left(\frac{-5}{2}\right)}=1$ ఇది $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ అంతరఖండం రూపంలో ఉంది.

BABY BULLET-Q

5. $\underset{x\to 2}{Lt}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right]$ ను గణించుము.

A: $\underset{x\to 2}{Lt}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right]=\underset{x\to 2}{Lt}\frac{x+2-4}{x^2-4}=\underset{x\to 2}{Lt}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\underset{x\to 2}{Lt}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$

---

6. $\underset{x\to 0}{Lt}\frac{e^{7x}-1}{x}$ ను గణించుము.

A: $\underset{x\to 0}{Lt}\frac{e^{7x}-1}{x}=\underset{7x\to 0}{Lt}\frac{e^{7x}-1}{7x}\times 7=(1)7=7$ $\left(\because \underset{x\to 0}{Lt}\frac{e^{x}-1}{x}=1\right)$

---

7. $y = \log(\sin(\log x))$, అయిన dy/dx ను కనుగొనుము.

A: $y=\log(\sin(\log x))$ అయిన $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\log[\sin(\log x)]$

$=\frac{1}{\sin(\log x)}\frac{d}{dx}\sin(\log x)\quad=\frac{1}{\sin(\log x)}\cos(\log x).\frac{d}{dx}\log x$

$=\frac{\cos(\log x)}{\sin(\log x)}.\frac{1}{x}=\frac{\cot(\log x)}{x}$

---

8. $\mathrm{Sin}^{-1}(3x-4x^3)$ యొక్క అవకలమును కనుగొనుము.

A: $x=\sin\theta$ అయిన $\theta=\mathrm{Sin}^{-1}x$

$\therefore \mathrm{Sin}^{-1}(3x-4x^3)=\mathrm{Sin}^{-1}(3\sin\theta-4\sin^3\theta)=\mathrm{Sin}^{-1}(\sin 3\theta)=3\theta=3(\mathrm{Sin}^{-1}x)$

$\therefore \frac{d}{dx}(3\mathrm{Sin}^{-1}x)=3\frac{d}{dx}\mathrm{Sin}^{-1}x=3\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$

---

9. $(-1, 5)$ వద్ద $y = 5x^2$ అనే వక్రమునకు స్పర్శరేఖ వాలు కనుగొనుము.

A: దత్త సమీకరణం $y=5x^2\Rightarrow\frac{dy}{dx}=10x$

$(-1, 5)$వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు $m=10(-1)=-10$

BABY BULLET-Q

10. $y=x^2+x$ అనే ప్రమేయానికి $x=10, \Delta x=0.1$ అయినప్పుడు Δy, dy లను కనుగొనుము.

A: • దత్తాంశం $y=f(x)=x^2+x$; $x=10, \Delta x=0.1$

★ (i) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

★ $=[(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)] - x^2 - x$

★ $=[\cancel{x^2} + (\Delta x)^2 + 2x\Delta x] + \cancel{x} + \Delta x - \cancel{x^2} - \cancel{x}$

• $= (\Delta x)^2 + 2x\Delta x + \Delta x$

★ $= \Delta x(\Delta x + 2x + 1)$

• $= 0.1\,(0.1 + 2(10) + 1)$

★ $= (0.1)(0.1+21) = (0.1)(21.1) = 2.11$

★ (ii) $dy = f'(x)\Delta x = (2x+1)\,\Delta x$

★ $=[2(10)+1)(0.1)] = 21(0.1) = 2.1$

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-బి

11. ఒక లంబకోణత్రిభుజపు కర్ణపు కొనలు (0,6), (6,0) అయిన ఆ త్రిభుజంపై మూడవ శీర్షం యొక్క బిందుపథాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: A=(0,6), B=(6,0) దత్త బిందువులు.

P(x,y) బిందుపథ బిందువు.

దత్త నియమం నుండి: $\angle APB=90^\circ$

$\Rightarrow PA^2+PB^2=AB^2$

$\Rightarrow [(x-0)^2+(y-6)^2]+[(x-6)^2+(y-0)^2]=(0-6)^2+(6-0)^2$

$\Rightarrow x^2+(y^2+36-12y)+(x^2+36-12x)+y^2=36+36$

$\Rightarrow 2x^2+2y^2-12x-12y=0 \Rightarrow 2(x^2+y^2-6x-6y)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-6x-6y=0$ $\therefore$ P(x,y) బిందుపథం $x^2+y^2-6x-6y=0$

---

12. $\pi/6$ కోణంతో అక్షాలను భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు, $x^2+2\sqrt{3}xy-y^2=2a^2$ రూపాంతర సమీకరణం కనుక్కోండి.

Sol: •దత్త మూల సమీకరణం $x^2+2\sqrt{3}xy-y^2=2a^2$ ....(1)

•భ్రమణ పరివర్తన కోణం $\theta=\pi/6=30^\circ$ అయిన

★ $x=X\cos\theta-Y\sin\theta \Rightarrow x=X\cos30^\circ-Y\sin30^\circ=X\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-Y\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}X-Y}{2}$

★ $y=Y\cos\theta+X\sin\theta \Rightarrow y=Y\cos30^\circ+X\sin30^\circ=Y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+X\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}Y+X}{2}$

•(1) నుండి, రూపాంతర సమీకరణం

• $\left(\frac{\sqrt{3}X-Y}{2}\right)^2+2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}X-Y}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}Y+X}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}Y+X}{2}\right)^2=2a^2$

• $\Rightarrow \frac{(\sqrt{3}X-Y)^2+2\sqrt{3}(\sqrt{3}X-Y)(\sqrt{3}Y+X)-(\sqrt{3}Y+X)^2}{4}=2a^2$

★ $\Rightarrow (3X^2+Y^2-2\sqrt{3}XY)+2\sqrt{3}(3XY+\sqrt{3}X^2-\sqrt{3}Y^2-XY)-(3Y^2+X^2+2\sqrt{3}XY)=4(2a^2)$

★ $\Rightarrow 3X^2+Y^2-2\sqrt{3}XY+6\sqrt{3}XY+6X^2-6Y^2-2\sqrt{3}XY-3Y^2-X^2-2\sqrt{3}XY=8a^2$

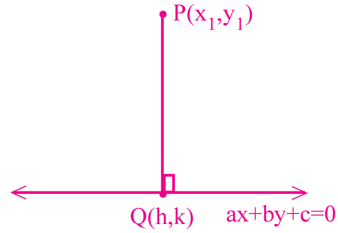
• $\Rightarrow 8X^2-8Y^2=8a^2$

• $\Rightarrow 8(X^2-Y^2)=8(a^2)$

• $\Rightarrow X^2-Y^2=a^2$.

BABY BULLET-Q

13. $ax+by+c=0$ రేఖకు $P(x_1,y_1)$ నుంచి లంబపాదం $Q(h,k)$ అయిన $(h-x_1) : a=(k-y_1):b = -(ax_1+by_1+c) : (a^2+b^2)$ అని నిరూపించండి.



Sol: • దత్త బిందువులు $P=(x_1,y_1)$,$Q=(h,k)$

• $\overline{PQ}$ యొక్క వాలు

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{k - y_1}{h - x_1}$$

• దత్త సరళరేఖ $ax+by+c=0$ యొక్క వాలు $m_2 = -\frac{a}{b}$

• ఇప్పుడు $m_1m_2= -1$ [∵ 2 రేఖలు పరస్పర లంబం]

★ $\Rightarrow \left(\frac{k-y_1}{h-x_1}\right)\left(\not{-}\frac{a}{b}\right) = \not{-}1 \Rightarrow \left(\frac{k-y_1}{h-x_1}\right)\left(\frac{a}{b}\right)=1$

• $\Rightarrow \frac{k-y_1}{h-x_1} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{k-y_1}{b} = \frac{h-x_1}{a}$

★ $\frac{h-x_1}{a} = \frac{k-y_1}{b} = r$ ....(1) అనుకొనుము

★ $\therefore \frac{h-x_1}{a} = r \Rightarrow h-x_1 = ar \Rightarrow h = x_1 + ar$

★ $\frac{k-y_1}{b} = r \Rightarrow k-y_1 = br \Rightarrow k = y_1 + br$

★ కాని $Q(h,k)$ బిందువు $ax+by+c=0$ రేఖపై ఉండును.

• $\Rightarrow ah+bk+c=0$

• $\Rightarrow a(x_1+ar)+b(y_1+br)+c=0$

• $\Rightarrow ax_1+a^2r+by_1+b^2r+c=0$

• $\Rightarrow a^2r+b^2r+ax_1+by_1+c=0$

★ $\Rightarrow r(a^2+b^2) = -(ax_1+by_1+c)$

★ $\Rightarrow r = \frac{-(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$ ....(2)

★(1) & (2) నుండి

$$\frac{h-x_1}{a} = \frac{k-y_1}{b} = \frac{-(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$$

BABY BULLET-Q

14. $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{1-\cos 2mx}{\sin^2 nx}$ ను గణించుము.

Sol : $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{2\sin^2 mx}{\sin^2 nx}=2\underset{x\to 0}{Lt}\left(\dfrac{\sin mx}{mx}\right)^2\left(\dfrac{nx}{\sin nx}\right)^2.\dfrac{m^2x^2}{n^2x^2}=2(1)^2(1)^2\dfrac{m^2}{n^2}=\dfrac{2m^2}{n^2}$

---

15. ప్రాథమిక సూత్రాన్ని ఉపయోగించి **tan2x** యొక్క అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: • f(x)=tan(2x) అనుకుంటే

★f(x+h)=tan2(x+h)=tan(2x+2h)

•ప్రాథమిక సూత్రం నుండి

★ $f'(x)=\underset{h\to 0}{Lt}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

• $=\underset{h\to 0}{Lt}\dfrac{\tan(2x+2h)-\tan(2x)}{h}$

★ $=\underset{h\to 0}{Lt}\dfrac{1}{h}\left[\dfrac{\sin(2x+2h)}{\cos(2x+2h)}-\dfrac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\right]$

• $=\underset{h\to 0}{Lt}\dfrac{1}{h}\left[\dfrac{\sin(2x+2h)\cos(2x)-\cos(2x+2h)\sin(2x)}{\cos(2x+2h)\cos(2x)}\right]$

★ $=\underset{h\to 0}{Lt}\dfrac{1}{h}\dfrac{\sin[(\cancel{2x}+2h)-\cancel{2x}]}{\cos(2x+2h)\cos(2x)}$ $[\because \sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin(A-B)]$

★ $=\underset{h\to 0}{Lt}\dfrac{\sin 2h}{h}\underset{h\to 0}{Lt}\dfrac{1}{\cos(2x+2h)\cos(2x)}$

★ $=2.\dfrac{1}{\cos^2(2x)}=2\sec^2(2x)$

---

16. ఒక చతురస్రము యొక్క భుజంలోని పెరుగుదల 2% అయితే దాని వైశాల్యం పెరిగే రేటు శాతాన్ని కనుగొనుము.

Sol: x ను చతురస్రము యొక్క ఒక భుజము అనుకొనుము.

దత్తాంశం నుండి $\dfrac{dx}{x}\times 100=2$

చతురస్ర వైశాల్యం $A=x^2$ $\Rightarrow dA=2xdx$

$\Rightarrow\dfrac{dA}{A}=\dfrac{2\cancel{x}dx}{\cancel{x^2}}\Rightarrow\dfrac{dA}{A}=2\left(\dfrac{dx}{x}\right)$ [ఇరువైపులా 100 చే గుణించగా]

$\therefore\dfrac{dA}{A}\times 100=2\left(\dfrac{dx}{x}\right)\times 100=2(2)=4$ ∴ వైశాల్యం పెరిగే రేటు శాతం 4

BABY BULLET-Q

17. x=a(cost+tsint), y=a(sint–tcost) అనే వక్రం మీద t అనే బిందువు వద్ద ఉపస్పర్శరేఖ మరియు ఉపఅభిలంబరేఖల పొడవులను కనుగొనుము.

Sol: • x=a(cost+tsint) ను t దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

• $\frac{dx}{dt}=a\frac{d}{dt}[(\cos t+t\sin t)]$

★ $=a\left[-\sin t+[t\cos t+\sin t(1)]\right]$ (tsint మీద UVసూత్రాన్ని ప్రతిక్షేపించగా)

• $\therefore \frac{dx}{dt}=a(t\cos t)$

• ఇప్పుడు y=a(sint–tcost) ను t దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

• $\frac{dy}{dt}=a\frac{d}{dt}[(\sin t-t\cos t)]$

★ $=a\left[\cos t-[t(-\sin t)+\cos t(1)]\right]$ (tcost మీద UVసూత్రాన్ని ప్రతిక్షేపించగా)

• $\therefore \frac{dy}{dt}=a(t\sin t)$

★ $\therefore m=\frac{dy}{dx}=\frac{(dy/dt)}{(dx/dt)}=\frac{a(t\sin t)}{a(t\cos t)}=\tan t$

• కావున m=tant మరియు y=a(sint–tcost).

★**(i) ఉపస్పర్శరేఖ పొడవు** $=\left|\frac{y}{m}\right|=\left|\frac{a(\sin t-t\cos t)}{\tan t}\right|=|a(\sin t-t\cos t)\cot t|$

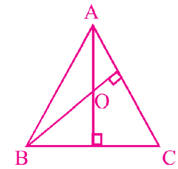
★**(ii) ఉపఅభిలంబరేఖ పొడవు** $=|y.m|=|a(\sin t-t\cos t)\tan t|$

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-సి

18. (–2,–1),(6, –1),(2, 5) శీర్షాలుగా గల త్రిభుజ లంబకేంద్రాన్ని కనుక్కోండి.

Sol:
- లంబకేంద్రం O(x,y) అనుకొనిన
- A=(–2,–1), B=(6,–1), C= (2,5) శీర్షాలు



స్టెప్ 1: A(–2,–1) గుండా పోయే ఉన్నతి సమీకరణం

$\overline{BC}$ యొక్క వాలు $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5+1}{2-6} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$

దీనికి లంబంగా ఉండే రేఖవాలు $\frac{-1}{m} = \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

A(–2,–1) గుండా పోతూ వాలు $\frac{2}{3}$ గా కలిగిన ఉన్నతి సమీకరణం $y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

$\Rightarrow y+1=\frac{2}{3}(x+2) \Rightarrow 3y+3=2x+4$

$\Rightarrow 2x - 3y + 1 = 0$.........(1)

స్టెప్ 2: B(6,–1) గుండా పోయే ఉన్నతి సమీకరణం

$\overline{AC}$ యొక్క వాలు

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5+1}{2+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

దీనికి లంబంగా ఉండే రేఖవాలు $\frac{-1}{m} = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$

B(6,–1) గుండా పోతూ వాలు $-\frac{2}{3}$ గా కలిగిన ఉన్నతి సమీకరణం $y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

$\Rightarrow y + 1 = -\frac{2}{3}(x - 6) \Rightarrow 3y + 3 = -2x + 12$

$\Rightarrow 2x + 3y - 9 = 0$.........(2)

స్టెప్ 3: (1), (2) లను సాధించగా O;

(1) $\Rightarrow 2x-3y+1=0$

(2) $\Rightarrow 2x+3y-9=0$

(1)+(2)$\Rightarrow 4x-8=0 \Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=2$

(1) $\Rightarrow 2(2)-3(y)+1=0 \Rightarrow 3y=5 \Rightarrow y=5/3$

$\Rightarrow x=2$, $y=5/3$

$\therefore$ లంబకేంద్రంO (x,y) =(2 ,5/3).

BABY BULLET-Q

19. **$ax^2+2hxy+by^2=0$ అనే సరళరేఖాయుగ్మాల మధ్య కోణము θ అయిన $\cos\theta = \frac{a+b}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$ అని నిరూపించుము.**

Proof: $ax^2+2hxy+by^2=0$ యొక్క విడి సమీకరణాలు $l_1x+m_1y=0$ .....(1) మరియు $l_2x+m_2y=0$ ......(2)

$\therefore ax^2+2hxy+by^2 \equiv (l_1x+m_1y)(l_2x+m_2y)$

ఇరువైపులా పోల్చగా $l_1l_2=a, l_1m_2+l_2m_1=2h, m_1m_2=b.$

(1) మరియు (2) ల మధ్యకోణము θ అయిన

$$\cos\theta = \frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{(l_1^2+m_1^2).(l_2^2+m_2^2)}} = \frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2l_2^2+m_1^2m_2^2+l_1^2m_2^2+l_2^2m_1^2}}$$

$$= \frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{(l_1l_2-m_1m_2)^2+\cancel{2l_1l_2m_1m_2}+(l_1m_2+l_2m_1)^2-\cancel{2l_1l_2m_1m_2}}}$$

$$= \frac{a+b}{\sqrt{(a-b)^2+(2h)^2}} = \frac{a+b}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}} \quad \left[\begin{array}{l}\because a^2+b^2=(a-b)^2+2ab \\ \quad a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\end{array}\right]$$

BABY BULLET-Q

20. **$2x^2-2xy+3y^2+2x-y-1=0$ వక్రం $x+2y=k$ రేఖల ఖండన బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపే రేఖలు పరస్పరం లంబాలయితే k విలువ కనుక్కోండి.**

Sol: • దత్తరేఖ $x+2y=k \Rightarrow \frac{x+2y}{k}=1$ ...(1)

• దత్త వక్రం $2x^2-2xy+3y^2+2x-y-1=0$............(2)

• (1) & (2) ల నుండి సమఘాతీకరణ సమీకరణం

★ $2x^2-2xy+3y^2+2x(1)-y(1)-(1)^2=0$

★ $\Rightarrow 2x^2-2xy+3y^2+2x\left(\frac{x+2y}{k}\right)-y\left(\frac{x+2y}{k}\right)-\frac{(x+2y)^2}{k^2}=0$

★ $\Rightarrow \frac{k^2(2x^2-2xy+3y^2)+k(2x^2+4xy)-k(xy+2y^2)-(x^2+4y^2+4xy)}{k^2}=0$

★ $\Rightarrow k^2(2x^2-2xy+3y^2)+k(2x^2+4xy)-k(xy+2y^2)-(x^2+4y^2+4xy)=0$

★ $\Rightarrow x^2(2k^2+2k-1)+y^2(3k^2-2k-4)+xy(-2k^2+3k-4)=0$

• సరళరేఖాయుగ్మాలు పరస్పర లంబాలు అయితే

★ x^2 గుణకం $+ y^2$ గుణకం $=0$

• $\Rightarrow (2k^2+\cancel{2k}-1)+(3k^2-\cancel{2k}-4)=0 \Rightarrow 5k^2-5=0$

• $\Rightarrow \cancel{5}(k^2-1)=0 \Rightarrow k^2-1=0 \Rightarrow k^2=1 \Rightarrow k=\pm1$

కావున, k విలువ ±1

BABY BULLET-Q

21. ఒక సమఘనము యొక్క రెండు కర్ణాల మధ్య కోణమును కనుగొనుము.

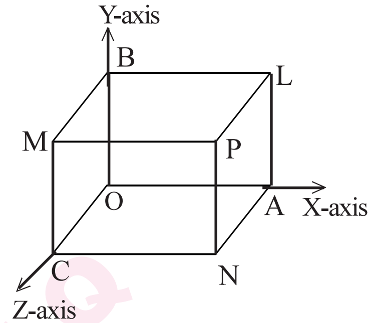
Sol: ⋆O,A,B,C,L,M,N,P శీర్షాలుగా గల సమఘనం యొక్క భుజం 'a' మరియు మూలబిందువు O=(0,0,0) అనుకొందాం.

⋆A,B,C లు వరుసగా X-అక్షం, Y-అక్షం, Z-అక్షం అయిన

A=(a,0,0), B=(0,a,0), C=(0,0,a)

⋆L,M,N లు వరుసగా XY-తలం, YZ-తలం, ZX-తలం అయిన

L=(a,a,0), M=(0,a,a), N=(a,0,a)



⋆ XYZ అంతరాళంలోని శీర్షము P అయితే P=(a,a,a)

⋆ $\overline{OP}$, $\overline{CL}$ లు రెండు కర్ణాలు అనుకొందాం.

• $\overline{OP}$ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $=(a-0, a-0, a-0) = (a,a,a)=(a_1,b_1,c_1)$

• $\overline{CL}$ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $=(a-0, a-0, 0-a)=(a,a,-a)=(a_2,b_2,c_2)$

• కావున రెండు కర్ణాల మధ్య కోణం

$$\star \cos\theta = \frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}}$$

$$= \frac{|a(a)+a(a)+a(-a)|}{\sqrt{(a^2+a^2+a^2)(a^2+a^2+a^2)}}$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{(3a^2)(3a^2)}} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$$

$$\star \therefore \cos\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{1}{3}$$

కావున సమఘనం యొక్క రెండు కర్ణాల మధ్య కోణం $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ అని నిరూపించబడినది.

BABY BULLET-Q

22. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=a(x-y)$ **అయిన** $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ **అని నిరూపించండి.**

Sol: • దత్తాంశం నుండి $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=a(x-y)$

★ $x=\sin\alpha$, $y=\sin\beta$, అనుకొనిన

• $\sqrt{1-\sin^2\alpha}+\sqrt{1-\sin^2\beta}=a(\sin\alpha-\sin\beta)$

• $\Rightarrow \cos\alpha+\cos\beta=a(\sin\alpha-\sin\beta)$

★ $\Rightarrow \frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=a$

★ $\Rightarrow \frac{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}=a$

$$\left[\begin{array}{l}\because \cos C+\cos D=2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)\\ \sin C-\sin D=2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)\end{array}\right]$$

• $\Rightarrow \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}=a \Rightarrow \cot\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=a$

★ $\Rightarrow \frac{\alpha-\beta}{2}=\mathrm{Cot}^{-1}(a)$

• $\Rightarrow \alpha-\beta=2\mathrm{Cot}^{-1}(a)$

★ కానీ, $\sin\alpha=x \Rightarrow \alpha=\mathrm{Sin}^{-1}x$ and $y=\sin\beta \Rightarrow \beta=\mathrm{Sin}^{-1}y$

★ $\therefore \mathrm{Sin}^{-1}x-\mathrm{Sin}^{-1}y=2\mathrm{Cot}^{-1}(a)$

• x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

★ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx}=0$

★ $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

BABY BULLET-Q

23. $y^2=4(x+1)$, $y^2=36(9-x)$ **వక్రాలు లంబంగా ఖండించుకుంటాయని చూపండి.**

Sol: 1) ఖండన బిందువులను కనుగొనుట:

- $y^2=4(x+1)$....(1) మరియు $y^2=36(9-x)$ ....(2) అనుకొనుము.
- (1) , (2) లను సాధించగా P, Q వచ్చును.

★ $4(x+1)=36(9-x) \Rightarrow x+1=9(9-x)$

- $\Rightarrow x+1=81-9x \Rightarrow 10x=80 \Rightarrow x=8$
- x=8 ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా $y^2=4(8+1) \Rightarrow y^2=(4)(9)=36 \Rightarrow y=\pm 6$

★ ∴ రెండు వక్రాల ఖండన బిందువులు P(8,6), Q(8,–6)

2) అవకలనులను కనుగొనుట:

- $y^2=4(x+1)$ ను x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా
- $2y\frac{dy}{dx}=4 \Rightarrow y\frac{dy}{dx}=2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}$ ....(3)
- ఇప్పుడు $y^2=36(9-x)$ ను x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా
- $2y\frac{dy}{dx}=-36 \Rightarrow y\frac{dy}{dx}=-18 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-18}{y}$ ....(4)

3) వాలులు కనుగొనుట:

సందర్భం (i): P(8, 6) వద్ద

- (3) నుండి P(8,6) వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు $m_1=\frac{2}{y}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
- (4) నుండి P(8,6) వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు $m_2=\frac{-18}{y}=\frac{-18}{6}=-3$

★ వాలుల లబ్ధం $(m_1)(m_2)=(1/3)(-3)=-1$

- ∴ దత్త వక్రాలు P(8,6) వద్ద లంబంగా ఖండించుకొంటాయి.

సందర్భం (ii): Q(8,–6) వద్ద

- (3) నుండి (8,–6) వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు $m_1=\frac{2}{y}=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}$
- (4) నుండి (8,–6) వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు $m_2=\frac{-18}{y}=\frac{-18}{-6}=3$

★ వాలుల లబ్ధం $m_1m_2=(-1/3)(3)=-1$

∴దత్త వక్రాలు Q(8,–6) వద్ద లంబంగా ఖండించుకొంటాయి.

BABY BULLET-Q

24. ఒక సమఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం 9 క్యూబిక్ సెం.మీ/సె. చొప్పున పెరుగుచున్నది. భుజం పొడవు 10 సెం.మీ గా ఉన్నప్పుడు ఉపరితల వైశాల్యం పెరిగే రేటును కనుగొనుము.

Sol: • సమఘనము యొక్క భుజము పొడవు= x ,

• ఘనపరిమాణం=V మరియు ఉపరితల వైశాల్యం=S అనుకొనుము

★దత్తాంశం నుండి $\frac{dV}{dt}=9$ క్యూబిక్ సెం.మీ/సె. మరియు x=10 సెం.మీ

★ సమఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం $V=x^3$

★'t' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా $\frac{dV}{dt}=3x^2\frac{dx}{dt}$

★ $\Rightarrow 9=3x^2\frac{dx}{dt}\Rightarrow\frac{dx}{dt}=\frac{\cancel{9}}{\cancel{3}x^2}=\frac{3}{x^2}$

★ఉపరితల వైశాల్యం $S=6x^2$

★'t' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

★ $\frac{dS}{dt}=12x\frac{dx}{dt}=12\cancel{x}\left(\frac{3}{\cancel{x^2}}\right)$

★ $=\frac{36}{x}=\frac{36}{10}=3.6$ సెం.మీ^{2}/సె.

BABY BULLET-Q