# JR MATHS-1A (TM)

Previous IPE

## SOLVED PAPERS

## MARCH -2020 (TS)

## PREVIOUS PAPERS

# IPE: MARCH-2020(TS)

Time : 3 Hours | **గణితశాస్త్రం - 1A** | Max.Marks : 75

### సెక్షన్-ఎ

**I.** ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: $10 \times 2 = 20$

1. $f : R \to R$ ప్రమేయాన్ని $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ గా నిర్వచిస్తే $f(\tan\theta) = \cos 2\theta$ అని చూపండి.
2. $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)(x+3)}$ అనే ప్రమేయపు ప్రదేశము కనుగొనుము.
3. $\begin{bmatrix} x-1 & 2 & 5-y \\ 0 & z-1 & 7 \\ 1 & 0 & a-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ అయిన x, y,z,a విలువలు కనుగొనుము
4. మాత్రికా కోటిని నిర్వచించుము.
5. $-3\bar{i}+4\bar{j}+\lambda\bar{k},\ \mu\bar{i}+8\bar{j}+6\bar{k}$ అనే సదిశలు సరేఖీయములైన $\lambda, \mu$ లను కనుగొనుము.
6. (0,0,0), (0,5,0) , (2,0,1) అనే బిందువుల గుండా పోయే తలం యొక్క సదిశా సమీకరణం కనుగొనుము.
7. $\bar{r}.(2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}) = 3,\ \bar{r}.(3\bar{i}+6\bar{j}+\bar{k}) = 4$ తలముల మధ్య కోణము కనుగొనుము.
8. ఆవర్తనం 7 గల ఒక కొసైన్ ప్రమేయమును కనుగొనుము.
9. $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3}\tan 20^\circ \tan 40^\circ$ యొక్క విలువలు కనుగొనుము
10. $\cosh^4 x - \sinh^4 x = \cosh(2x)$ అని నిరూపించండి.

### సెక్షన్-బి

**II.** క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 4 = 20$

11. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ అయిన $A^4$ ను కనుగొనుము
12. $3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k},\ 2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k},\ -\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k},\ 4\bar{i}+5\bar{j}+\lambda\bar{k}$ లు స్థానసదిశలుగా గల బిందువులు సతలీయములైతే $\lambda = -146/17$ అని చూపండి.
13. $|\bar{a}| = 13, |\bar{b}| = 13$ మరియు $\bar{a}.\bar{b} = 60$, అయిన $|\bar{a}\times\bar{b}|$ను కనుగొనుము.
14. $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7} = \frac{1}{8}$ అని నిరూపించండి.
15. $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}$ ను సాధించండి.
16. $\mathrm{Sin}^{-1}\frac{4}{5} + 2\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$ అని నిరూపించండి.
17. $\Delta ABC$లో $b\cos^2\frac{C}{2} + c\cos^2\frac{B}{2} = s$ అని చూపండి.

### సెక్షన్-సి

**III.** క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 7 = 35$

18. $f: A \to B,\ g: B \to C$ లు ద్విగుణ ప్రమేయాలు అయిన $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ అని నిరూపించండి.
19. గణితానుగమన సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి $a + ar + ar^2 + .... + n$ పదాల వరకు $= \frac{a(r^n-1)}{r-1}, r \neq 1$ అని నిరూపించండి.
20. $\begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix} = 0$ అయితే $abc = -1$ అని చూపండి.
21. $x+y+z=1,\ 2x+2y+3z=6,\ x+4y+9z=3$ సమీకరణ వ్యవస్థను క్రామర్ పద్ధతిన సాధించండి.
22. (1, 2, 1), (3, 2, 5), (2, –1, 0), (–1, 0, 1) లు శీర్షాలుగా గల చతుర్ముఖ ఘనపరిమాణం కనుగొనుము.
23. A,B,C లు త్రిభుజం యొక్క కోణాలైన $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ అని చూపండి.
24. $r : R : r_1 = 2 : 5 : 12$, అయితే, ఆ త్రిభుజంలో A లంబకోణమని రుజువు చేయండి.

# IPE TS MARCH-2020
## SOLUTIONS

## సెక్షన్-ఎ

**1. $f: R \to R$ ప్రమేయాన్ని $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ గా నిర్వచిస్తే $f(\tan\theta) = \cos 2\theta$ అని చూపండి.**

**A:** దత్తాంశం నుండి $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$\therefore f(\tan\theta) = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos 2\theta.$ [ త్రికోణమితీయ సూత్రం నుండి ]

---

**2. $\frac{1}{(x^2-1)(x+3)}$ అనే వాస్తవ ప్రమేయపు ప్రదేశము కనుగొనుము.**

**A:** దత్తాంశ f(x) నిర్వచితమైతే $(x^2-1)(x+3) \neq 0$

$\Rightarrow (x-1)(x+1)(x+3) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1, -1, -3$

$\therefore$ ప్రదేశం $= R - \{1, -1, -3\}$

---

**3. $\begin{bmatrix} x-1 & 2 & 5-y \\ 0 & z-1 & 7 \\ 1 & 0 & a-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ అయిన x, y, z, a విలువలు కనుగొనుము**

**Sol:** దత్తాంశం నుండి $\begin{bmatrix} x-1 & 2 & 5-y \\ 0 & z-1 & 7 \\ 1 & 0 & a-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

అనురూప మూలకాలను సమానం చేయగా

$x-1=1 \Rightarrow x=1+1=2;$

$5-y=3 \Rightarrow y=5-3=2;$

$z-1=4 \Rightarrow z=4+1=5;$

$a-5=0 \Rightarrow a=5$ $\therefore x=2, y=2, z=5, a=5$

---

**4. మాత్రికా కోటిని నిర్వచించుము.**

**A:** A అనే శూన్యేతర మాత్రిక యొక్క కోటి అనునది A యొక్క సాధారణ చతురస్ర 'ఉపమాత్రికల తరగతులలో'ని గరిష్ఠ విలువ. శూన్యమాత్రిక యొక్క కోటి 'సున్నా'గా పరిగణిస్తారు.

**5.** $-3\bar{i}+4\bar{j}+\lambda\bar{k}, \mu\bar{i}+8\bar{j}+6\bar{k}$ **అనే సదిశలు సరేఖీయములైన $\lambda, \mu$ లను కనుగొనుము.**

**Sol:** దత్త సదిశలు $\bar{a}=-3\bar{i}+4\bar{j}+\lambda\bar{k}$, $\bar{b}=\mu\bar{i}+8\bar{j}+6\bar{k}$ లు సరేఖీయాలు

$$\therefore \frac{-3}{\mu}=\frac{\cancel{4}}{\cancel{8}}=\frac{\lambda}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{-3}{\mu}=\frac{1}{2} \Rightarrow \mu=2\times-3=-6 \text{ మరియు } \frac{\lambda}{6}=\frac{1}{2} \Rightarrow \lambda=\frac{\cancel{6}}{\cancel{2}}=3$$

$\therefore \lambda=3, \mu=-6$

---

**6.** **(0,0,0), (0,5,0) , (2,0,1)అనే బిందువుల గుండా పోయే తలం యొక్క సదిశా సమీకరణం కనుగొనుము.**

**Sol:** దత్త బిందువులు $A(\bar{a})=\bar{0}, B(\bar{b})=5\bar{j}$, $C(\bar{c})=2\bar{i}+\bar{k}$

తలం యొక్క సదిశా సమీకరణం $\bar{r}=(1-s-t)\bar{a}+s\bar{b}+t\bar{c}, s, t\in R$

$$\bar{r}=(1-s-t)\bar{0}+s(5\bar{j})+t(2\bar{i}+\bar{k})$$

$$\therefore \bar{r}=(5\bar{j})s+t(2\bar{i}+\bar{k}), s, t\in R$$

---

**7.** $\bar{r}.(2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k})=3$, $\bar{r}.(3\bar{i}+6\bar{j}+\bar{k})=4$ **తలముల మధ్య కోణం కనుగొనుము.**

**Sol:** $\bar{r}.(2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k})=3$, $\bar{r}.(3\bar{i}+6\bar{j}+\bar{k})=4$ తలములు $\bar{r}.\bar{n}_1=p_1$, $\bar{r}.\bar{n}_2=p_2$ రూపంలో ఉన్నట్లైతే

$\bar{n}_1=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$, $\bar{n}_2=3\bar{i}+6\bar{j}+\bar{k}$

$$\boxed{\therefore \cos\theta=\frac{\bar{n}_1.\bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|}}$$

$$=\frac{(2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}).(3\bar{i}+6\bar{j}+\bar{k})}{\sqrt{4+1+4}.\sqrt{9+36+1}}=\frac{2(3)-1(6)+2(1)}{\sqrt{9}.\sqrt{46}}=\frac{6-6+2}{\sqrt{9}.\sqrt{46}}=\frac{2}{3\sqrt{46}}$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{2}{3\sqrt{46}} \Rightarrow \theta=\cos^{-1}\frac{2}{3\sqrt{46}}$$

---

**8.** **ఆవర్తనం 7 గల ఒక కొసైన్ ప్రమేయమును కనుగొనుము.**

**Sol:** కావలసిన కొసైన్ ప్రమేయము coskx అనుకొనుము.

coskx యొక్క ఆవర్తనం $=\frac{2\pi}{k}$

$\therefore$ ఆవర్తనం $\frac{2\pi}{k}=7 \Rightarrow k=\frac{2\pi}{7}$ కావలసిన కొసైన్ ప్రమేయము$=\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)x$

**9.** $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3}\tan 20^\circ \tan 40^\circ$ **యొక్క విలువను కనుగొనుము.**

**Sol:** $20^\circ+40^\circ=60^\circ \Rightarrow \tan(20^\circ+40^\circ)=60^\circ$ tan(A+B) ఫార్ములాను అనువర్తింపచేయగా

$$\Rightarrow \frac{\tan 20^\circ + \tan 40^\circ}{1-\tan 20^\circ \tan 40^\circ} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 20^\circ + \tan 40^\circ = \sqrt{3}(1-\tan 20^\circ \tan 40^\circ)$$

$$\Rightarrow \tan 20^\circ + \tan 40^\circ = \sqrt{3} - \sqrt{3}\tan 20^\circ \tan 40^\circ \Rightarrow \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3}\tan 20^\circ \tan 40^\circ = \sqrt{3}$$

---

**10.** $\cosh^4 x - \sinh^4 x = \cosh 2x$ **అని నిరూపించండి.**

**Sol:** L.H.S $= \cosh^4 x - \sinh^4 x = (\cosh^2 x - \sinh^2 x)(\cosh^2 x + \sinh^2 x) = (1)(\cosh 2x) = \cosh 2x =$ R.H.S

## సెక్షన్-బి

**11.** $A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ అయిన $A^4$ ను కనుగొనుము.

**Sol:** $$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\times3&0&0\\0&3\times3&0\\0&0&3\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^4=A^2\times A^2=\begin{bmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}81&0&0\\0&81&0\\0&0&81\end{bmatrix}=81\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=81I$$

---

**12.** $3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k}, 2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k}, -\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}, 4\bar{i}+5\bar{j}+\lambda\bar{k}$ లు స్థానసదిశలుగా గల బిందువులు సతలీయములైతే $\lambda=-146/17$ అని చూపండి.

**Sol:** O అనునది ఆదిబిందువు మరియు

$\overline{OP}=3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k}, \overline{OQ}=2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k}$,
$\overline{OR}=-\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}, \overline{OS}=4\bar{i}+5\bar{j}+\lambda\bar{k}$,
అనుకొనుము.

$\therefore \overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP}=(2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k})-(3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k})=-\bar{i}+5\bar{j}-3\bar{k}$

$\overline{PR}=\overline{OR}-\overline{OP}=(-\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k})-(3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k})=-4\bar{i}+3\bar{j}+3\bar{k}$

$\overline{PS}=\overline{OS}-\overline{OP}=(4\bar{i}+5\bar{j}+\lambda\bar{k})-(3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k})=\bar{i}+7\bar{j}+(\lambda+1)\bar{k}$

కాని $[\overline{PQ}\ \overline{PR}\ \overline{PS}]=0$

[ P,Q,R,S అనే నాలుగు బిందువుల సతలీయములు కావున ]

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}-1&5&-3\\-4&3&3\\1&7&\lambda+1\end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow (-1)[3(\lambda+1)-21]-5[-4(\lambda+1)-3]-3[(-28)-3]=0$

$\Rightarrow -1(3\lambda-18)-5(-4\lambda-7)-3(-31)=0$

$\Rightarrow -3\lambda+18+20\lambda+35+93=0$

$\Rightarrow -3\lambda+20\lambda+35+93+18=0$

$\Rightarrow 17\lambda+146=0$

$\Rightarrow 17\lambda=-146 \Rightarrow \lambda=-146/17$

**13.** $|\bar{a}| = 13,\ |\bar{b}| = 5$, $\bar{a}.\bar{b} = 60$ అయిన $|\bar{a}\times\bar{b}|$ ను కనుగొనుము.

**Sol:** $|\bar{a}\times\bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2 - (\bar{a}.\bar{b})^2 = (13)^2(5)^2 - (60)^2$

$= 169(25) - 3600 = 4225 - 3600 = 625$

$\therefore |\bar{a}\times\bar{b}| = \sqrt{625} = 25$

---

**14.** $\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{8\pi}{7} = \frac{1}{8}$ అని నిరూపించండి.

**Sol:** Let $C = \cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{8\pi}{7}$ and $S = \sin\frac{2\pi}{7}.\sin\frac{4\pi}{7}.\sin\frac{8\pi}{7}$

$$\Rightarrow CS = \left(\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\right)\left(\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{2^3}\left(2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\right)\left(2\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\sin\frac{4\pi}{7}\right)\left(\sin\frac{8\pi}{7}\right)\left(\sin\frac{16\pi}{7}\right) = \frac{1}{8}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7}\sin\left(\frac{14\pi+2\pi}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7}\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7} \qquad = \frac{1}{8}S \qquad [\because \sin(2\pi+\theta)=\sin\theta]$$

$$\Rightarrow C\cancel{S} = \frac{1}{8}\cancel{S} \Rightarrow C = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{8\pi}{7} = \frac{1}{8}$$

**15.** $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}$ **ను సాధించుము.**

**Sol:** దత్త సమీకరణం $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}$

దీనిని $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$ తో భాగించగా

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \cos\theta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sin\theta\cos 30^\circ - \cos\theta\sin 30^\circ = \sin 45^\circ$$

$$\Rightarrow \sin\theta\cos\frac{\pi}{6} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \qquad [\because \sin A\cos B - \cos A\sin B = \sin(A-B)]$$

దీని ప్రధాన విలువ $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha, n \in Z$

$$\Rightarrow \theta - \frac{\pi}{6} = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}, n \in Z$$

$$\Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}, n \in Z$$

**16.** $\mathbf{Sin^{-1}\frac{4}{5}+2Tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}}$ **అని నిరూపించండి.**

**Sol:** $2Tan^{-1}x = Cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ అని మనకు తెలుసు.

$$\therefore 2Tan^{-1}\frac{1}{3} = Cos^{-1}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right) = Cos^{-1}\left(\frac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}}\right)$$

$$= Cos^{-1}\left(\frac{\frac{8}{\cancel{9}}}{\frac{10}{\cancel{9}}}\right) = Cos^{-1}\left(\frac{\cancel{8}}{\cancel{10}}\right) = Cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\therefore L.H.S = Sin^{-1}\frac{4}{5}+Cos^{-1}\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2}=R.H.S \qquad (\because Sin^{-1}x+Cos^{-1}x=\frac{\pi}{2})$$

---

**17.** $\mathbf{\Delta ABC}$ **లో** $\mathbf{b\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{B}{2}}$ **ను కనుగొనుము.**

**Sol:** $G.E = b.\cos^2\frac{C}{2}+c.\cos^2\frac{B}{2} = \cancel{b}.\frac{s(s-c)}{a\cancel{b}}+\cancel{c}.\frac{s(s-b)}{\cancel{c}a} = \frac{s(s-c)}{a}+\frac{s(s-b)}{a} = \frac{s}{a}(s-c+s-b)$

$$= \frac{s}{a}(2s-c-b) = \frac{s}{a}(a+\cancel{b}+\cancel{c}-\cancel{c}-\cancel{b}) = \frac{s}{\cancel{a}}(\cancel{a}) = s$$

## సెక్షన్-సి

**18. $f:A\to B, g:B\to C$ లు ద్విగుణ ప్రమేయాలు అయిన $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ అని నిరూపించండి.**

**Sol:** **Part -1:** $f:A\to B, g:B\to C$ లు రెండు ద్విగుణ ప్రమేయాలు

(i) $gof:A\to C$ ద్విగుణ ప్రమేయం. కావున $(gof)^{-1}: C\to A$ కూడా ద్విగుణ ప్రమేయమగును.

(ii) $f^{-1}:B\to A, g^{-1}:C\to B$ లు రెండు ద్విగుణ ప్రమేయాలు $\Rightarrow (f^{-1}og^{-1}): C\to A$ కూడా ద్విగుణ ప్రమేయం

కావున $(gof)^{-1}$ మరియు $f^{-1}og^{-1}$ లకు ఒకే ప్రదేశం 'C' కలదు.

**Part–2:** $f:A\to B$ ద్విగుణ ప్రమేయం కావున $f(a)=b\Rightarrow a=f^{-1}(b)$........(1), [ ఇక్కడ $a\in A, b\in B$]

$g:B\to C$ ద్విగుణ ప్రమేయం కావున $g(b)=c\Rightarrow b=g^{-1}(c)$........(2), [ ఇక్కడ $b\in B, c\in C$]

$gof:A\to C$ ద్విగుణ ప్రమేయం కావున $gof(a)=c \Rightarrow a= (gof)^{-1}(c)$.........(3)

ఇప్పుడు, $(f^{-1}og^{-1})(c)=f^{-1}[g^{-1}(c)]=f^{-1}(b)=a$ .........(4), [(1) & (2) ల నుండి]

$\therefore (gof)^{-1}(c)=(f^{-1}og^{-1})(c), \forall c\in C$, [(3) & (4) ల నుండి]

కావున $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ అని నిరూపించబడినది.

---

**19. గణితాను గమన సిద్ధాంతమునుపయోగించి $a+ar+ar^2+....+n$ పదాలు$=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}, r\neq 1$ అని చూపుము.**

**Sol :** మొదట n వ పదాన్ని కనుగొనాలి.

$a, ar, ar^2... ar^{n-1}$ లు గుణశ్రేఢిలో ఉన్నవి కాబట్టి n వ పదము $T_n=ar^{n-1}$

$S(n):a+ar+ar^2+....+ar^{n-1}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ అనుకొనుము.

**స్టెప్ 1:** L.H.S లో $S(1)=a$ మరియు R.H.S లో $S(1)=\dfrac{a(r^1-1)}{r-1}=a$

L.H.S లో $S(1)=$ R.H.S లో $S(1)\Rightarrow S(1)$ నిజము.

**స్టెప్ 2:** ప్రతి $k\in N$ వద్ద $S(k)$ నిజమనుకున్న $S(k): a+ar+ar^2+...+ar^{k-1}=\dfrac{a(r^k-1)}{r-1}$ ....(1)

**స్టెప్ 3:** $S(k+1)$ నిజమని చూపాలి.

$$S(k+1):(a+ar+ar^2+....+ar^{k-1})+ar^{k+1-1}=\frac{a(r^{k+1}-1)}{r-1}$$

ఇప్పుడు, L.H.S లోని, $S(k+1)=(a+ar+ar^2+....+ar^{k-1})+ar^k=\dfrac{a(r^k-1)}{r-1}+ar^k$ [(1) నుండి]

$$=\frac{a(r^K-1)+(r-1)ar^K}{r-1}=\frac{ar^K-a+rar^K-ar^K}{r-1}=\frac{r.ar^K-a}{r-1}$$

$$=\frac{a.r^{k+1}-a}{r-1}=\frac{a(r^{k+1}-1)}{r-1}=R.H.S$$

$\therefore$ L.H.S లోని $S(k+1)=$ R.H.S లోని $S(k+1)$ కాబట్టి $S(k)$ నిజమైనపుడల్లా $S(k+1)$ నిజము.

గణితానుగమన సిద్ధాంతము నుండి ప్రతి $n\in N$ వద్ద ఇచ్చిన ప్రవచనము నిజము.

**20.** $\begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix} = 0$ అయిన **$abc = -1$ అని చూపండి.**

**Sol:** దత్తాంశం నుండి $\begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow -\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & b^2 & b \\ 1 & c^2 & c \end{vmatrix} + abc\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} + abc\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1+abc)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 1+abc=0 \Rightarrow abc = -1$

**21.** **x+y+z=1, 2x+2y+3z=6, x+4y+9z=3 రేఖీయ సమీకరణాలను క్రామర్ పద్ధతిన సాధించండి.**

**Sol:** ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థను మాత్రిక సమీకరణ రూపంలో వ్రాయగా $AX = D$, ఇక్కడ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ఇప్పుడు, $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$

$$= 1(18-12) - 1(18-3) + 1(8-2)$$

$$= 1(6) - 1(15) + 1(6) = 6 - 15 + 6 = -3$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 1(18-12) - 1(54-9) + 1(24-6)$$

$$= 1(6) - 1(45) + 1(18) = 6 - 45 + 18 = -21$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 1(54-9) - 1(18-3) + 1(6-6)$$

$$= 1(45) - 1(15) + 1(0) = 45 - 15 + 0 = 30$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(6-24) - 1(6-6) + 1(8-2)$$

$$= 1(-18) - 1(0) + 1(6) = -18 - 0 + 6 = -12$$

$\therefore$ క్రామర్ పద్ధతి ప్రకారం,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\cancel{-21}}{\cancel{3}} = 7;\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\cancel{30}}{\cancel{-3}} = 10;\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\cancel{-12}}{\cancel{-3}} = 4$$

$\therefore$ సాధన x=7, y= –10, z=4

**22. (1, 2, 1), (3, 2, 5), (2, –1, 0) , (–1, 0, 1) లు శీర్షాలుగా గల చతుర్ముఖ ఘనపరిమాణం కనుగొనుము.**

**Sol:** $\overline{OA}=\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k},\ \overline{OB}=3\overline{i}+2\overline{j}+5\overline{k},\ \overline{OC}=2\overline{i}-\overline{j},\ \overline{OD}=-\overline{i}+\overline{k}$ అనుకొనుము

$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=(3\overline{i}+2\overline{j}+5\overline{k})-(\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k})=2\overline{i}+4\overline{k}$$

$$\overline{AC}=\overline{OC}-\overline{OA}=(2\overline{i}-\overline{j})-(\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k})=\overline{i}-3\overline{j}-\overline{k}$$

$$\overline{AD}=\overline{OD}-\overline{OA}=(-\overline{i}+\overline{k})-(\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k})=-2\overline{i}-2\overline{j}$$

ఇప్పుడు, $[\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}]=\begin{vmatrix}2 & 0 & 4\\ 1 & -3 & -1\\ -2 & -2 & 0\end{vmatrix}$ =[2(0–2)+4(–2–6)]=– 4 –32= –36

∴ చతుర్ముఖి ఘనపరిమాణం $=\frac{1}{6}|-36|=6$ చ.యూనిట్లు

---

**23. A,B,C లు త్రిభుజం యొక్క కోణాలైన $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ అని చూపండి.**

**Sol:** A,B,C లు త్రిభుజం యొక్క కోణాలైన A+B+C=180° $\Rightarrow \frac{A+B+C}{2}=90^{\circ}$

$$L.H.S=(\sin A+\sin B)+\sin C$$

$$=2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad \left[\because \sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$=2\sin\left(90^{\circ}-\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\sin\frac{C}{2}\right] \quad =2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\sin\left(90^{\circ}-\frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right] \qquad [\because \sin(90^{\circ}-\theta)=\cos\theta]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right) \qquad [\because \cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B]$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=R.H.S$$

**24.** $r : R : r_1 = 2 : 5 : 12$, **అయితే, ఆ త్రిభుజంలో A లంబకోణమని రుజువు చేయండి.**

**Sol:** దత్తాంశం నుండి $r:R:r_1 = 2:5:12$ అప్పుడు $r=2k$, $R=5k$ and $r_1=12k$ స్థిరం k నకు

ఇప్పుడు $r_1 - r = 12\,k - 2k = 10k = 2(5k) = 2R$

$$\therefore r_1 - r = 2R \Rightarrow 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 2R$$

$$\Rightarrow \cancel{4}R\sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right] = \cancel{2}R \Rightarrow 2\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{A}{2} = 45^\circ \Rightarrow A = 90^\circ \left[\because \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}\right]$$

కావున త్రిభుజంలో లంబకోణం A అని నిరూపించబడినది.