JR MATHS-1A (TM)

Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH-2023 (TS)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2023(TS)

Time : 3 Hours **గణితశాస్త్రం - 1A** Max.Marks : 75

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: $10 \times 2 = 20$

1. $A=\{-2,-1,0,1,2\}$, $f: A \to B$ సంగ్రస్త ప్రమేయం మరియు $f(x)=x^2+x+1$ అయిన B ను కనుగొనుము.
2. $\dfrac{2x^2-5x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ అనే ప్రమేయపు ప్రదేశము కనుగొనుము.
3. $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&2&1\\1&2&3\end{bmatrix}$ అయిన 3B–2A ను కనుగొనుము.
4. $\begin{bmatrix}0&2&1\\-2&0&-2\\-1&x&0\end{bmatrix}$ వక్రసౌష్ఠవ మాత్రిక అయిన **x** విలువ కనుగొనుము.
5. $\bar{a}=2\bar{i}+4\bar{j}-5\bar{k}, \bar{b}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}, \bar{c}=\bar{j}+2\bar{k}$ అయిన $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ నకు వ్యతిరేక దిశలోని యూనిట్ సదిశ కనుగొనుము.
6. $2\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}$ అనే బిందువు గుండా పోవుచూ, $4\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k}$ అనే సదిశకు సమాంతరంగా ఉండే సరళరేఖసదిశా సమీకరణం రాయండి.
7. $\bar{i}-\lambda\bar{j}+2\bar{k}, 8\bar{i}+6\bar{j}-\bar{k}$ అనే సదిశలు లంబంగా ఉన్న λ విలువ కనుగొనుము.
8. $f(x)=\cos\left(\dfrac{4x+9}{5}\right)$ ప్రమేయపు ఆవర్తనము కనుగొనుము.
9. f(x)=3cosx+4sinx యొక్క గరిష్ట, కనిష్ట విలువలను కనుగొనుము. **10.** sinhx=3 అయిన $x=\log(3+\sqrt{10})$ అని చూపండి.

సెక్షన్-బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 4 = 20$

11. $A=\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}$ అయితే, A^3. ను కనుగొనుము.
12. A,B,C, D బిందువుల స్థానసదిశలు వరసగా $\bar{a}+2\bar{b}, 2\bar{a}-\bar{b}, \bar{a}, 3\bar{a}+\bar{b}$ అయితే $\overline{AC}, \overline{DA}, \overline{BA}, \overline{BC}$ సదిశలను $\bar{a}, \bar{b}$ లలోరాయండి
13. (1, 2, 1), (3, 2 ,5), (2, –1, 0), (–1, 0, 1) లు శీర్షాలుగా గల చతుర్ముఖ ఘనపరిమాణం కనుగొనుము.
14. $\cos^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}+\cos^2\dfrac{5\pi}{8}+\cos^2\dfrac{7\pi}{8}=2$ అని నిరూపించండి. 15. $7\sin^2\theta+3\cos^2\theta=4$ ను సాధించండి.
16. $\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{3}{5}+\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{8}{17}=\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{36}{85}$ అని నిరూపించండి. 17. $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=\dfrac{s^2}{\Delta}$ అని నిరూపించండి.

సెక్షన్-సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 7 = 35$

18. $f:A\to B, g:B\to C$ లు ద్విగుణ ప్రమేయాలు అయిన $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ అని నిరూపించండి.
19. పరిమిత గణితాను గమన సిద్ధాంతంనుపయోగించి $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\ldots+$(n పదాల వరకు) $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$, $\forall n \in N$ అని రుజువు చేయండి.
20. $\begin{vmatrix}a+b+2c&a&b\\c&b+c+2a&b\\c&a&c+a+2b\end{vmatrix}=2(a+b+c)^3$ అని చూపండి.
21. $x-y+3z=5, 4x+2y-z=0, x+3y+z=5$ సమీకరణాలను క్రామర్ పద్ధతిన సాధించండి.
22. $\bar{a}=7\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k}, \bar{b}=2\bar{i}+8\bar{k}, \bar{c}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$ అయితే $\bar{a}\times\bar{b}, \bar{a}\times\bar{c}, \bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})$ లను గణించండి. సదిశా లబ్ధం, సదిశా సంకలనంపై విభజితం అవుతుందేమో సరిచూడండి.
23. $A+B+C=180^o$ అయిన $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ అని నిరూపించండి.
24. ΔABC లో $a=13, b=14, c=15$ అయిన $R=\dfrac{65}{8}, r=4, r_1=\dfrac{21}{2}, r_2=12, r_3=14$ అని చూపండి.

IPE TS MARCH-2023
SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ $f:A\to B$ సంగ్రస్త ప్రమేయం మరియు $f(x)=x^2+x+1$ అయిన B ను కనుగొనుము.

Sol: దత్తాంశం నుండి $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ మరియు

$f(x)=x^2+x+1$

$\therefore f(-2)=(-2)^2-2+1=4-2+1=3;$

$f(-1)=(-1)^2-1+1=1;$

$f(0)=0^2+0+1=1;$

$f(1)=1^2+1+1=3;$

$f(2)=2^2+2+1=7$

$\therefore B=f(A)=\{3,1,1,3,7\}=\{3,1,7\}$

[$\because$ సంగ్రస్తము ప్రమేయమునకు వ్యాప్తి f(A)= సహప్రదేశము B]

---

2. $\dfrac{2x^2-5x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ అనే వాస్తవ ప్రమేయపు ప్రదేశము కనుగొనుము.

Sol: $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)} \in R \Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3)\neq 0 \Rightarrow x\neq 1,2,3$

$\therefore$ f(x) యొక్క ప్రదేశము $R-\{1,2,3\}$

---

3. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ అయిన 3B–2A ను కనుగొనుము.

Sol: దత్తాంశం నుండి $B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}; A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$

$$\therefore 3B-2A=3\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 6 & 3\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 6 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9-2 & 6-4 & 3-6\\ 3-6 & 6-4 & 9-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 2 & -3\\ -3 & 2 & 7\end{bmatrix}$$

BABY BULLET-Q

4. **వక్రసౌష్ఠవ మాత్రికను నిర్వచించండి. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & x & 0 \end{bmatrix}$ ఒక సౌష్ఠవ మాత్రిక అయిన x విలువ కనుగొనుము.**

Sol: వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రిక: $A^T = -A$ అయ్యేటట్లుగా ఉండే చతురస్ర మాత్రిక A ని వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రిక అంటారు.

దత్తాంశము నుండి $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & x & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -A^T = -\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & x \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -x \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

ఇప్పుడు, $A = -A^T \Rightarrow x = 2$ [2×3 మూలకాలను సమానం చేయగా]

---

5. **$\bar{a} = 2\bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k}, \bar{b} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}, \bar{c} = \bar{j} + 2\bar{k}$. అయిన $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ నకు వ్యతిరేక దిశలోని యూనిట్ సదిశ కనుగొనుము.**

Sol: దత్తాంశం నుండి $\bar{a} = 2\bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k}, \bar{b} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}, \bar{c} = 0\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ అయిన $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$

$= (2\bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k}) + (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) + (0\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}) = 3\bar{i} + 6\bar{j} - 2\bar{k}$

$\Rightarrow |\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7$

$\therefore$ కావలసిన యూనిట్ సదిశ $= \dfrac{-(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})}{|\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}|} = \dfrac{-(3\bar{i} + 6\bar{j} - 2\bar{k})}{7}$

---

6. **$2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$ అనే బిందువు గుండా పోవుచూ, $4\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$ అనే సదిశకు సమాంతరంగా ఉండే సరళరేఖ సదిశా సమీకరణం రాయండి.**

Sol: దత్త బిందువు $A(\bar{a}) = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$ మరియు సమాంతర సదిశ $\bar{b} = 4\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$

సరళరేఖ సదిశా సమీకరణం $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}, t \in R$

$\therefore \bar{r} = (2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}) + t(4\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}), t \in R$.

BABY BULLET-Q

7. $\bar{i}-\lambda\bar{j}+2\bar{k}, 8\bar{i}+6\bar{j}-\bar{k}$ అనే సదిశలు లంబంగా ఉన్న λ విలువ కనుగొనుము.

Sol: $\bar{a}=\bar{i}-\lambda\bar{j}+2\bar{k}, \bar{b}=8\bar{i}+6\bar{j}-\bar{k}$ అనుకొనుము.

$\bar{a}, \bar{b}$ లు లంబకోణం వద్ద ఉన్న $\bar{a}.\bar{b}=0$

$\Rightarrow(\bar{i}-\lambda\bar{j}+2\bar{k}).(8\bar{i}+6\bar{j}-\bar{k})=0 \Rightarrow 8-6\lambda-2=0 \Rightarrow 6\lambda=6 \Rightarrow \lambda=1$

---

8. $f(x)=\cos\left(\frac{4x+9}{5}\right)$ అనే ప్రమేయం యొక్క ఆవర్తనం కనుగొనుము.

Sol: దత్తాంశం నుండి $f(x)=\cos\left(\frac{4x+9}{5}\right)=\cos\left(\frac{4}{5}x+\frac{9}{5}\right)$

$\cos(kx+l)$ యొక్క ఆవర్తనం $=\frac{2\pi}{|k|}$

$\therefore$ ఆవర్తనం $=\frac{2\pi}{\left|\frac{4}{5}\right|}=\frac{10\pi}{4}=\frac{5\pi}{2}$

---

9. **f(x)=3cosx+4sinx యొక్క గరిష్ట, కనిష్ట విలువలను కనుగొనుము.**

Sol: 3cosx+4sinx ను acosx+bsinx+c తో పోల్చగా a=3, b=4, c=0

ఇప్పుడు $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$\therefore$ గరిష్ట విలువ $=c+\sqrt{a^2+b^2}=0+5=5$

కనిష్ట విలువ $=c-\sqrt{a^2+b^2}=0-5=-5$

---

10. **sinhx=3 అయిన $x=\log(3+\sqrt{10})$ అని చూపండి.**

Sol: $\sinh^{-1}x=\log_e\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ అని మనకు తెలుసు.

దత్తాంశం నుండి sinhx=3, అయిన

$x=\sinh^{-1}(3)=\log_e(3+\sqrt{3^2+1})=\log_e(3+\sqrt{9+1})=\log_e(3+\sqrt{10})$

$\therefore x=\log_e(3+\sqrt{10})$.

సెక్షన్-బి

11. $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}$ **అయిన A^3 ను కనుగొనుము.**

Sol: $A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1+5-6 & 1+2-3 & 3+6-9\\ 5+10-12 & 5+4-6 & 15+12-18\\ -2-5+6 & -2-2+3 & -6-6+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 9\\ -1 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 9\\ -1 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0\\ 3+15-18 & 3+6-9 & 9+18-27\\ -1-5+6 & -1-2+3 & -3-6+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

ఇక్కడ $A^3=O$. A అనునది ఘాతము 3 గా కలిగిన శక్తిహీన మాత్రిక

---

12. **A,B,C, D బిందువుల స్థానసదిశలు వరసగా $\bar{a}+2\bar{b}, 2\bar{a}-\bar{b}, \bar{a}$ $3\bar{a}+\bar{b}$ అయితే $\overline{AC}, \overline{DA}, \overline{BA}, \overline{BC}$ సదిశలను $\bar{a}$, $\bar{b}$ లలో రాయండి**

Sol: **O** దృష్ట్యా **A,B,C,D** బిందువుల స్థానసదిశలు $\overline{OA}=\bar{a}+2\bar{b}$, $\overline{OB}=2\bar{a}-\bar{b}$, $\overline{OC}=\bar{a}$ **and** $\overline{OD}=3\bar{a}+\bar{b}$. అయిన

$\overline{AC}=\overline{OC}-\overline{OA}=\bar{a}-(\bar{a}+2\bar{b})=-2\bar{b}$

$\overline{DA}=\overline{OA}-\overline{OD}=(\bar{a}+2\bar{b})-(3\bar{a}+\bar{b})=-2\bar{a}+\bar{b}$

$\overline{BA}=\overline{OA}-\overline{OB}=(\bar{a}+2\bar{b})-(2\bar{a}-\bar{b})=3\bar{b}-\bar{a}$

$\overline{BC}=\overline{OC}-\overline{OB}=\bar{a}-(2\bar{a}-\bar{b})=\bar{b}-\bar{a}$

BABY BULLET-Q

13. (1, 2, 1), (3, 2, 5), (2, –1, 0) , (–1, 0, 1) లు శీర్షాలుగా గల చతుర్ముఖ ఘనపరిమాణం కనుగొనుము.

Sol: $\overline{OA} = \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}, \overline{OB} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + 5\bar{k}, \overline{OC} = 2\bar{i} - \bar{j}, \overline{OD} = -\bar{i} + \bar{k}$ అనుకొనుము

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (3\bar{i} + 2\bar{j} + 5\bar{k}) - (\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}) = 2\bar{i} + 4\bar{k}$$

$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = (2\bar{i} - \bar{j}) - (\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}) = \bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k}$$

$$\overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA} = (-\bar{i} + \bar{k}) - (\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}) = -2\bar{i} - 2\bar{j}$$

ఇప్పుడు, $[\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ =[2(0–2)+4(–2–6)]=– 4 –32= –36

∴ చతుర్ముఖి ఘనపరిమాణం $= \frac{1}{6}|-36| = 6$ చ.యూనిట్లు

---

14. $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8} = 2$ అని నిరూపించండి.

Sol: $$G.E = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\left(\frac{4\pi - \pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi + \pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{8\pi - \pi}{8}\right)$$

$$= \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}$$

$$\therefore L.H.S = \left(\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}\right) + \left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}\right) = 1 + 1 = 2 = R.H.S$$

---

15. $7\sin^2\theta+3\cos^2\theta=4$ ను సాధించుము.

Sol: దత్తాంశ సమీకరణం $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$

$\Rightarrow 7\sin^2\theta + 3(1-\sin^2\theta) = 4 \Rightarrow 7\sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta = 4$

$\Rightarrow 4\sin^2\theta = 1 \Rightarrow \sin^2\theta = (1/2)^2 = \sin^2(\pi/6)$

దీని ప్రధాన విలువ $\alpha = \pi/6$

∴ సాధారణ సాధన $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in Z$

BABY BULLET-Q

16. $\mathbf{Sin^{-1}\frac{3}{5}+Sin^{-1}\frac{8}{17}=Cos^{-1}\frac{36}{85}}$ **అని నిరూపించండి.**

Sol: $Sin^{-1}\frac{3}{5}=\alpha$, $Sin^{-1}\frac{8}{17}=\beta$

నిరూపిత అంశం: $\alpha+\beta=Cos^{-1}\frac{36}{85}\Rightarrow \cos(\alpha+\beta)=\frac{36}{85}$

$Sin^{-1}\frac{3}{5}=\alpha\Rightarrow \sin\alpha=\frac{3}{5}\Rightarrow \cos\alpha=\frac{4}{5}$

$Sin^{-1}\frac{8}{17}=\beta\Rightarrow \sin\beta=\frac{8}{17}\Rightarrow \cos\beta=\frac{15}{17}$

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\times\frac{15}{17}-\frac{3}{5}\times\frac{8}{17}=\frac{60-24}{85}=\frac{36}{85}$

కావున నిరూపించబడినది.

---

17. $\mathbf{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{s^2}{\Delta}}$ **అని నిరూపించండి.**

Sol: L.H.S= $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$

$=\frac{s(s-a)}{\Delta}+\frac{s(s-b)}{\Delta}+\frac{s(s-c)}{\Delta}=\frac{s(s-a)+s(s-b)+s(s-c)}{\Delta}$

$=\frac{s[(s-a)+(s-b)+(s-c)]}{\Delta}$

$=\frac{s[3s-(a+b+c)]}{\Delta}=\frac{s[3s-2s]}{\Delta}=\frac{s[s]}{\Delta}=\frac{s^2}{\Delta}=$ R.H.S

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-సి

18. $f:A\rightarrow B$, $g:B\rightarrow C$ లు ద్విగుణ ప్రమేయాలు అయిన $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ అని నిరూపించండి.

Sol: **Part -1:** $f:A\rightarrow B$, $g:B\rightarrow C$ లు రెండు ద్విగుణ ప్రమేయాలు

(i) $gof:A\rightarrow C$ ద్విగుణ ప్రమేయం. కావున $(gof)^{-1}: C\rightarrow A$ కూడా ద్విగుణ ప్రమేయమగును.

(ii) $f^{-1}:B\rightarrow A$, $g^{-1}:C\rightarrow B$ లు రెండు ద్విగుణ ప్రమేయాలు $\Rightarrow (f^{-1}og^{-1}): C\rightarrow A$ కూడా ద్విగుణ ప్రమేయం

కావున $(gof)^{-1}$ మరియు $f^{-1}og^{-1}$ లకు ఒకే ప్రదేశం 'C' కలదు.

Part–2: $f:A\rightarrow B$ ద్విగుణ ప్రమేయం కావున $f(a)=b\Rightarrow a=f^{-1}(b)$........(1), [ఇక్కడ $a\in A$, $b\in B$]

$g:B\rightarrow C$ ద్విగుణ ప్రమేయం కావున $g(b)=c\Rightarrow b=g^{-1}(c)$........(2), [ఇక్కడ $b\in B$, $c\in C$]

$gof:A\rightarrow C$ ద్విగుణ ప్రమేయం కావున $gof(a)=c \Rightarrow a=(gof)^{-1}(c)$.........(3)

ఇప్పుడు, $(f^{-1}og^{-1})(c)=f^{-1}[g^{-1}(c)]=f^{-1}(b)=a$ ....(4), [(1) & (2) ల నుండి]

$\therefore (gof)^{-1}(c)=(f^{-1}og^{-1})(c), \forall c\in C$, [(3) & (4) ల నుండి]

కావున $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ అని నిరూపించబడినది.

BABY BULLET-Q

19. **పరిమిత గణితాను గమన సిద్ధాంతంనుపయోగించి**

$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... +$ (n పదాల వరకు) $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}, \forall n \in N$ అని రుజువు చేయండి.

Sol: **n వ పదము కనుగొనుట:**

దత్త శ్రేణిలో n పదము $T_n = n(n+1)(n+2)$.

$$S(n): 1.2.3 + 2.3.4 + ... + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Step 1: S(1) యొక్క L.H.S $= 1.2.3 = 6$

S(1) యొక్క R.H.S $= \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = \frac{2.3.4}{4} = 6$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S.

కావున S(1) సత్యము

Step 2: $k \in N$ కు S(k) సత్యం అనుకొనుము.

$$S(k): 1.2.3. + 2.3.4 + ... + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} \quad ......(1)$$

Step 3: ఇప్పుడు S(k+1) సత్యమని చూపవలెను.

(1) కు ఇరువైపులా (k+1)(k+2)(k+3) ను కలపగా,

$$L.H.S = [1.2.3. + 2.3.4 + ... + k(k+1)(k+2)] + (k+1)(k+2)(k+3)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} = R.H.S$$

$\therefore$ L.H.S=R.H.S .

కావున, S(k) సత్యమైన S(k+1) కూడా సత్యమగును.

కావున పరిమిత గణితానుగమన సిద్ధాంతం నుంచి ప్రతి $n \in N$ కి దత్త ప్రవచనం S(n) సత్యం

BABY BULLET-Q

20. $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$ అని చూపండి.

Sol: $$\text{L.H.S} = \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2a+2b+2c & a & b \\ 2a+2b+2c & b+c+2a & b \\ 2a+2b+2c & a & c+a+2b \end{vmatrix} (\because C_1 \to C_1 + C_2 + C_3)$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix} \begin{matrix} (\because R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1) \end{matrix}$$

$$= 2(a+b+c)1[(a+b+c)^2 - 0] = 2(a+b+c)^3 = \text{R.H.S}$$

BABY BULLET-Q

21. **$x - y + 3z = 5, 4x + 2y - z = 0, x + 3y + z = 5$ రేఖీయ సమీకరణాలను క్రామర్ పద్ధతిన సాధించండి.**

Sol: ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థను మాత్రిక సమీకరణ రూపంలో వ్రాయగా $AX = D$, ఇక్కడ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2+3) + 1(4+1) + 3(12-2)$$

$$= 5 + 5 + 30 = 40 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 5(2\times1 - (-1)\times3) + 1(0\times1 - (-1)\times5) + 3(0\times3 - 5\times2)$$

$$= 25 + 5 - 30 = 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0\times1 - (-1)\times5) - 5(4\times1 - (-1)\times1) + 3(4\times5 - 0\times1)$$

$$= 5 - 25 + 60 = 40;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2\times5 - 0\times3) + 1(4\times5 - 0\times1) + 5(4\times3 - 2\times1)$$

$$= 10 + 20 + 50 = 80$$

$\therefore$ క్రామర్ పద్ధతి ప్రకారం,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{40} = 0; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{40}{40} = 10; \; z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{80}{40} = 2$$

$\therefore$ సాధన $x=0, y=1, z=2$

BABY BULLET-Q

22. $\bar{a}=7\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k}, \bar{b}=2\bar{i}+8\bar{k}$, $\bar{c}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$ అయితే $\bar{a}\times\bar{b}, \bar{a}\times\bar{c}$, $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})$ లను గణించండి. సదిశా లబ్ధం, సదిశా సంకలనంపై విభజితం అవుతుందేమో సరిచూడండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $\bar{a}=7\bar{i}-\overline{2}\bar{j}+\bar{k}, \bar{b}=2\bar{i}+8\bar{k}$, $\bar{c}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$

ఇప్పుడు $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 7 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 8\end{vmatrix}=\bar{i}(-16-0)-\bar{j}(56-6)+\bar{k}(0+4)=-16\bar{i}-50\bar{j}+4\bar{k}$

$$\bar{a}\times\bar{c}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 7 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}(-2-3)-\bar{j}(7-3)+\bar{k}(7+2)=-5\bar{i}-4\bar{j}+9\bar{k}$$

Now $\bar{b}+\bar{c}=(2\bar{i}+8\bar{k})+(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k})=3\bar{i}+\bar{j}+9\bar{k}$

$$\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 7 & -2 & 3\\ 3 & 1 & 9\end{vmatrix}==\bar{i}(-18-3)-\bar{j}(63-9)+\bar{k}(7+6)=-21\bar{i}-54\bar{j}+13\bar{k}..........(1)$$

Now $(\bar{a}\times\bar{b})+(\bar{a}\times\bar{c})=(-16\bar{i}-50\bar{j}+4\bar{k})+(-5\bar{i}-4\bar{j}+9\bar{k})=-21\bar{i}-54\bar{j}+13\bar{k}.........(2)$

(1) & (2) ల నుండి $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}\times\bar{b})+(\bar{a}\times\bar{c})$

$\therefore$సదిశా లబ్ధం, సదిశా సంకలనంపై విభజితం అవుతుంది.

BABY BULLET-Q

23. $A+B+C=180^0$ అయిన $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ అని నిరూపించండి.

Sol: L.H.S $=(\cos A+\cos B)+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}+\cos C$

$$=2\cos\left(90^o-\frac{C}{2}\right).\cos\frac{A-B}{2}+\cos C$$

$$=2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2}+\left(1-2\sin^2\frac{C}{2}\right) \qquad \left[\because \cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\sin\left(90^o-\frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right) \qquad [\because \sin(90^o-\theta)=\cos\theta]$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}\right) \qquad [\because \cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B]$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\text{R.H.S}$$

BABY BULLET-Q

24. ΔABC లో a=13, b=14, c=15 అయిన $R = \frac{65}{8}, r = 4, r_1 = \frac{21}{2}, r_2 = 12, r_3 = 14$ అని చూపండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి a=13, b=14, c=15 ,

$$2s = a + b + c = 13 + 14 + 15 = 42 \Rightarrow 2s = 42 \Rightarrow s = 21$$

ఇప్పుడు $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$

$$= \sqrt{21 \times (8)(7)(6)} = \sqrt{(3\times7)(4\times2)(7)(3\times2)} = \sqrt{3^2 \times 4^2 \times 7^2} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

(i) $R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{13 \times 14 \times 15}{4 \times 84} = \frac{65}{8}$

(ii) $r = \frac{\Delta}{s} = \frac{84}{21} = 4$;

(iii) $r_1 = \frac{\Delta}{s-a} = \frac{84}{21-13} = \frac{84}{8} = \frac{21}{2}$

(iv) $r_2 = \frac{\Delta}{s-b} = \frac{84}{21-14} = \frac{84}{7} = 12$

(v) $r_3 = \frac{\Delta}{s-c} = \frac{84}{21-15} = \frac{84}{6} = 14$

BABY BULLET-Q