JR MATHS-1B (TM)

Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH -2020 (TS)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2020(TS)

Time : 3 Hours | **గణితశాస్త్రం-1B** | Max.Marks : 75

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: 10 x 2=20

1. $x + P = 0$, $y + 2 = 0$ మరియు $3x + 2y + 5 = 0$ సరళరేఖలు అనుషక్తాలైతే p విలువను కనుగొనుము.
2. $3x-4y+10=0$ సరళరేఖకు $(3, 4)$ బిందువు నుండి లంబదూరం కనుక్కోండి.
3. $(1, 2, 3), (7, 0, 1), (-2, 3, 4)$ అనే బిందువులు సరేఖీయములని చూపండి.
4. $x+2y+2z-4=0$ అనే తలం యొక్క అభిలంబరేఖపు దిక్‌కొసైన్‌ల త్రికమును కనుగొనుము.
5. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$ ను గణించుము.
6. $\underset{x\to\infty}{\text{Lt}} \dfrac{8|x|+3x}{3|x|-2x}$ ను గణించుము.
7. $y = x \,\text{Tan}^{-1} x$ అవకలనిని కనుగొనుము.
8. $y= ae^{nx}+be^{-nx}$ అయిన $y''=n^2y$ అని నిరూపించండి
9. $y=5x^2+6x+6$ ప్రమేయానికి $x=2$, $\Delta x=0.001$ అయినప్పుడు Δy, dy లను కనుగొనుము.
10. I అను అంతరం పై శుద్ధ ఆరోహణ ప్రమేయము మరియు శుద్ధ అవరోహణ ప్రమేయంలను నిర్వచించండి.

సెక్షన్-బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. 5 x 4 = 20

11. $A(2,3)$, $B(-3,4)$ లు రెండు బిందువులు P అను బిందువు ΔPAB వైశాల్యం 8.5 చ.యూ. వుండేటట్లు చలిస్తుంటే P బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.
12. 45° కోణంతో అక్షాలను భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు, రూపాంతరం చెందిన వక్రం సమీకరణం $17x^2-16xy+17y^2=225$ అయిన ఆ వక్రం యొక్క మూల సమీకరణం కనుక్కోండి.
13. $3x+4y-1=0$ అనే రేఖ దృష్ట్యా $(1,2)$ యొక్క ప్రతిబింబము కనుగొనుము.
14. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}(b^2-a^2) & \text{if } x = 0 \end{cases}$ అనే ప్రమేయం 0 వద్ద అవిచ్ఛిన్నమని చూపండి.
15. ప్రాథమిక సూత్రాన్ని ఉపయోగించి $\sin 2x$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.
16. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ వక్రం మీద అనే బిందువు వద్ద ఉపస్పర్శరేఖ మరియు ఉపఅభిలంబరేఖల పొడవులను కనుగొనుము.
17. ఒక సమఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం 9 క్యూబిక్ సెం.మీ/సె. చొప్పున పెరుగుచున్నది. భుజం పొడవు 10 సెం.మీ గా ఉన్నప్పుడు ఉపరితల వైశాల్యం పెరిగే రేటును కనుగొనుము.

సెక్షన్-సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. 5 x 7 = 35

18. ఆదిబిందువు నుండి $x\sec\alpha+y\,\text{cosec}\,\alpha=a$, $x\cos\alpha-y\sin\alpha=a\cos 2\alpha$ అనే సరళరేఖలకు గల లంబదూరాలు p, q లు అయిన, $4p^2+q^2=a^2$ అని చూపుము.
19. $S=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ సమీకరణం ఒక సమాంతర రేఖాయుగ్మాన్ని సూచిస్తే (i) $h^2=ab$ (ii) $af^2=bg^2$ (iii) ఆ సమాంతర రేఖల మధ్య దూరం $2\sqrt{\dfrac{g^2-ac}{a(a+b)}}$ or $2\sqrt{\dfrac{f^2-bc}{b(a+b)}}$ అని చూపండి.
20. $x-y-\sqrt{2} = 0$ సరళరేఖ, $x^2-xy+y^2+3x+3y-2=0$ వక్రాన్ని ఖండించే బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపితే ఏర్పడిన రేఖలు పరస్పరం లంబాలని చూపండి.
21. సమాంతరంగా లేని రెండు రేఖల దిక్ సంఖ్యలు $3l+m+5n=0$, $6mn-2nl+5lm=0$ లను తృప్తి పరిస్తే, వాటి మధ్య కోణాన్ని కనుగొనుము.
22. $y = \text{Tan}^{-1}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)+\text{Tan}^{-1}\left(\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)-\text{Tan}^{-1}\left(\dfrac{4x-4x^3}{1-6x^2+x^4}\right)$ అయిన $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$ అని చూపండి
23. $2y^2-9x = 0$ మరియు $3x^2+4y = 0$ వక్రాల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి. (in Q_4).
24. 30 సెం.మీ X 80 సెం.మీ కొలతలుగా ఉండే ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారపు రేకు ముక్క నాలుగు మూలల నుంచి భుజంగా ఉండే చతురస్రాకార ముక్కలను కత్తిరించి మిగిలిన రేకును మడిచి మూతలేని పెట్టెను తయారు చేశారు. ఆ పెట్టె ఘనపరిమాణం గరిష్ఠం అయితే x ఎంత?

IPE TS MARCH-2020
SOLUTIONS

<u>సెక్షన్-ఎ</u>

1. $x+p=0$, $y+2=0$, $3x+2y+5=0$ అనే సరళరేఖలు అనుషక్తాలైతే p విలువ కనుగొనుము.

Sol: •దత్త రేఖలు $x+p=0 \Rightarrow x=-p$;

$y+2=0 \Rightarrow y=-2$

•$\therefore$ ఖండన బిందువు $(-p,-2)$

• కాని $(-p,-2)$ బిందువు $3x+2y+5=0$ రేఖ మీద ఉండును. [$\because$ దత్త రేఖలు అనుషక్తాలు]

★$\Rightarrow 3(-p)+2(-2)+5=0 \Rightarrow -3p-4+5=0$

★$\Rightarrow -3p+1=0 \Rightarrow -3p=-1 \Rightarrow 3p=1 \Rightarrow p=\dfrac{1}{3}$

---

2. (3, 4) బిందువు నుండి $3x-4y+10=0$ సరళరేఖకు గల లంబదూరంను కనుక్కోండి.

Sol: (3,4) బిందువు నుండి $3x-4y+10=0$ సరళరేఖకు లంబదూరం $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$=\frac{|3(3)-4(4)+10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|9-16+10|}{\sqrt{25}}=\frac{19-16}{5}=\frac{3}{5}$$

---

3. (1,2,3), (7,0,1), (–2,3,4) లు సరేఖీయాలు అని చూపండి.

Sol: •$A=(1,2,3)$, $B=(7,0,1)$, $C=(-2,3,4)$ అయిన

• $AB=\sqrt{(7-1)^2+(0-2)^2+(1-3)^2}$

$=\sqrt{36+4+4}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$

• $BC=\sqrt{(-2-7)^2+(3-0)^2+(4-1)^2}$

$=\sqrt{81+9+9}=\sqrt{99}=3\sqrt{11}$

• $AC=\sqrt{(-2-1)^2+(3-2)^2+(4-3)^2}$

$=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$

ఇప్పుడు ★ $AB+AC=2\sqrt{11}+\sqrt{11}=3\sqrt{11}=BC$

$\therefore$ A,B,C లు సరేఖీయాలు

4. **$x+2y+2z-4=0$ అనే తలం యొక్క అభిలంబరేఖపు దిక్‌కొసైన్‌ల త్రికమును కనుగొనుము.**

Sol: $ax+by+cz+d=0$ అనే తలము యొక్క దిక్ కొసైన్‌లు $\pm\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$

$\therefore$ $x+2y+2z-4=0$ యొక్క దిక్ కొసైన్‌లు $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{1+4+4}}, \frac{2}{\sqrt{1+4+4}}, \frac{2}{\sqrt{1+4+4}}\right) = \pm\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

---

5. **$\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{e^{\sin x}-1}{x}$ ను గణించుము.**

A: $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{e^{\sin x}-1}{x} = \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right) = \underset{\sin x\to 0}{\text{Lt}} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x} \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin x}{x} = 1.1 = 1$

---

6. **$\underset{x\to \infty}{\text{Lt}} \frac{8|x|+3x}{3|x|-2x}$ ను కనుగొనుము.**

A: $x \to \infty$,అయిన $x > 0$. కావున $|x| = x$

$\therefore \underset{x\to \infty}{\text{Lt}} \frac{8|x|+3x}{3|x|-2x} = \underset{x\to \infty}{\text{Lt}} \frac{8x+3x}{3x-2x} = \underset{x\to \infty}{\text{Lt}} \frac{11x}{x} = \underset{x\to \infty}{\text{Lt}}\ 11 = 11$

---

7. **$x\,\text{Tan}^{-1} x$ యొక్క అవకలనిని కనుగొనుము.**

A: uv ఫార్ములాను వర్తింపచేయగా

$$\frac{d}{dx}(x\text{Tan}^{-1}x) = x\frac{d}{dx}\text{Tan}^{-1}x + \text{Tan}^{-1}x\frac{d}{dx}(x) = x\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + \text{Tan}^{-1}x(1) = \frac{x}{1+x^2} + \text{Tan}^{-1}x$$

---

8. **$y= ae^{nx}+be^{-nx}$ అయిన $y''=n^2y$ అని నిరూపించండి.**

Sol: దత్తాంశం నుండి $y= ae^{nx}+be^{-nx}$; 'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$y' = ae^{nx}(n)+be^{-nx}(-n)$. మరల 'x' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా $y'' = ae^{nx}(n)(n)+be^{-nx}(-n)(-n)$

$\Rightarrow y'' = n^2ae^{nx}+n^2be^{-nx} = n^2(ae^{nx}+be^{-nx}) = n^2y$ $\qquad \therefore y''=n^2y$.

9. $y=5x^2+6x+6$ ప్రమేయానికి $x=2, \Delta x=0.001$ అయినప్పుడు Δy, dy లను కనుగొనుము.

Sol: $y=f(x)=5x^2+6x+6$ అనుకొనుము. దత్తాంశం నుండి $x=2, \Delta x=0.001$

(i) $\Delta y= f(x+\Delta x)-f(x) =(5(x+\Delta x)^2+6(x+\Delta x)+6)-(5x^2+6x+6)$

$=5(x^2+(\Delta x)^2+2x\Delta x)+6x+6\Delta x+6)-(5x^2+6x+6)$

$=5x^2+10x\Delta x+5(\Delta x)^2+6x+6\Delta x+6-5x^2-6x-6= 10x\Delta x+5(\Delta x)^2+6\Delta x=\Delta x(10x+5\Delta x+6)$

$=(0.001)(10(2)+5(0.001)+6)=(0.001)(26+0.005) =(0.001)(26.005)=0.026005$

(ii) $dy=f'(x)\Delta x=(10x+6)(0.001)=(10(2)+6)(0.001)=(26)(0.001)=0.0026$

---

10. I అను అంతరం పై శుద్ధ ఆరోహణ ప్రమేయము మరియు శుద్ధ అవరోహణ ప్రమేయంలను నిర్వచించండి.

A: f అనే వాస్తవ ప్రమేయం I అనే ప్రదేశంలో నిర్వచించబడినది అనుకొందాం. అప్పుడు

i) ప్రతి $x_1,x_2 \in I$ కు, $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ అయితే I మీద శుద్ధ ఆరోహణం

ii) ప్రతి $x_1,x_2 \in I$ కు, $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ అయితే I మీద శుద్ధ అవరోహణం అంటారు.

సెక్షన్-బి

11. A(2,3), B(–3,4) లు రెండు బిందువులు P అను బిందువు ΔPAB వైశాల్యం 8.5 చ.యూ. వుండేటట్లు చలిస్తుంటే P బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

Sol : A=(2,3), B=(–3,4) లు దత్త బిందువులు. P(x,y) బిందుపథ బిందువు.

దత్త నియమం నుండి:

ΔPAB యొక్క వైశాల్యం = 8.5 చ.యూ.

$$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_2 & x_1-x_3 \\ y_1-y_2 & y_1-y_3 \end{vmatrix}=8.5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2+3 & 2-x \\ 3-4 & 3-y \end{vmatrix}=8.5$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 2-x \\ -1 & 3-y \end{vmatrix}=2(8.5)$$

$$\Rightarrow |5(3-y)+1(2-x)|=17$$

$$\Rightarrow |15-5y+2-x|=17$$

$$\Rightarrow |17-5y-x|=17 \Rightarrow |(x+5y-17)|=17$$

$$\Rightarrow x+5y-17=\pm 17$$

$$\Rightarrow x+5y-17=17 \text{ (or) } x+5y-17=-17$$

$$\Rightarrow x+5y-34=0 \text{ (or) } x+5y=0$$

$$\Rightarrow (x+5y-34)(x+5y)=0$$

∴ P బిందుపథం $(x+5y-34)(x+5y)=0$

12. 45^o కోణంతో అక్షాలను భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు, రూపాంతరం చెందిన వక్రం సమీకరణం $17x^2-16xy+17y^2=225$ అయిన ఆ వక్రం యొక్క మూల సమీకరణం కనుక్కోండి.

Sol: ★దత్త రూపాంతర(నూతన) సమీకరణం $17X^2-16XY+17Y^2=225$ ....(1) గా వ్రాద్దాం.

• భ్రమణ పరివర్తన కోణం $\theta=45^o$ అయిన

$$\star X=x\cos\theta+y\sin\theta = x\cos45^o+y\sin45^o = x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow X=\frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

$$Y=y\cos\theta-x\sin\theta = y\cos45^o-x\sin45^o = y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow Y=\frac{y-x}{\sqrt{2}}$$

• (1) నుండి, మూల సమీకరణం

$$\bullet 17\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2-16\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right)+17\left(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right)^2=225$$

$$\star \Rightarrow 17\left(\frac{x^2+y^2+2xy}{2}\right)-16\left(\frac{y^2-x^2}{2}\right)+17\left(\frac{y^2+x^2-2xy}{2}\right)=225 \quad [\because (x+y)(y-x)=(y+x)(y-x)=y^2-x^2]$$

$$\star \Rightarrow \frac{17x^2+17y^2\cancel{+34xy}-16y^2+16x^2+17x^2+17y^2\cancel{-34xy}}{2}=225$$

$$\star \Rightarrow 50x^2+18y^2=2(225) \Rightarrow \cancel{2}(25x^2+9y^2)=\cancel{2}(225) \Rightarrow 25x^2+9y^2=225$$

కావున కావలసిన మూల సమీకరణం $25x^2+9y^2=225$.

13. 3x+4y–1=0 అనే రేఖ దృష్ట్యా (1,2) యొక్క ప్రతిబింబము కనుగొనుము.

Sol: 3x+4y–1=0 అనే రేఖ దృష్ట్యా (1,2) యొక్క ప్రతిబింబము (h,k) అనుకొనుము.

ఇక్కడ $(x_1,y_1)=(1,2)$, a=3, b=4, c = –1.

$$\therefore \frac{h-x_1}{a}=\frac{k-y_1}{b}=\frac{-2(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{h-1}{3}=\frac{k-2}{4}=\frac{-2[3(1)+4(2)-1]}{3^2+4^2}=\frac{-2(10)}{25}=-2\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{4}{5}$$

$$\frac{h-1}{3}=-\frac{4}{5}\Rightarrow h-1=-\frac{12}{5}\Rightarrow h=1-\frac{12}{5}=\frac{5-12}{5}=-\frac{7}{5}$$

$$\frac{k-2}{4}=-\frac{4}{5}\Rightarrow k-2=-\frac{16}{5}\Rightarrow k=2-\frac{16}{5}=\frac{10-16}{5}=\frac{-6}{5}$$

$\therefore$ (1,2) యొక్క ప్రతిబింబం $(h,k)=\left(-\frac{7}{5},-\frac{6}{5}\right)$

---

14. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2} & \text{if } x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}(b^2-a^2) & \text{if } x=0\end{cases}$ **, అనే ప్రమేయము 0 వద్ద అవిచ్ఛిన్నమని చూపండి.**

Sol: **(a)** $f(0)=\dfrac{b^2-a^2}{2}$ ....(1)

(b) $$\underset{x\to 0}{Lt} f(x)=\underset{x\to 0}{Lt}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=\underset{x\to 0}{Lt}\frac{-2\sin\left(\frac{ax+bx}{2}\right)\sin\left(\frac{ax-bx}{2}\right)}{x^2}$$

$$\left[\because \cos C-\cos D=-2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)\right]$$

$$=-2\underset{x\to 0}{Lt}\left(\frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)x}{x}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)x}{x}\right)=-2\left(\underset{x\to 0}{Lt}\frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)x}{x}\right)\left(\underset{x\to 0}{Lt}\frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)x}{x}\right)$$

$$=-\cancel{2}\left(\frac{a+b}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)=-\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)=\frac{b^2-a^2}{2}\text{..........(2)}\qquad\left(\because \underset{x\to 0}{Lt}\frac{\sin kx}{x}=k\right)$$

$\therefore$(1) & (2) ల నుండి, $\underset{x\to 0}{Lt} f(x)=f(0)$ కావున x=0 వద్ద f(x) ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నము

15. **ప్రాథమిక సూత్రాన్ని ఉపయోగించి sin2x యొక్క అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.**

Sol: • f(x)=sin2x అనుకుంటే

★ f(x+h)=sin2(x+h)=sin (2x+2h)

• ప్రాథమిక సూత్రం నుండి

$$\star\quad f'(x) = \underset{h\to 0}{Lt}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\star = \underset{h\to 0}{Lt}\frac{\sin(2x+2h)-\sin 2x}{h}$$

$$\star = \underset{h\to 0}{Lt}\frac{1}{h}\left(2\cos\left(\frac{(2x+2h)+2x}{2}\right)\sin\left(\frac{(\cancel{2x}+2h)-\cancel{2x}}{2}\right)\right)\quad\left[\because \sin C-\sin D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)\right]$$

$$\star = 2\underset{h\to 0}{Lt}\frac{1}{h}\cos\left(\frac{4x+2h}{2}\right)\sin\left(\frac{\cancel{2}h}{\cancel{2}}\right)$$

$$\star = 2\underset{h\to 0}{Lt}\frac{1}{h}\cos\left(\frac{\cancel{2}(2x+h)}{\cancel{2}}\right)\sin(h)$$

$$\bullet = 2\underset{h\to 0}{Lt}\frac{1}{h}\cos(2x+h)\sin(h)$$

$$\star = 2\underset{h\to 0}{Lt}\cos(2x+h).\underset{h\to 0}{Lt}\frac{\sinh}{h}$$

$$\star = 2\cos(2x+0)(1) = 2\cos 2x$$

16. **x=a(cost+tsint), y=a(sint–tcost) అనే వక్రం మీద t అనే బిందువు వద్ద ఉపస్పర్శరేఖ మరియు ఉపఅభిలంబరేఖల పొడవులను కనుగొనుము.**

Sol: • x=a(cost+tsint) ను t దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

• $\frac{dx}{dt}=a\frac{d}{dt}[(\cos t+t\sin t)]$

$\star =a\left[\cancel{-\sin t}+[t\cos t\cancel{+\sin t(1)}]\right]$ (tsint మీద UVసూత్రాన్ని ప్రతిక్షేపించగా)

• $\therefore \frac{dx}{dt}=a(t\cos t)$

• ఇప్పుడు y=a(sint–tcost) ను t దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

• $\frac{dy}{dt}=a\frac{d}{dt}[(\sin t-t\cos t)]$

$\star =a\left[\cancel{\cos t}-[t(-\sin t)\cancel{+\cos t(1)}]\right]$ (tcost మీద UVసూత్రాన్ని ప్రతిక్షేపించగా)

• $\therefore \frac{dy}{dt}=a(t\sin t)$

$\star \therefore m=\frac{dy}{dx}=\frac{(dy/dt)}{(dx/dt)}=\frac{\cancel{a}(\cancel{t}\sin t)}{\cancel{a}(\cancel{t}\cos t)}=\tan t$

• కావున m=tant మరియు y=a(sint–tcost).

★(i) ఉపస్పర్శరేఖ పొడవు $=\left|\frac{y}{m}\right|=\left|\frac{a(\sin t-t\cos t)}{\tan t}\right|=|a(\sin t-t\cos t)\cot t|$

★(ii) ఉపఅభిలంబరేఖ పొడవు $=|y.m|=|a(\sin t-t\cos t)\tan t|$

17. ఒక సమఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం 9 క్యూబిక్ సెం.మీ/సె. చొప్పున పెరుగుచున్నది. భుజం పొడవు 10 సెం.మీ గా ఉన్నప్పుడు ఉపరితల వైశాల్యం పెరిగే రేటును కనుగొనుము.

Sol: • సమఘనము యొక్క భుజము పొడవు= x ,

• ఘనపరిమాణం=V మరియు ఉపరితల వైశాల్యం=S అనుకొనుము

★దత్తాంశం నుండి $\frac{dV}{dt}=9$ క్యూబిక్ సెం.మీ/సె. మరియు x=10 సెం.మీ

★ సమఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం $V=x^3$

★'t' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\frac{dV}{dt}=3x^2\frac{dx}{dt}$$

★ $\Rightarrow 9=3x^2\frac{dx}{dt}\Rightarrow\frac{dx}{dt}=\frac{\cancel{9}}{\cancel{3}x^2}=\frac{3}{x^2}$

★ఉపరితల వైశాల్యం $S=6x^2$

★'t' దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

★ $\frac{dS}{dt}=12x\frac{dx}{dt}=12\cancel{x}\left(\frac{3}{\cancel{x^2}}\right)$

★ $=\frac{36}{x}=\frac{36}{10}=3.6$ సెం.మీ^{2}/సె.

సెక్షన్-సి

18. ఆదిబిందువు నుండి $x\sec\alpha + y\,\text{cosec}\,\alpha = a$, $x\cos\alpha - y\sin\alpha = a\cos 2\alpha$ అనే సరళరేఖలకు గల లంబదూరాలు p, q లు అయిన, $4p^2 + q^2 = a^2$ అని చూపుము.

A: దత్త సరళరేఖ $x\sec\alpha + y\,\text{cosec}\,\alpha = a$

$$\Rightarrow \frac{x}{\cos\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} = a \Rightarrow \frac{x\sin\alpha + y\cos\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha} = a \Rightarrow x\sin\alpha + y\cos\alpha = a\sin\alpha\cos\alpha$$

O(0, 0)నుండి $x\sin\alpha + y\cos\alpha - a\sin\alpha\cos\alpha = 0$ కు గల లంబదూరం

$$p = \frac{|-a\sin\alpha\cos\alpha|}{\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}} = \frac{a\sin\alpha\cos\alpha}{1} = a\sin\alpha\cos\alpha$$

ఇప్పుడు $2p = a(2\sin\alpha\cos\alpha) = a\sin 2\alpha \Rightarrow 4p^2 = a^2\sin^2 2\alpha$.........(1)

O(0, 0) నుండి $x\cos\alpha - y\sin\alpha - a\cos 2\alpha = 0$ కు గల లంబదూరం

$$q = \frac{|-a\cos 2\alpha|}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} = \frac{a\cos 2\alpha}{1} = a\cos 2\alpha$$

$\therefore q^2 = a^2\cos^2 2\alpha$........(2)

(1) & (2)నుండి

$$4p^2 + q^2 = a^2\sin^2 2\alpha + a^2\cos^2 2\alpha = a^2(\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha) = a^2(1) = a^2$$

19. **$S=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ సమీకరణం ఒక సమాంతర రేఖాయుగ్మాన్ని సూచిస్తే (i) $h^2=ab$ (ii) $af^2=bg^2$ (iii) ఆ సమాంతర రేఖల మధ్య దూరం $2\sqrt{\dfrac{g^2-ac}{a(a+b)}}$ or $2\sqrt{\dfrac{f^2-bc}{b(a+b)}}$ అని చూపండి.**

Sol: ★$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0\equiv(lx+my+n_1)(lx+my+n_2)$ అనుకొందాం

•సరూప పదాల గుణకాలను పోల్చగా,

★$a=l^2,\ b=m^2, h=lm, 2g=l(n_1+n_2), 2f=m(n_1+n_2), c=n_1n_2$

★(i) $h^2=(lm)^2=l^2m^2=ab \Rightarrow h^2=ab$

★(ii) $af^2=l^2\left(\dfrac{m(n_1+n_2)}{2}\right)^2=\dfrac{l^2m^2(n_1+n_2)^2}{4}=\dfrac{m^2l^2(n_1+n_2)^2}{4}=m^2\left(\dfrac{l(n_1+n_2)}{2}\right)^2=bg^2$

★(iii)) $lx+my+n_1=0$, $lx+my+n_2=0$ సమాంతర రేఖల మధ్య దూరం $\dfrac{|n_1-n_2|}{\sqrt{l^2+m^2}}$

★ $=\dfrac{\sqrt{(n_1+n_2)^2-4n_1n_2}}{\sqrt{a+b}}=\sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{2g}{l}\right)^2-4c}{a+b}}=\sqrt{\dfrac{\dfrac{4g^2}{l^2}-4c}{a+b}}=\sqrt{\dfrac{\dfrac{4g^2}{a}-4c}{a+b}}=\sqrt{\dfrac{4g^2-4ac}{a(a+b)}}=2\sqrt{\dfrac{g^2-ac}{a(a+b)}}$

★ అదేవిధంగా $n_1+n_2=\dfrac{2f}{m}$ ను తీసుకొంటే సరళరేఖల మధ్య దూరం $2\sqrt{\dfrac{f^2-bc}{b(a+b)}}$

20. $x - y - \sqrt{2} = 0$ సరళరేఖ, $x^2 - xy + y^2 + 3x + 3y - 2 = 0$ వక్రాన్ని ఖండించే బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపితే ఏర్పడిన రేఖలు పరస్పరం లంబాలని చూపండి.

Sol: • దత్త రేఖ $x - y = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \frac{x-y}{\sqrt{2}} = 1 \quad ...(1)$$

• దత్త వక్రం

$$x^2 - xy + y^2 + 3x + 3y - 2 = 0............(2)$$

• (1) & (2) ల నుండి సమఘాతీకరణ సమీకరణం

$$x^2 - xy + y^2 + 3x(1) + 3y(1) - 2(1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - xy + y^2 + 3x\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) + 3y\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) - \cancel{2}\frac{(x-y)^2}{\cancel{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}xy + \sqrt{2}y^2 + 3x(x-y) + 3y(x-y) - \sqrt{2}(x-y)^2}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}xy + \sqrt{2}y^2 + 3x^2 \cancel{-3xy} \cancel{+3yx} - 3y^2 - \sqrt{2}(x^2 + y^2 - 2xy) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}xy + \sqrt{2}y^2 + 3x^2 - 3y^2 - \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 + 2\sqrt{2}xy = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 3y^2 + \sqrt{2}xy = 0$$

• ఇక్కడ x^2 గుణకం $+ y^2$ గుణకం $= 3-3=0$

$\therefore$ రెండు సరళరేఖాయుగ్మాలు లంబాలు.

21. సమాంతరంగా లేని రెండు రేఖల దిక్ సంఖ్యలు $3l+m+5n=0$, $6mn-2nl+5lm=0$ సమీకరణాలను తృప్తి పరిస్తే, వాటి మధ్య కోణాన్ని కనుగొనుము.

Sol: దత్తాంశం నుండి $3l+m+5n=0$

$\Rightarrow m=-3l-5n$ .....(1) ,

$6mn-2nl+5lm=0$ .....(2)

(1) & (2) లను సాధించగా

$6n(-3l-5n)-2nl+5l(-3l-5n)=0$

$\Rightarrow -18ln-30n^2-2ln-15l^2-25ln=0$

$\Rightarrow -15l^2-45ln-30n^2=0$

$\Rightarrow -15(l^2+3ln+2n^2)=0 \Rightarrow l^2+3ln+2n^2=0$

$\Rightarrow (l+n)(l+2n)=0 \Rightarrow l=-n$ or $l=-2n$

Case (i): (1) లో $l=-n$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$m=-3(-n)-5n=3n-5n=-2n$

$\therefore m=-2n$

$l:m:n=-\cancel{n}:-2\cancel{n}:\cancel{n}$

$=-1:-2:1=1:2:-1$

So, d.r's of $L_1=(a_1,b_1,c_1)=(1,2,-1)$.....(3)

Case (ii): Put $l=-2n$ in (1), then

$m=-3(-2n)-5n=6n-5n=n \therefore m=n$

$l:m:n=-2\cancel{n}:\cancel{n}:\cancel{n}$

$=-2:1:1=2:-1:-1$

L_2 యొక్క దిక్ సంఖ్యలు $=(a_2,b_2,c_2)$

$=(2,-1,-1)$....(4)

(3), (4) నుండి రేఖల మధ్య కోణం

$$\cos\theta=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}}=\frac{|1(2)+2(-1)+(-1)(-1)|}{\sqrt{(1^2+2^2+(-1)^2)(2^2+(-1)^2+(-1)^2)}}$$

$$=\frac{|\cancel{2}\cancel{-2}+1|}{\sqrt{(6)(6)}}=\frac{1}{\sqrt{36}}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{1}{6}\Rightarrow\theta=\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1}{6}$$

కావున రేఖల మధ్య కోణం $\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1}{6}$

22. $y = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right) - \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{4x-4x^3}{1-6x^2+x^4}\right)$ **అయిన** $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ **అని చూపండి.**

A: $x = \tan\theta$ అని వ్రాయగా

$$\therefore\ y = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right) + \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right) - \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{4\tan\theta-4\tan^3\theta}{1-6\tan^2\theta+\tan^4\theta}\right)$$

$$= \mathrm{Tan}^{-1}(\tan 2\theta) + \mathrm{Tan}^{-1}(\tan 3\theta) - \mathrm{Tan}^{-1}(\tan 4\theta) = 2\theta + 3\theta - 4\theta = \theta = \mathrm{Tan}^{-1}x \quad (\because x = \tan\theta)$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\mathrm{Tan}^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$$

23. నాల్గవ పాదంలో $2y^2-9x = 0$, $3x^2+4y = 0$ అనే వక్రాల మధ్య కోణాన్ని కనుగొనుము.

Sol: 1) ఖండన బిందువును కనుగొనుట:

దత్తాంశం $2y^2-9x=0 \Rightarrow 9x=2y^2 \Rightarrow x=\frac{2}{9}y^2$ .....(1)

$3x^2+4y = 0$ ....(2)

(1) & (2) లను సాధించగా P వచ్చును.

$$3.\left(\frac{2}{9}.y^2\right)^2+4y=0 \Rightarrow \cancel{3}\left(\frac{4}{\cancel{81}}\right)y^4+4y=0 \Rightarrow \frac{4}{27}y^4+4y=0 \Rightarrow \cancel{4}y\left(\frac{y^3}{27}+1\right)=0$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{y^3+27}{27}\right)=0 \Rightarrow y(y^3+27)=0 \Rightarrow y = 0 \text{ (or) } y^3 = -27=(-3)^3 \Rightarrow y = -3$$

$y=-3$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$x=\frac{2}{9}(-3)^2= \frac{2}{\cancel{9}}.\cancel{9} =2$ $\therefore$ ఖండన బిందువు $P(x,y)=(2,-3)\in Q_4$

2) అవకలనులను కనుగొనుట:

$2y^2-9x = 0$ ను x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$4y\frac{dy}{dx}-9=0 \Rightarrow 4y\frac{dy}{dx}=9 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{9}{4y}$ ....(3)

$3x^2+4y = 0$ ను x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా $6x+4\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow 4\frac{dy}{dx}=-6x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-\cancel{6}x}{\cancel{4}}=\frac{-3x}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-3x}{2} \text{ .....(4)}$$

3) P వద్ద వాలులను కనుగొనుట:

(3) నుండి, (2,–3) వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు $m_1=\frac{9}{4y}=\frac{9}{4(-3)}=\frac{\cancel{9}}{-\cancel{12}}=\frac{-3}{4}$ ....(5)

(4) నుండి, (2,–3) వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు $m_2=\frac{-3x}{2}=\frac{-3(\cancel{2})}{\cancel{2}}=-3$ ....(6)

4) P వద్ద కోణమును కనుగొనుట:

θ అనునది రెండు వక్రాల మధ్య కోణం అయిన (5) & (6), ల నుండి

$$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{\frac{-3}{4}+3}{1+\left(\frac{-3}{4}\right)(-3)}\right|=\left|\frac{\frac{-3+12}{4}}{1+\frac{9}{4}}\right|=\left|\frac{\frac{9}{\cancel{4}}}{\frac{13}{\cancel{4}}}\right|=\frac{9}{13} \therefore \tan\theta=\frac{9}{13} \Rightarrow \theta=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{9}{13}\right)$$

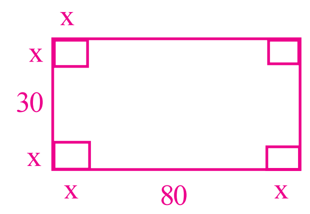
24. 30 సెం.మీ x 80 సెం.మీ కొలతలుగా ఉండే ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారపు రేకు ముక్క నాలుగు మూలల నుంచి భుజంగా ఉండే చతురస్రాకార ముక్కలను కత్తిరించి మిగిలిన రేకును మడిచి మూతలేని పెట్టెను తయారు చేశారు. ఆ పెట్టె ఘనపరిమాణం గరిష్ఠం అయితే x ఎంత?

Sol: ★పెట్టె యొక్క

ఎత్తు $h=x$

పొడవు $l=80-2x$

వెడల్పు $b=30-2x$ అనుకొనుము.



☺ **I'm Open Box Q'**

★పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణం $V=lbh=(80-2x)(30-2x)(x)$

• $=2(40-x)\,2(15-x)(x)$

• $=4(40-x)(15-x)(x)=4(600-40x-15x+x^2)x$

• $=4(600-55x+x^2)x=4(x^3-55x^2+600x)$

★$V(x)=4(x^3-55x^2+600x)$ .....(2)

•(2) ను x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

•$V'(x)=4(3x^2-110x+600)$ .....(3)

•$V'(x)=0 \Rightarrow \cancel{4}(3x^2-110x+600)=0$

గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ విలువ వద్ద $V'(x)=0$ అగును.

★ $\Rightarrow 3x^2-90x-20x+600=0$

• $\Rightarrow 3x(x-30)-20(x-30)=0 \Rightarrow (3x-20)(x-30)=0$

• $\Rightarrow 3x=20$ (or) $x=30 \Rightarrow x=20/3$ (or) $x=30$

• ఇప్పుడు (3)ను x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

★ $V''(x)=4(6x-110)$ ....(4)

★ $x=\frac{20}{3}$ వద్ద (4) నుండి

★ $V''\left(\frac{20}{3}\right)=4\left(\cancel{6}\left(\frac{20}{\cancel{3}}\right)-110\right)=4(40-110)=4(-70)=-280$

•కావున $V''\left(\frac{20}{3}\right)<0$

•$\therefore$ $V(x)$ యొక్క గరిష్ఠ విలువ $x=\frac{20}{3}$ సెం.మీ. వద్ద ఉండును.