4. సమతలంలో చలనం

స్టడీ నోట్స్

1.0 భౌతిక రాశులను రెండు రకాలుగా విభజించారు. అవి (1) అదిశరాశి (2) సదిశరాశి

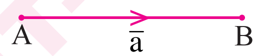
1.1 **అదిశరాశి :** దిశతో ప్రమేయం లేకుండా పరిమాణం మాత్రమే కలిగిన భౌతిక రాశిని అదిశ అంటాం.

ఉదా : పొడవు, ద్రవ్యరాశి, కాలము, దూరం మొదలైనవి.

1.2 **సదిశరాశి :** దిశ, పరిమాణం కలిగిన భౌతిక రాశిని సదిశరాశి అంటారు. ఇవి సదిశా సంకలన నియమాన్ని పాటిస్తాయి.

ఉదా : స్థానభ్రంశం, వేగం, ద్రవ్యవేగం, త్వరణం, బలం మొదలైనవి.

2. **సదిశలను జ్యామితీయంగా సూచించడం :**



జ్యామితీయంగా ఒక సదిశను దిశాత్మకరేఖాఖండంతో సూచిస్తాము.

సదిశను బాణం గుర్తుతో కూడా తెలియచేస్తాము.

సదిశ $\overline{AB}$ ను $\bar{a}$ తో సూచిస్తే

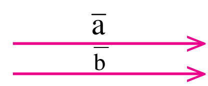
i) $\bar{a}$ సదిశ యొక్క తొలిబిందువు A

ii) $\bar{a}$ సదిశ యొక్క అంత్య బిందువు B

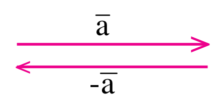
iii) $\bar{a}$ యొక్క పరిమాణం పొడవు AB. దీనిని $|\overline{AB}|$ లేదా AB లేదా $|\bar{a}|$ గా వ్రాస్తాము.

iv) $\bar{a}$ సదిశ యొక్క దిశ తొలిబిందువు A నుండి తుదిబిందువు B వైపు ఉంటుంది.

3. **సదిశలో రకాలు :**



3.1 **సమాన సదిశలు :** రెండు సదిశలు ఒకే పరిమాణం, ఒకే దిశ కలిగి ఉంటే వానిని సమాన సదిశలు అంటాం. రెండు సమాన సదిశల ప్రమాణాలు కూడా సమానం.



3.2 **ఋణ సదిశ :** ఒక సదిశకు, అదే పరిమాణం కలిగి వ్యతిరేక దిశను కలిగిన సదిశను ఋణ సదిశ అంటారు. దీనిని $-\bar{a}$ తో సూచిస్తాం.

3.3 **శూన్య సదిశ (నల్ సదిశ) :** పరిమాణం శూన్యముగా గల సదిశను శూన్య సదిశ అంటారు. దీనిని $\bar{0}$ తో సూచిస్తారు. దాని దిశ అనిశ్చితం.

3.4 **ఏకాంక సదిశ (లేదా) ప్రమాణ సదిశ :** పరిమాణం ఏకాంకముగా గల సదిశను ఏకాంక సదిశ అంటారు.

$\bar{a}$ అనేది శూన్యేతర సదిశ అయితే $\bar{a}$ సదిశ దిశలోని ప్రమాణ సదిశను $\hat{a}$ తో సూచిస్తాము.

$\bar{a}$ అనేది శూన్యేతర సదిశ అయితే దాని ఏకాంక సదిశ $\hat{a} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$

3.5 **స్థాన సదిశ :** O ఒక నిర్దేశిత బిందువు, P అంతరాళంలో ఒక బిందువైతే సదిశ $\overline{OP}$ ను O బిందువు పరంగా P యొక్క స్థానసదిశ అంటారు.

3.6 **సహకేంద్ర సదిశలు:** రెండు సదిశల యొక్క తొలిబిందువు ఉమ్మడిగా ఉంటే వాటిని సహకేంద్ర సదిశలు అంటారు.

గమనిక: రెండు సదిశల మధ్య కోణమును నిర్ణయించవలెనన్న ఆ రెండు సహకేంద్ర సదిశలు అవ్వాలి.

4.1 సదిశల సంకలనం : రేఖా గణితపరంగా $\bar{a}$, $\bar{b}$ సదిశలను సంకలనం చేయుటకు, స్కేలుతో రెండు బాణం గుర్తులను వాటి దిశలతో గీయాలి. $\bar{b}$ సదిశ యొక్క తొలిబిందువుకు, $\bar{a}$ సదిశ యొక్క తుది బిందువును కలపాలి. అపుడు $\bar{a}$ సదిశ యొక్క తొలిబిందువును $\bar{b}$ సదిశ యొక్క తుదిబిందువుతో కలిపే విధంగా బాణం గీయాలి. ఈ కొత్త సదిశను ఫలిత సదిశ $\bar{c}$ తో రెండు సదిశల సంకలనంగా తెలియజేస్తాము.

4.2 సదిశా సంకలన నియమాలు :

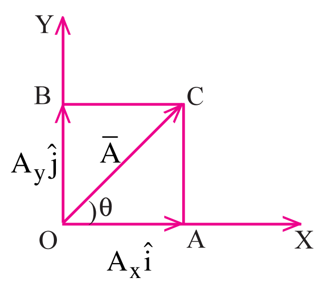
1) సదిశ సంకలనం స్థిత్యంతర న్యాయం పాటిస్తుంది $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

2) సదిశల సంకలనం సహచర న్యాయం పాటిస్తుంది $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

3) సదిశల సంకలనం విభాగ న్యాయం పాటిస్తుంది $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a}+k\vec{b}$ దీనిలో k అదిశ.

k_1 మరియు k_2 అనేవి అదిశలయితే $(k_1+k_2)\vec{a} = k_1\vec{a}+k_2\vec{a}$

5.1 సదిశను XY తలంలో రెండు లంబాంశాలుగా విభజించడం :



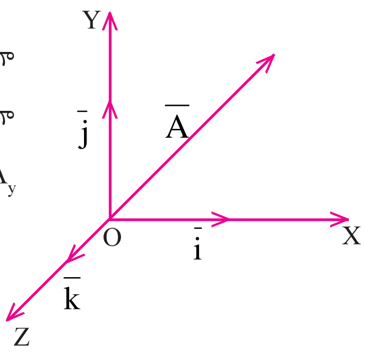
$\bar{R}$ అనే సదిశ X అక్షంతో θ కోణం చేస్తుంది. ఈ సదిశ $\bar{R}$ ను రెండు లంబాంశాలుగా విభజించవచ్చును.

పటంలో చూపిన విధంగా $\bar{R}$ సదిశ అంశాలు $\bar{P}$ మరియు $\bar{Q}$.

$|\bar{P}| = |\bar{R}|\cos\theta = R\cos\theta$, $\bar{R}$ యొక్క సమాంతరాంశం

$|\bar{Q}| = |\bar{R}|\sin\theta = R\sin\theta$, $\bar{R}$ యొక్క క్షితిజ లంబాంశం.

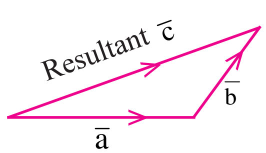
5.2 సదిశను XYZ అంతరాళంలో మూడు లంబాంశాలుగా విభజించడం :



$\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}$ లు వరుసగా X, Y, Z అక్షాల పరంగా ఒకదానికొకటి లంబంగా ఉన్న ఏకాంక సదిశలు. సదిశ $\bar{A}$ ను X, Y, Z అక్షాల పరంగా 3 అంశాలుగా విభజించవచ్చు. $\bar{A}$ సదిశ యొక్క X, Y, Z దిశలలో లంబాంశాలు A_x, A_y మరియు A_z అయితే $\bar{A} = A_x\bar{i}+A_y\bar{j}+A_z\bar{k}$.

$\bar{A}$ సదిశ యొక్క పరిమాణం $|\bar{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

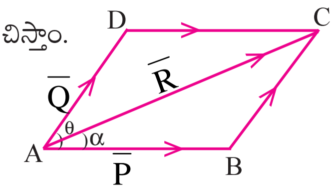
6. సదిశ త్రిభుజ నియమం : రెండు సదిశలను ఒక త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాలుగా దిశలోను, పరిమాణంలోను ఒక క్రమములో సూచిస్తే, త్రిభుజాన్ని పూర్తిచేసే మూడవ భుజం వ్యతిరేక క్రమంలో ఆ సదిశల ఫలిత సదిశను (మొత్తాన్ని) దిశలోనూ పరిమాణంలోను తెలుపుతుంది.



7. సదిశల సమాంతర చతుర్భుజ నియమం : రెండు సదిశలను పరిమాణంలోను దిశలోను ఒక బిందువునుంచి గీసిన సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క రెండు ఆసన్న భుజాలతో సూచిస్తే, ఆ బిందువు గుండా పోయే కర్ణం పరిమాణంలోను, దిశలోను ఆ రెండు సదిశల ఫలితాన్ని సూచిస్తుంది.

$\bar{P}$ మరియు $\bar{Q}$ సదిశల మధ్య కోణం θ అయితే ఫలిత సదిశను $\bar{R}$ తో సూచిస్తాం.

$\bar{R}$ ఫలిత సదిశ $\bar{P}$ తో చేసే కోణం α అయితే



(i) $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}$ (ii) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}\right)$

1) $\vec{P}$, $\vec{Q}$ సదిశలు ఒక దానికొకటి సమాంతరాలు అయితే (i) $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ} = P+Q$ (ii) $\alpha = 0^0$.

2) $\vec{P}$ మరియు $\vec{Q}$ సదిశల మధ్య కోణం 180^0 అయితే (i) $R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ} = P - Q$ (ii) $\alpha = 0^0$

3) రెండు సదిశల మధ్య కోణం $\theta = 90^0$ అయితే (i) $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$ (ii) $\mathrm{Tan}\,\alpha = \dfrac{Q}{P}$

4) రెండు సదిశల పరిమాణం సమానం మరియు $\theta = 90^0$ అయితే (i) $R = \sqrt{P^2 + P^2} = \sqrt{2}P$ (ii) $\alpha = 45^0$.

5) రెండు సదిశల పరిమాణం సమానం అయితే $|\vec{P}| = |\vec{Q}|$ అయితే (i) $R = 2P\cos\theta/2$ (ii) $\alpha = \theta/2$

6) రెండు సదిశలు ఫలిత విలువతో సమానం అయిన, అనగా $|\vec{P}| = |\vec{Q}| = |\vec{R}|$ అయినపుడు $\theta = 120^0$ అగును.

8. ద్విమితులలో సాపేక్ష వేగం: రెండు వస్తువులు A ,B లు v_A , v_B వేగాలతో చలిస్తున్నాయను కొందాం. ఆ సందర్భంలో వస్తువు A వేగం వస్తువు B వేగానికి సాపేక్షంగా $\bar{v}_{AB} = \bar{v}_A - \bar{v}_B$

అదే విధంగా వస్తువు B వేగం వస్తువు A వేగానికి సాపేక్షంగా $\bar{v}_{BA} = \bar{v}_B - \bar{v}_A$

$\therefore \bar{v}_{AB} = -\bar{v}_{BA}$ కాని $|\bar{v}_{AB}| = |\bar{v}_{BA}|$

9.1 ప్రక్షేపకం మరియు ప్రక్షిప్త పథం : క్షితిజ సమాంతర దిశకు కొంత కోణముతో గాలిలోనికి విసిరిన వస్తువును ప్రక్షేపకం అని, అది ప్రయాణించు మార్గమును ప్రక్షిప్త పథము అని అంటారు.

గమనిక : ప్రక్షేపకం యొక్క ప్రక్షిప్త పథము పరావలయము.

ఉదా: క్రికెట్ బంతిని బ్యాట్‌తో కొట్టినపుడు బంతి చలనము, గాలిలోనికి విసిరిన జావెలిన్ మొదలైనవి.

9.2 ప్రక్షేపక వస్తువు యొక్క చలన సమీకరణాలు :

1. క్షితిజ సమాంతర అంశం $u_x = u\cos\theta$; క్షితిజ లంబాంశం $u_y = u\sin\theta$.

2. t కాలం తరువాత, ప్రక్షేపకం యొక్క వేగం $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ i.e., $v_x = u_x = u\cos\theta$, $v_y = u\sin\theta - gt$

3. ఆరోహణ కాలం $t = \dfrac{u\sin\theta}{g}$ = అవరోహణ కాలం

4. పలాయన కాలం $T = 2t = \dfrac{2u\sin\theta}{g}$

5. గరిష్ఠోన్నతి $h_{max} = \dfrac{u^2\sin^2\theta}{2g}$ **6.** వ్యాప్తి $R = \dfrac{u^2\sin2\theta}{g}$; $R_{max} = \dfrac{u^2}{g}$, $(\because \theta = 45^0)$

10.1 భ్రమణ చలనం : ఒక వస్తువు ఏదైనా అక్షం చుట్టూ వృత్తాకార మార్గంలో తిరుగుతూ ఉంచే ఆ వస్తువు చలనమును భ్రమణ చలనం అని అంటారు. **ఉదా :** ధృవ అక్షం గుండా ఆత్మభ్రమణం చేసే భూమి.

10.2 భ్రమణావర్తన కాలం (T) : ఒక భ్రమణానికి పట్టిన కాలం

10.3 కోణీయ పౌనః పున్యం (n) : ఒక సెకను కాలంలో భ్రమణాల సంఖ్యనే కోణీయ పౌనఃపున్యం అంటారు.

10.4 కోణీయ స్థాన భ్రంశం (θ) : ఒక కణం యొక్క స్థానాన్ని సూచించే వ్యాసార్ధ సదిశ, నిర్ణీత సమయంలో తిరిగే కోణాన్ని కోణీయ స్థానభ్రంశం అంటారు. **S.I ప్రమాణం:** రేడియన్ **మితి ఫార్ములా :** $[M^0L^0T^0]$

10.5 కోణీయ వేగం (ω) : కణం యొక్క 'కోణీయ స్థానభ్రంశం' లోని 'మార్పు రేటు' ను కోణీయ వేగం అని అంటారు. $\omega=\frac{\theta}{t}$

S.I ప్రమాణం: రేడియన్ / సెకను **మితి ఫార్ములా:** $[M^0L^0T^{-1}]$

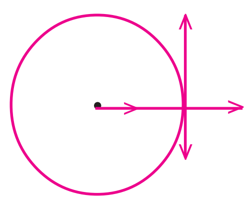
ఉదా : గడియారంలోని సెకనుల ముల్లు కోణీయ వేగం. $\omega=\frac{2\pi}{60}\,rad\,s^{-1}$ $(\because \omega=\frac{\theta}{t}=\frac{2\pi}{T})$

10.6 కోణీయ త్వరణం (α) : కణం 'కోణీయ వేగం' లోని 'మార్పురేటు' ను కోణీయ త్వరణం అని అంటారు.

S.I ప్రమాణం : rad s^{-2} **మితి ఫార్ములా :** $[M^0L^0T^{-2}]$

10.7 అభికేంద్రబలం: ఒక వస్తువును ఏకరీతి వృత్తాకార చలనంలో ఉంచుటకు వస్తువు మీద వేగదిశకు లంబంగా కేంద్రాభిముఖంగా పని చేసే బాహ్య బలాన్ని అభికేంద్ర బలం అంటారు. అభికేంద్ర బలం యొక్క దిశ ఎల్లప్పుడూ వ్యాసార్ధం వెంబడి కేంద్రం వైపుకు ఉంటుంది.

10.8 అపకేంద్రబలం : ఒక వృత్తంలో ప్రయాణిస్తున్న వస్తువుపై వ్యాసార్ధం వెంబడి కేంద్రం నుండి వెలుపలివైపుకు పని చేసే బలాన్ని అపకేంద్రబలం అంటారు.



సూత్రం : $CPF/CFF=\frac{mv^2}{r}=mv\omega=mr\omega^2$

10.9 Cఅభికేంద్ర త్వరణం : వృత్త పరిధిపై చలిస్తున్న కణం మీద వ్యాసార్ధం వెంబడి కేంద్రం వైపు పనిచేసే త్వరణాన్ని అభికేంద్ర త్వరణం లేదా రేడియల్ త్వరణం అంటారు.

సూత్రం : $a_r=\frac{v^2}{r}=r\omega^2=v\omega$

ముఖ్య సూత్రాలు

1. $R=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\theta}$; $\alpha=Tan^{-1}\left(\frac{Q\sin\theta}{P+Q\cos\theta}\right)$

2. క్షితిజ సమాంతర అంశం $u_x=u\cos\theta$; క్షితిజ లంబాంశం $u_y=u\sin\theta$.

3. t కాలం తరువాత, ప్రక్షేపకం యొక్క వేగం $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$; $v_x=u_x=u\cos\theta$, $v_y=u\sin\theta-gt$

4. ఆరోహణ కాలం $t=\frac{u\sin\theta}{g}$ = అవరోహణ కాలం

5. పలాయన కాలం $T=2t=\frac{2u\sin\theta}{g}$

6. గరిష్ఠోన్నతి $h_{max}=\frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$

7. వ్యాప్తి $R=\frac{u^2\sin2\theta}{g}$; $R_{max}=\frac{u^2}{g}$, $(\because \theta=45^o)$