2B (TM)

Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH-2020 (TS)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2020(TS)

Time : 3 Hours **గణితశాస్త్రం – 2B** Max.Marks : 75

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: 10 x 2 = 20

1. $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 41 = 0$ వృత్తము యొక్క కేంద్రం మరియు వ్యాసార్ధమును కనుగొనము.

2. $(5,4)$ బిందువు నుండి $x^2 + y^2 + 2ky = 0$ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ పొడవు 1 అయిన k విలువ కనుగొనుము.

3. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0, x^2 + y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$ అనే వృత్తాల మూలాక్ష సమీకరణము కనుగొనుము.

4. $y^2 = 6x$ పరావలయంపై నాభిలంబము యొక్క ధన కొన వద్ద స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబరేఖ సమీకరణాలు కనుగొనుము.

5. అనంత స్పర్శరేఖల మధ్యకోణం 30^0 గా గల అతిపరావలయం ఉత్కేంద్రత కనుక్కోండి.

6. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos 2x} dx$ ను గణించండి **7.** $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$ ను గణించండి **8.** $\int_2^3 \frac{2x dx}{1+x^2}$ ను గణించండి.

9. $y = x^3+3$, x- అక్షము మరియు $x = -1, x = 2$ లతో ఏర్పడే ప్రదేశ వైశాల్యము కనుగొనుము.

10. A,Bలు యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యలు అయితే, $y=A\cos 3x+B\sin 3x$ కు అనుగుణంగా ఉన్న అవకలన సమీకరణాన్ని ఏర్పరచండి.

సెక్షన్-బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. 5x4=20

11. $x^2 + y^2 - x + 3y - 22 = 0$ వృత్తము $y = x - 3$ సరళరేఖపై చేయు అంతరఖండం యొక్క జ్యా పొడవు కనుగొనుము.

12. $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax + ay$ వృత్తాల మధ్య కోణం $3\pi/4$ అని చూపండి.

13. $9x^2 + 16y^2 = 144$ అనే దీర్ఘవృత్తం యొక్క ఉత్కేంద్రత, నాభిలంబం పొడవులు, కేంద్రం, నాభులు, నియత రేఖ సమీకరణాలు కనుగొనుము.

14. $x^2+8y^2-33 = 0$ దీర్ఘవృత్తంపై $(-1,2)$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖ సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

15. $3x^2 - 4y^2 = 12$ అతిపరావలయానికి $y = x - 7$ రేఖకు (i) సమాంతరంగాను ii) లంబంగాను ఉండే స్పర్శరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

16. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$ ను గణించండి. **17.** $(xy^2 + x)dx + (yx^2 + y)\, dy = 0$ ను సాధించుము

సెక్షన్-సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. 5x7=35

18. $(2, -3), (-4, 5)$ బిందువులు గుండా పోతూ, $4x + 3y + 1 = 0$ రేఖపై కేంద్రము ఉండే వృత్త సమీకరణం కనుగొనుము.

19. $x^2 + y^2 - 6x - 9y + 13 = 0$ మరియు $x^2 + y^2 - 2x - 16y = 0$ వృత్తాలు ఒకదానికొకటి స్పృశించుకొంటాయని చూపి ఆ స్పర్శబిందువు మరియు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ కనుగొనుము

20. పరావలయపు ప్రామాణిక రూపము $y^2 = 4ax$ అని చూపుము. **21.** $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{3+2x-x^2}} dx$ ను గణించండి.

22. $I_n = \int \sin^n x\, dx$ అనే లఘూకరణ సూత్రమును రాబట్టి దానినుండి $\int \sin^4 x\, dx$ ను గణించుము.

23. $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$ ను గణించండి. **24.** $\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y$ ను సాధించండి.

BABY BULLET Q

IPE TS MARCH-2020
SOLUTIONS

SECTION-A

1. $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 41 = 0$ వృత్తము యొక్క కేంద్రం మరియు వ్యాసార్ధమును కనుగొనము.

A: దత్త సమీకరణం $x^2+y^2-4x-8y-41=0$

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ తో పోల్చగా $2g=-4; 2f=-8; c=-41 \Rightarrow g=-2, f=-4, c=-41$

కేంద్రం $C=(-g,-f)=(-(-2),-(-4))=(2,4)$

వ్యాసార్ధం $r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{2^2+(4)^2-(-41)}=\sqrt{4+16+41}=\sqrt{61}$

---

2. (5,4) బిందువు నుండి $x^2+y^2+2ky=0$ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ పొడవు 1 అయిన k విలువ కనుగొనుము.

Sol: (5,4)బిందువు నుండి $S=x^2+y^2-5x+4y+k=0$ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ పొడవు $\sqrt{S_{11}}=1$;

ఇరువైపులా వర్గము చేయగా $S_{11}=1$

$\Rightarrow 5^2+4^2+2k(4)=1$

$\Rightarrow 25+16+8k=1 \Rightarrow 41+8k=1x$

$\Rightarrow 8k=-40 \Rightarrow k=-40/8=-5$

---

3. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0, x^2 + y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$ అనే వృత్తాల మూలాక్ష సమీకరణము కనుగొనుము.

A: దత్త వృత్తాలు $S= x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0, S'=x^2 + y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$

వృత్తాల మూలాక్ష సమీకరణము $S-S'=0 \Rightarrow -4x+5x-4y+6y+3-4=0$

$\Rightarrow x+2y-1=0$

BABY BULLET-Q

4. **$y^2=6x$ పరావలయంపై నాభిలంబము యొక్క ధన కొన వద్ద స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబరేఖ సమీకరణాలు కనుగొనుము.**

Sol : $y^2=6x \Rightarrow 4a=6 \Rightarrow 2a=3 \Rightarrow a=3/2$

$\therefore$ నాభిలంబము ధన కొన $(a,2a)=(3/2, 3)$

$S=y^2-4ax=0$ పై (x_1,y_1) వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం $S_1=yy_1-2a(x+x_1)=0$

$\therefore$ $y^2=6x$ పై $(3/2, 3)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం $y(3)-3(x+3/2)=0 \Rightarrow 2x-2y+3=0$

$2x-2y+3=0$ స్పర్శరేఖ వాలు $1 \Rightarrow$ దీని అభిలంబరేఖ వాలు -1

$\therefore$ -1 వాలుకలిగి $(3/2, 3)$ వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణము $y-3=-1(x-3/2) \Rightarrow 2x+2y-9=0$

---

5. **అనంత స్పర్శరేఖల మధ్యకోణం 300 గా గల అతిపరావలయం ఉత్కేంద్రత కనుక్కోండి.**

Sol: $S=0$ యొక్క రెండు అనంత స్పర్శరేఖల మధ్య కోణం $2\text{Sec}^{-1}e$

$\therefore$ $2\text{Sec}^{-1}e = 30^\circ \Rightarrow \text{Sec}^{-1}e=15^\circ \Rightarrow e=\sec 15^\circ=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

---

6. **$\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$ ను గణించండి.**

Sol : $I=\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos 2x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{2\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\int \tan^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sec^2 x - 1)\,dx = \frac{1}{2}(\tan x - x)+c$

---

7. **$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$ ను గణించండి.**

Sol: $x^2+x+1=t \Rightarrow (2x+1)dx=dt$

$\therefore I=\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\int \frac{dt}{t} = \log|t|+c=\log|x^2+x+1|+c$

BABY BULLET-Q

8. $\int_2^3 \frac{2xdx}{1+x^2}$ ను గణించండి.

Sol: $\int_2^3 \frac{2xdx}{1+x^2} = [\log|1+x^2|]_2^3 = \log|1+3^2| - \log|1+2^2|$

$$= \log 10 - \log 5 = \log\frac{10}{5} = \log 2$$

---

9. $y=x^3+3$, x-అక్షము మరియు $x=-1$, $x=2$ లతో ఏర్పడే ప్రదేశ వైశాల్యము కనుగొనుము.

Sol : దత్త వక్రము $y=x^3+3$

$y=x^3+3$ అనే వక్రము, **x**-అక్షము మరియు $x=-1$, $x=2$ లతో ఏర్పడే ప్రదేశ వైశాల్యము

$$A = \int_{-1}^{2} y\,dx = \int_{-1}^{2}(x^3+3)dx = \left[\frac{x^4}{4}+3x\right]_{-1}^{2} = \left\{\left(\frac{16}{4}+6\right)-\left(\frac{1}{4}-3\right)\right\} = \frac{40}{4}+\frac{11}{4} = \frac{51}{4} \text{ చ. యూ.}$$

---

10. A, B లు యాదృచ్ఛిక స్థిర సంఖ్యలు అయితే, $y=A\cos 3x+B\sin 3x$ కు అనుగుణంగా ఉన్న అవకలన సమీకరణాన్ని ఏర్పరచండి.

Sol: $y=A\cos 3x+B\sin 3x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -3A(\sin 3x)+3B(\cos 3x)$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x = -9(A\cos 3x + B\sin 3x) = -9y$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$$

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-బి

11. $x^2+y^2-x+3y-22=0$ వృత్తము $y=x-3$ సరళరేఖపై చేయు అంతరఖండం యొక్క జ్యా పొడవు కనుగొనుము.

Sol: ఇచ్చిన వృతం $x^2+y^2-x+3y-22=0$

కేంద్రము $C=(1/2,-3/2)$

వ్యాసార్థము $r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+22}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+22} \quad =\sqrt{\frac{1+9+88}{4}}=\sqrt{\frac{98}{4}}=\sqrt{\frac{49}{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}$

కేంద్రము $(1/2,-3/2)$ నుండి $y=x-3=0 \Rightarrow x-y-3=0$ రేఖకు లంబదూరము p అయితే

$$p=\frac{\left|\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-3\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\left|\frac{1+3-6}{2}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\frac{-2}{2}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ జ్యా పొడవు $=2\sqrt{r^2-p^2}=2\sqrt{\left(\frac{49}{2}\right)-\frac{1}{2}}=2\sqrt{\frac{48}{2}}=2\sqrt{24}$

---

12. $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=ax+ay$ వృత్తాల మధ్య కోణం $3\pi/4$ అని చూపండి.

Sol: దత్త వృత్తం is $x^2+y^2-a^2=0$. కేంద్రం $C_1=(0,0)$

మరియు వ్యాసార్థం $r_1=a$

మరో వృత్తం $x^2+y^2-ax-ay=0$. దీని కేంద్రం $C_2=\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$

వ్యాసార్థం $r_2=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-0}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{a^2}{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$

$$\therefore d=C_1C_2=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{2a^2}{4}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{d^2-r_1^2-r_2^2}{2r_1r_2}=\frac{\frac{a^2}{2}-a^2-\frac{a^2}{2}}{2.a.\frac{a}{\sqrt{2}}}=\frac{-a^2}{\sqrt{2}.a^2}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\cos 135^\circ$$

$\therefore$ వృత్తాల మధ్య కోణం $\theta=135^\circ=3\pi/4$

BABY BULLET-Q

13. **$9x^2+16y^2=144$ అనే దీర్ఘవృత్తం యొక్క ఉత్కేంద్రత, నాభులు, నాభిలంబం పొడవులు, నియత రేఖ సమీకరణాలు కనుగొనుము.**

Sol: ఇచ్చిన దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $9x^2+16y^2=144 \Rightarrow \frac{9x^2}{144}+\frac{16y^2}{144}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

ఇక్కడ, $a^2=16, b^2=9 \Rightarrow a>b$. కావున ఇది క్షితిజ సమాంతర దీర్ఘవృత్తం.

(i) ఉత్కేంద్రత $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{16-9}{16}}=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

(ii) నాభులు $=(\pm ae,0)=\left(\pm 4\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right),0\right)=(\pm\sqrt{7},0)$

(iii) నాభిలంబం పొడవు $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(9)}{4}=\frac{9}{2}$

(iv) నియతరేఖ సమీకరణం $x=\pm\frac{a}{e}=\pm 4\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\right)=\frac{\pm 16}{\sqrt{7}} \Rightarrow \sqrt{7}x=\pm 16 \Rightarrow \sqrt{7}x\pm 16=0$

---

14. **$x^2+8y^2-33=0$ దీర్ఘవృత్తంపై $(-1,2)$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ, అభిలంబరేఖ సమీకరణాలు కనుక్కోండి.**

Sol: దీర్ఘవృత్త సమీకరణము $S=x^2+8y^2-33=0$

$\Rightarrow(-1,2)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం $S_1=0 \Rightarrow x_1x+8y_1y-33=0$

$\Rightarrow(-1)x+8(2)(y)-33=0 \Rightarrow -x+16y-33=0 \Rightarrow x-16y+33=0$

$\therefore$ స్పర్శరేఖ వాలు $\frac{1}{16} \Rightarrow$ అభిలంబరేఖ వాలు -16

$\therefore$ $(-1,2)$ వద్ద -16 వాలుగా గల అభిలంబరేఖ సమీకరణం

$y-2=-16(x+1)=-16x-16 \Rightarrow 16x+y+14=0$

BABY BULLET-Q

15. **$3x^2-4y^2=12$ అతిపరావలయానికి $y=x-7$ రేఖకు (i) సమాంతరంగాను (ii) లంబంగాను ఉండే స్పర్శరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.**

Sol: ఇచ్చిన అతిపరావలయం $3x^2-4y^2=12 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1 \Rightarrow a^2=4, b^2=3$

$y=x-7$ అనే రేఖ వాలు $m=1 \Rightarrow$ దీని లంబరేఖ వాలు -1

సూత్రం:

m వాలు కలిగిన స్పర్శరేఖ $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

(i) $m=1$ కలిగిన సమాంతర స్పర్శరేఖ

$$y=1.x\pm\sqrt{4(1)^2-3}=x\pm1 \Rightarrow x-y\pm1=0$$

(ii) $m=-1$ కలిగిన లంబ స్పర్శరేఖ $y=(-1)x\pm\sqrt{4(1)^2-3}=-x\pm1 \Rightarrow x+y\pm1=0$

---

16. $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ **ను గణించండి.**

Sol: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$ అని మనకు తెలుసు. $\therefore I=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ ....(1)

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x\right)}}dx$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}dx=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx \quad ....(2)$$

(1),(2) నుండి $I+I=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx+\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$

$$\Rightarrow 2I=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx=\int_{\pi/6}^{\pi/3}1dx=[x]_{\pi/6}^{\pi/3}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\Rightarrow 2I=\frac{\pi}{6}\Rightarrow I=\frac{\pi}{12}$$

BABY BULLET-Q

17. **$(xy^2 + x)\,dx + (yx^2 + y)\,dy = 0$ ను సాధించండి.**

Sol: ఇచ్చిన సమీకరణము 'విభజనీయ చలరాశుల' అవకలన సమీకరణము.

$\therefore (xy^2+x)dx+(yx^2+y)dy=0 \Rightarrow (xy^2+x)dx=-(yx^2+y)dy$

$\Rightarrow x(y^2+1)dx=-y(x^2+1)dy \Rightarrow \frac{x}{x^2+1}dx=-\frac{y}{y^2+1}dy$

$\Rightarrow \int\frac{2x}{x^2+1}dx=-\int\frac{2y}{y^2+1}dy \Rightarrow \log(x^2+1)=-\log(y^2+1)+\log c$

$\Rightarrow \log(x^2+1)+\log(y^2+1)=\log c \Rightarrow \log(x^2+1)(y^2+1)=\log c \Rightarrow (x^2+1)(y^2+1)=c$

$\therefore$ సాధన $(x^2+1)(y^2+1)=c$

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-సి

18. (2,–3), (–4,5) బిందువులు గుండా పోతూ, 4x+3y+1=0 రేఖపై కేంద్రము ఉండే వృత్త సమీకరణం కనుగొనుము.

Sol : $A=(2,-3), B=(-4,5)$ అనుకోండి

$S(x_1,y_1)$ వృత్త కేంద్రం అనుకొనుము.

$\Rightarrow SA=SB \Rightarrow SA^2=SB^2.$

$\Rightarrow (x_1-2)^2+(y_1+3)^2=(x_1+4)^2+(y_1-5)^2$

$\Rightarrow (x_1^2-4x_1+4)+(y_1^2+6y_1+9)$

$=(x_1^2+8x_1+16)+(y_1^2-10y_1+25)$

$\Rightarrow 12x_1-16y_1+28=0$

$\Rightarrow 4(3x_1-4y_1+7)=0$

$\Rightarrow 3x_1-4y_1+7=0$ ....(1)

కాని(x_1,y_1) కేంద్రం $4x+3y+1=0$ పై ఉండును

$\Rightarrow 4x_1+3y_1+1=0$ ....(2)

(1) & (2) లను సాధించగా కేంద్రం $S(x_1,y_1)$వచ్చును

$$\frac{x_1}{3\times7+4\times1}=\frac{-y_1}{4\times7-3\times1}=\frac{1}{4(-4)-3(3)}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{25}=\frac{-y_1}{25}=-\frac{1}{25}\Rightarrow x_1=-1,\ y_1=1$$

$\therefore S(x_1,y_1)=(-1,1)$

మరియు $A=(2,-3)$

వ్యాసార్థం $r=SA\Rightarrow r^2=SA^2.$

$\Rightarrow r^2=SA^2=(-1-2)^2+(1+3)^2=9+16=25$

$\therefore$ కేంద్రం $(-1,1)$ మరియు $r^2=25$ గా గల వృత్త సమీకరణం $(x+1)^2+(y-1)^2=25$

$\Rightarrow (x^2+2x+1)+(y^2-2y+1)=25$

$\Rightarrow x^2+y^2+2x-2y-23=0$

BABY BULLET-Q

19. $x^2+y^2-6x-9y+13=0, x^2+y^2-2x-16y=0$ వృత్తాలు ఒకదానికొకటి స్పృశించుకొంటాయని చూపి ఆ స్పర్శబిందువు మరియు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ కనుగొనుము.

Sol: మొదటి వృత్తంనకు $S \equiv x^2+y^2-6x-9y+13=0$

కేంద్రం $C_1 = (3, 9/2)$,

వ్యాసార్ధం $\mathbf{r}_1 = \sqrt{3^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2-13} = \sqrt{9+\frac{81}{4}-13} = \sqrt{\frac{36+81-52}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$

రెండవ వృత్తంనకు $S' \equiv x^2+y^2-2x-16y=0$

కేంద్రం $C_2=(1,8)$,

వ్యాసార్ధం $r_2 = \sqrt{1^2+8^2-0} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$

$$C_1C_2 = \sqrt{(3-1)^2+\left(\frac{9}{2}-8\right)^2} = \sqrt{2^2+\left(\frac{9-16}{2}\right)^2} = \sqrt{4+\frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{16+49}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$$

మరియు, $r_2 - r_1 = \sqrt{65} - \frac{\sqrt{65}}{2} = \frac{\sqrt{65}}{2} = C_1C_2$

$\therefore$ ఇచ్చిన వృత్తాలు ఒకదానికొకటి **అంతరంగా** స్పృశించుకొనును.

ఇప్పుడు $r_1 : r_2 = \frac{\sqrt{65}}{2} : \sqrt{65} = \frac{1}{2} : 1 = 1 : 2$

కావున స్పర్శబిందువు P $C_1(3,9/2), C_2(1,8)$ లను $1:2$ నిష్పత్తిలో బాహ్యంగా విభజించును.

$$\therefore P = \left(\frac{1(1)-2(3)}{1-2}, \frac{1(8)-2(\frac{9}{2})}{1-2}\right) = (5,1)$$

ఈ స్పర్శబిందువు వద్ద $S=0$ మరియు $S'=0$ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ సమీకరణం $S-S'=0$

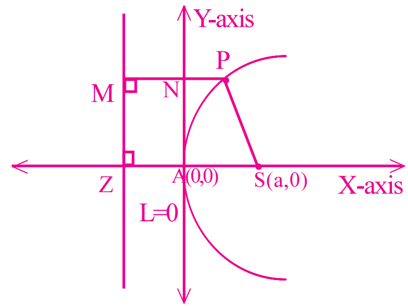
$\Rightarrow (x^2+y^2-6x-9y+13)-(x^2+y^2-2x-16y)=0$
$\Rightarrow -4x+7y+13=0 \Rightarrow 4x-7y-13=0$

BABY BULLET-Q

20. పరావలయపు ప్రామాణిక రూపమును ప్రవచించుము.

Sol: పరావలయపు నాభి S మరియు నియతరేఖ L=0 అనుకొనుము.

నియత రేఖపై S యొక్క విక్షేపము Z అనుకొనుము.



SZ యొక్క మధ్యబిందువును A అనుకొనుము

అప్పుడు SA=AZ $\Rightarrow \frac{SA}{AZ}=1$

అనగా A బిందువు పరావలయం పై ఉండును.

AS పరావలయపు ప్రధాన అక్షాన్ని X-అక్షముగా తీసుకొని

ASకు లంబముగా A గుండాపోయే రేఖను Y-అక్షముగా తీసుకొనుము.

అప్పుడు A=(0,0) అగును.

AS=a అనుకుంటే S=(a,0), Z=(−a,0) అగును

అప్పుడు నియతరేఖ సమీకరణము x=−a $\Rightarrow$ x+a=0

పరావలయంపై $P(x_1,y_1)$ అనే బిందువును తీసుకొనుము.

Y-అక్షంపై P యొక్క విక్షేపము N అనుకొనుము.

నియతరేఖపై P యొక్క విక్షేపము M అనుకొనుము.

ఇక్కడ $PM=PN+NM=x_1+a$ ($\because$ PN = Pయొక్క x-నిరూపకం మరియు NM=AZ=AS=a)

ఇప్పుడు పరావలయపు 'నాభి-నియతరేఖ ధర్మం' ప్రకారం $\frac{SP}{PM}=1 \Rightarrow SP=PM \Rightarrow SP^2=PM^2$

$\Rightarrow (x_1-a)^2+(y_1-0)^2=(x_1+a)^2$

$\Rightarrow y_1^2=(x_1+a)^2-(x_1-a)^2$

$\Rightarrow y_1^2=4ax_1$ $[\because (a+b)^2-(a-b)^2=4ab]$

$\therefore P(x_1,y_1)$ యొక్క బిందుపథ సమీకరణము $y^2=4ax$

BABY BULLET-Q

21. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{3+2x-x^2}}$ ను గణించండి.

Sol: $1+x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt$. $\quad x=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}$

$$\therefore 3+2x-x^2=3+2\left(\frac{1-t}{t}\right)-\left(\frac{1-t}{t}\right)^2=3+2\left(\frac{1}{t}-1\right)-\left(\frac{1-2t+t^2}{t^2}\right)$$

$$=3+\frac{2}{t}-2-\left(\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+1\right)=3+\frac{2}{t}-2-\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}-1=\frac{4}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{4t-1}{t^2}$$

$$\therefore I=\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{3+2x-x^2}}dx=\int \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{4t-1}{t^2}}}\left(\frac{-1}{t^2}\right)dt$$

$$=-\int \frac{dt}{\sqrt{4t-1}}=\frac{-1}{4}\left(2\sqrt{4t-1}\right)+c \;=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{1+x}-1}+c=-\frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{3-x}{1+x}\right]}+c$$

BABY BULLET-Q

22. **$I_n=\int \sin^n x dx$ నకు లఘూకరణ సూత్రమును రాబట్టి దానినుండి $\int \sin^4 x dx$ ను గణించుము.**

Sol: $I_n=\int \sin^n x dx=\int \sin^{n-1}x(\sin x)dx.$

మొదటి ప్రమేయము $u=\sin^{n-1}x$ మరియు రెండవ ప్రమేయము $v=\sin x \Rightarrow \int v=-\cos x$

విభాగ సమాకలన సూత్రము ప్రకారము $I_n=\sin^{n-1}x(-\cos x) \quad -\int(n-1)\sin^{n-2}x\cos x(-\cos x)dx$

$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\cos^2 x dx$

$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$

$=-\sin^{n-1}x\cos x \quad +(n-1)[\int\sin^{n-2}xdx-\int\sin^n xdx]$

$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)[I_{n-2}-I_n]$

$I_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$

$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}-nI_n+I_n$

$\Rightarrow nI_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}+\cancel{I_n}-\cancel{I_n}$

$\Rightarrow I_n=\frac{-\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)I_{n-2}$ ....(1)

n=4, 2,0 విలువలను వరుసగా (1)లో ప్రతిక్షేపించగా, $I_4=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}I_2$

$=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}\left[-\frac{\sin x\cos x}{2}+\frac{1}{2}I_0\right]$

$=\frac{-\sin^3 x\cos x}{4}-\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{3}{8}I_0$

$=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}-\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{3}{8}x+c$ $\quad [\because I_0=x]$

BABY BULLET-Q

23. $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$ ను గణించండి.

Sol: $x=\tan\theta \Rightarrow dx=\sec^2\theta d\theta$ Also, $x=0\Rightarrow \theta=0; x=1\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

$1+x^2=1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

$\therefore \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx = \int_0^{\pi/4}\frac{\log(1+\tan\theta)}{\sec^2\theta}\sec^2\theta d\theta = \int_0^{\pi/4}\log(1+\tan\theta)d\theta$

$\therefore I=\int_0^{\pi/4}\log[1+\tan\theta]d\theta$

$=\int_0^{\pi/4}\log\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]d\theta$

$=\int_0^{\pi/4}\log\left[1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}\right]d\theta$

$=\int_0^{\pi/4}\log\left[1+\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right]d\theta$

$=\int_0^{\pi/4}\log\left[\frac{(1+\tan\theta)+(1-\tan\theta)}{1+\tan\theta}\right]d\theta$

$=\int_0^{\pi/4}\log\left(\frac{2}{1+\tan\theta}\right)d\theta$

$=\int_0^{\pi/4}[\log 2-\log(1+\tan\theta)]\,d\theta$

$=\log 2\int_0^{\pi/4}1\,d\theta-\int_0^{\pi/4}\log(1+\tan\theta)d\theta=\log 2\int_0^{\pi/4}1\,d\theta-I$

$=\log 2[\theta]_0^{\pi/4}-I$

$\Rightarrow I+I=(\log 2)\left(\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow 2I=\left(\frac{\pi}{4}\right)(\log 2)$

$\Rightarrow I=\left(\frac{\pi}{8}\right)(\log 2)$

BABY BULLET-Q

24. $\text{Sin}^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y$ ను సాధించండి.

Sol: దత్త అవకలన సమీకరణం $\text{Sin}^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sin(x + y)$ ....(1)

$$x + y = t \Rightarrow 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 1$$

(1) నుండి $\frac{dt}{dx} - 1 = \sin t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 1 + \sin t$

$$\Rightarrow \frac{dt}{1+\sin t} = dx \Rightarrow \int \frac{(1-\sin t)dt}{(1+\sin t)(1-\sin t)} = \int dx \Rightarrow \int\left(\frac{1-\sin t}{\cos^2 t}\right)dt = \int dx \Rightarrow \int(\sec^2 t - \tan t \sec t)dt = x + c$$

$\Rightarrow \tan t - \sec t = x + c \Rightarrow \tan(x+y) - \sec(x+y) = x + c$ [Q t= x+y]

BABY BULLET-Q