2B (TM)

Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH -2019 (TS)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2019(TS)

Time : 3 Hours | గణితశాస్త్రం – 2B | Max.Marks : 75

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: $10 \times 2 = 20$

1. $2x^2+2y^2=7$ వృత్తము యొక్క పరామితీయ సమీకరణాలు కనుగొనుము.

2. $x^2+y^2=35$ వృత్తం దృష్ట్యా $(1,3), (2,k)$ లు సంయుగ్మాలు అయితే k విలువ ఎంత?

3. $x^2+y^2+4x+6y-7=0, 4(x^2+y^2)+8x+12y-9=0$ అనే వృత్తాల మూలాక్ష సమీకరణము కనుగొనుము.

4. $y-2x+5=0$నకు సమాంతరంగా ఉన్న పరావలయం $y^2=4x$ యొక్క అభిలంబ సమీకరణం కనుగొనుము.

5. ఒక అతిపరావలయపు ఉత్కేంద్రత 5/4 అయిన, దాని సంయుగ్మ అతిపరావలయం ఉత్కేంద్రత కనుగొనుము.

6. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1-\cos 2x} dx$ ను గణించండి.

7. $\int \frac{1}{x\log x[\log(\log x)]} dx$ ను గణించండి.

8. $\int_0^a \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx$ ను గణించండి.

9. $\int_0^{\pi/2} \cos^{11} x\, dx$ ను గణించండి.

10. $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$ సాధారణ సాధనను కనుగొనుము.

సెక్షన్-బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 4 = 20$

11. $(2,3)$ కేంద్రం ఉంటూ $x^2+y^2-4x+2y-7=0$ వృత్తాన్ని లంబంగా ఖండించే వృత్త సమీకరణం కనుక్కోండి.

12. $y=mx+c$ అనే సరళరేఖ $x^2+y^2=a^2$ అనే వృత్తమును A, B బిందువుల వద్ద ఖండించును. $AB=2\lambda$ అయిన $(a^2-\lambda^2)(1+m^2)=c^2$ అని చూపండి.

13. నాభి $S=(1,-1)$, $e=2/3$ మరియు నియతరేఖ $x+y+2=0$ అయిన దీర్ఘవృత్త సమీకరణం కనుగొనుము.

14. $2x^2+3y^2=11$ దీర్ఘవృత్తానికి y - నిరూపకం 1 గా గల బిందువుల వద్ద స్పర్శరేఖలు,అభిలంబరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

15. $x^2-4y^2=4$ అనే అతిపరావలయం కేంద్రం, ఉత్కేంద్రత, నాభులు, నియత రేఖ సమీకరణం, నాభిలంబం పొడవులను కనుగొనుము.

16. $\int_0^{2\pi} \sin^4 x \cos^6 x\, dx$ ను గణించండి.

17. $\cos x.\frac{dy}{dx}+y\sin x=\sec^2 x$ ను సాధించుము.

సెక్షన్-సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 7 = 35$

18. $(9,1), (7,9), (-2,12), (6,10)$ బిందువులు చక్రీయాలు అని చూపి, ఈ బిందువుల గుండాపోయే వృత్త సమీకరణము కనుగొనుము.

19. $x^2+y^2-14x+6y+33=0, x^2+y^2+30x-2y+1=0$ వృత్తాలకు నాలుగు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు గీయవచ్చు అని చూపండి.

20. పరావలయము $y^2=4ax$ కు బాహ్య బిందువు P నుంచి గీచిన స్పర్శరేఖలు అక్షరేఖతో θ_1,θ_2 కోణాలు చేస్తున్నాయి. $\cot\theta_1+\cot\theta_2$ విలువ స్థిరం d అయితే అలాంటి P లు క్షితిజ సమాంతర రేఖపై ఉంటాయని చూపండి.

21. $\int e^{ax}\sin(bx+c)dx; (a,b,c \in R; b \neq 0)$ on R ను గణించండి.

22. ధన పూర్ణాంకం $n \geq 2$, $I_n = \int \cot^n x\, dx$ కు లఘూకరణ సూత్రాన్ని రాబట్టండి. దాని నుంచి $\int \cot^4 x dx$ విలువ రాబట్టండి.

23. $\int_0^{\pi} x\sin^7 x.\cos^6 x\, dx$ ను గణించండి.

24. $\frac{dy}{dx}=\frac{2y+x+1}{2x+4y+3}$ ను సాధించండి.

BABY BULLET-Q

IPE TS MARCH-2019
SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. **$2x^2 + 2y^2 = 7$ వృత్తము యొక్క పరామితీయ సమీకరణాలు కనుగొనుము.**

Sol: ఇచ్చిన వృత్తాన్ని ప్రామాణిక రూపంలో రాయగా $x^2 + y^2 = \frac{7}{2} = \left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2$

$\therefore$ కేంద్రం (0, 0), వ్యాసార్థం $r = \sqrt{\frac{7}{2}}$

$x^2 + y^2 = r^2$ యొక్క పరామితీయ సమీకరణాలు $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{7}{2}}\cos\theta, y = \sqrt{\frac{7}{2}}\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

---

2. **$x^2+y^2=35$ వృత్తం దృష్ట్యా (1,3), (2,k) లు సంయుగ్మాలు అయితే k విలువ ఎంత?**

Sol: $S=x^2+y^2=35$ వృత్తం దృష్ట్యా (1,3), (2,k) లు సంయుగ్మాలు $\Rightarrow S_{12}=0$

$\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2-35=0$

$\Rightarrow (1)(2)+(3)(k)-35=0$

$\Rightarrow 3k = 33 \Rightarrow k = 11$

---

3. **$x^2+y^2+4x+6y-7=0$, $4(x^2+y^2)+8x+12y-9=0$ ల మూలాక్ష సమీకరణాలు కనుగొనండి.**

Sol: $S \equiv x^2 + y^2 + 4x + 6y - 7 = 0$, $S' \equiv x^2 + y^2 + 2x + 3y - \frac{9}{4} = 0$

మూలాక్ష సమీకరణం $S - S' = 0$

$\Rightarrow (4-2)x + (6-3)y + \left(-7 + \frac{9}{4}\right) = 0$

$\Rightarrow 2x + 3y - \frac{19}{4} = 0 \Rightarrow 8x + 12y - 19 = 0$

4. $y - 2x + 5 = 0$ నకు సమాంతరంగా ఉన్న పరావలయం $y^2 = 4x$ యొక్క అభిలంబ సమీకరణం కనుగొనుము.

Sol: దత్త పరావలయం $y^2 = 4x$ ....(1)

$y^2 = 4ax$, తో పోల్చగా $4a = 4 \Rightarrow a = 1$

దత్త రేఖ $y - 2x + 5 = 0 \Rightarrow y = 2x - 5$

$\therefore$ వాలు $m = 2$.

వాలు $m = 2$ గా కలిగిదత్త రేఖకు సమాంతరంగా ఉన్న పరావలయం యొక్క అభిలంబ సమీకరణం

$y = mx - 2am - am^3 \Rightarrow y = 2x - 2(1)(2) - 1(2)^3 \Rightarrow y = 2x - 12 \Rightarrow 2x - y - 12 = 0$

---

5. ఒక అతిపరావలయపు ఉత్కేంద్రత 5/4 అయిన, దాని సంయుగ్మ అతిపరావలయం ఉత్కేంద్రత కనుగొనుము.

Sol: $e = 5/4$ మరియు సంయుగ్మ అతిపరావలయపు ఉత్కేంద్రత e_1 అప్పుడు

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e_1^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{(5/4)^2} + \frac{1}{e_1^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{e_1^2} = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow e_1^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow e_1 = \frac{5}{3}$$

---

6. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1-\cos 2x} dx$ ను గణించండి.

Sol: $$\int \frac{1+\cos^2 x}{1-\cos 2x} dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\sin^2 x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\operatorname{cosec}^2 x + \cot^2 x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\operatorname{cosec}^2 x + (\operatorname{cosec}^2 x - 1)) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (2\operatorname{cosec}^2 x - 1) dx$$

$$= \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx - \frac{1}{2}\int dx = -\cot x - \frac{1}{2}x + c$$

BABY BULLET-Q

7. $\int \frac{1}{x\log x[\log(\log x)]}dx$ ను గణించండి.

Sol: $\log(\log x)=t \quad \Rightarrow \frac{1}{\log x}.\frac{1}{x}dx = dt$

$\therefore I = \int \frac{dt}{t} = \log t + c = \log(\log(\log x)) + c$

---

8. $\int_0^a \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx$ ను గణించండి.

Sol: $I = \int_0^a \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx \; = \int_0^a (a + x - 2\sqrt{a}\sqrt{x})\,dx$

$= \left[ax + \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{a}\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^a = a^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{4}{3}a^2 = \frac{6a^2 + 3a^2 - 8a^2}{6} = \frac{a^2}{6}$

---

9. $\int_0^{\pi/2} \cos^{11}x\,dx$ ను గణించండి.

Sol : n బేసి సంఖ్య అయినప్పుడు $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \frac{(n-1)(n-3)....}{n(n-2)....}\frac{2}{3}.1$

$\therefore \int_0^{\pi/2} \cos^{11} x\,dx = \frac{(10)(8)(6)(4)(2)}{(11)(9)(7)(5)(3)}(1) = \frac{256}{693}$

---

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ యొక్క సాధారణ సాధన కనుగొనుము

Sol: దత్త అవకలన సమీకరణము $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = 2\int\frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \log y = 2\log x + \log c \Rightarrow \log y = \log x^2 + \log c \Rightarrow \log y = \log cx^2 \Rightarrow y = cx^2$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $y = cx^2$

సెక్షన్-బి

11. (2,3) కేంద్రం ఉంటూ $x^2+y^2-4x+2y-7=0$ వృత్తాన్ని లంబంగా ఖండించే వృత్త సమీకరణం కనుక్కోండి.

Sol : కావలసిన వృత్త సమీకరణము $S=x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.....(1)

$S=0$ అనే వృత్త కేంద్రం $C(-g,-f)=(2,3) \Rightarrow g=-2, f=-3$

$S=0$ అనే వృత్తము $x^2+y^2-4x+2y-7=0$ నకు లంబంగా కలదు.

$\therefore 2gg'+2ff'=c+c' \Rightarrow 2g(-2)+2f(1)=c-7 \Rightarrow -4g+2f=c-7$

$g=-2, f=-3$ లను పై సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా

$\Rightarrow -4(-2)+2(-3)=c-7 \Rightarrow c=8-6+7=9$

$g=-2, f=-3, c=9$ లను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా, కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$x^2+y^2+2(-2)x+2(-3)y+9=0 \Rightarrow x^2+y^2-4x-6y+9=0$

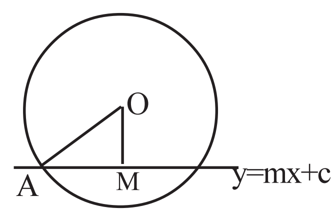
---

12. $y=mx+c$ అనే సరళరేఖ $x^2+y^2=a^2$ అనే వృత్తమును A, B బిందువుల వద్ద ఖండించును. $AB=2\lambda$ అయిన $(a^2-\lambda^2)(1+m^2)=c^2$ అని చూపండి.

Sol: దత్త వృత్త సమీకరణం $x^2+y^2=a^2$, కేంద్రం $=O(0,0)$

$y=mx+c$ వృత్తమును A మరియు B వద్ద ఖండించును.

OM = (0, 0) నుండి $mx-y+c=0$నకు గల లంబ దూరం



$$\Rightarrow OM=\frac{|c|}{\sqrt{1+m^2}}$$

ΔOAM నుండి $AM^2+OM^2=AO^2$

$$\Rightarrow AM^2=OA^2-OM^2 = a^2-\frac{c^2}{1+m^2}=\frac{a^2(1+m^2)-c^2}{1+m^2}$$

$$\text{జ్యా పొడవు } AB=2AM = 2\sqrt{a^2-\frac{c^2}{1+m^2}}$$

దత్తాంశం నుండి $AB=2\lambda$, $\therefore \not{2}\lambda=\not{2}\sqrt{a^2-\frac{c^2}{1+m^2}} \Rightarrow \lambda=\sqrt{\frac{a^2(1+m^2)-c^2}{1+m^2}}$

$$\Rightarrow \frac{a^2(1+m^2)-c^2}{1+m^2}=\lambda^2 \Rightarrow a^2(1+m^2)-c^2=\lambda^2(1+m^2) \Rightarrow a^2(1+m^2)-\lambda^2(1+m^2)=c^2$$

$\Rightarrow (a^2-\lambda^2)(1+m^2)=c^2$

BABY BULLET-Q

13. నాభి S=(1,–1), e=2/3 మరియు నియతరేఖ x+y+2=0 అయిన దీర్ఘవృత్త సమీకరణం కనుగొనుము.

Sol : నాభి S=(1,–1), e=2/3, నియతరేఖ x+y+2=0

దీర్ఘవృత్తంపై ఏదైనా బిందువు $P(x_1, y_1)$ అనుకొనుము $\Rightarrow SP = ePM$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_1-1)^2+(y_1+1)^2} = \frac{2}{3}\frac{|x_1+y_1+2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow 9[(x_1-1)^2+(y_1+1)^2] = 2(x_1+y_1+2)^2$$

$$\Rightarrow 9[x_1^2 - 2x_1 + 1 + y_1^2 + 2y_1 + 1] = 2[x_1^2 + y_1^2 + 4 + 2x_1y_1 + 4y_1 + 4x_1]$$

$$\Rightarrow 9(x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 + 2y_1 + 2) = 2(x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 + 4x_1 + 4y_1 + 4)$$

$$\Rightarrow 9x_1^2 + 9y_1^2 - 18x_1 + 18y_1 + 18 = 2x_1^2 + 2y_1^2 + 4x_1y_1 + 8x_1 + 8y_1 + 8$$

$$\Rightarrow 7x_1^2 - 4x_1y_1 + 7y_1^2 - 26x_1 + 10y_1 + 10 = 0$$

$\therefore$ దీర్ఘవృత్తము యొక్క సమీకరణము $7x^2 - 4xy + 7y^2 - 26x + 10y + 10 = 0$

---

14. $2x^2+3y^2=11$ దీర్ఘవృత్తానికి y-నిరూపకం 1 గా గల బిందువుల వద్ద స్పర్శరేఖలు, అభిలంబరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చిన దీర్ఘవృత్తంపై y-నిరూపకం 1 గా గల బిందువును $P(x_1,y_1)$ అనుకొందాం.

$\Rightarrow P(x_1,1)$ అనునది $S=2x^2+3y^2=11$ అనే దీర్ఘవృత్తంపై బిందువు

$\Rightarrow 2x_1^2 + 3 = 11 \Rightarrow 2x_1^2 = 8 \Rightarrow x_1^2 = 4 \Rightarrow x_1 = \pm 2$

$\therefore$ దీర్ఘవృత్తంపైన బిందువులు P(2,1) మరియు Q(–2,1)

S=0 దీర్ఘవృత్తానికి P(2,1) మీద స్పర్శరేఖ సమీకరణం $S_1=0 \Rightarrow 2x_1x+3y_1y-11=0$

$\Rightarrow 2(2)x+3(1)y-11=0 \Rightarrow 4x+3y=11$

పై స్పర్శరేఖ వాలు –4/3 $\Rightarrow$ దాని అభిలంబరేఖ వాలు 3/4

$\therefore$ P(2,1) వద్ద వాలు 3/4 గా గల అభిలంబరేఖ సమీకరణం $y-1=(3/4)(x-2) \Rightarrow 3x-4y-2=0$

Q(–2,1) వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం $S_1=0 \Rightarrow 2x_1x+3y_1y-11=0$

$\Rightarrow 2(-2)x+3(1)y-11=0 \Rightarrow -4x+3y-11=0$ Þ $\Rightarrow 4x-3y+11=0$

పై స్పర్శరేఖ వాలు 4/3 $\Rightarrow$ దాని అభిలంబరేఖ వాలు –3/4

Q(–2,1) వద్ద వాలు –3/4 గా గల అభిలంబరేఖ సమీకరణం $y-1=(-3/4)(x+2) \Rightarrow 3x+4y+2=0$

BABY BULLET-Q

15. **$x^2-4y^2=4$ అనే అతిపరావలయం యొక్క కేంద్రం, ఉత్కేంద్రత, నాభులు, నియత రేఖ సమీకరణం, నాభిలంబం పొడవులను కనుగొనుము.**

Sol: ఇచ్చిన అతిపరావలయ సమీకరణం $x^2-4y^2=4$

$\Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$. ఇక్కడ $a^2=4, b^2=1$

(i) కేంద్రం $C=(0,0)$

(ii) ఉత్కేంద్రత $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{4+1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

(iii) నాభులు $=(\pm ae,0)=\left(\pm 2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right),0\right)=(\pm\sqrt{5},0)$

(iv) నియతరేఖల సమీకరణం $x=\pm\frac{a}{e} \Rightarrow x=\pm\frac{2}{\frac{\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow x=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}$

(v) నాభిలంబం పొడవు $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(1)}{2}=1$

---

16. **$\int_0^{2\pi}\sin^4x\cos^6x\,dx$ ను గణించండి.**

Sol: $f(x)=\sin^4x\cos^6x$ అనుకొనుము.

ఇక్కడ $f(2\pi-x)=f(\pi-x)=f(x)$

$$\therefore \int_0^{2\pi}\sin^4x\cos^6x\,dx=2\int_0^{\pi}\sin^4x\cos^6x\,dx=2(2)\int_0^{\pi/2}\sin^4x\cos^6x\,dx$$

$$=4\frac{[(3)(1)][(5)(3)(1)]}{(10)(8)(6)(4)(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{128}$$

BABY BULLET-Q

17. $\cos x.\frac{dy}{dx} + y\sin x = \sec^2 x$ ను సాధించండి.

Sol: దత్త సమీకరణము $\cos x.\frac{dy}{dx} + y\sin x = \sec^2 x \Rightarrow \frac{dy}{dx} + y\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\sec^2 x}{\cos x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} + y(\tan x) = \sec^3 x$

పై సమీకరణము $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ అనే రూపంలో కలదు. ఇది **y** లో రేఖీయ అవకలజ సమీకరణము.

ఇక్కడ $P = \tan x \Rightarrow \int P dx = \int \tan x dx = \log \sec x$

$\therefore I.F = e^{\int P dx} = e^{\log \sec x} = \sec x$

కావున సాధన $y(I.F) = \int (I.F) Q\, dx$

$\Rightarrow y.\sec x = \int (\sec x)(\sec^3 x) dx = \int \sec^4 x dx = \int (\sec^2 x)(\sec^2 x) dx$

$= \int (1 + \tan^2 x)\sec^2 x dx = \int \sec^2 x dx + \int \sec^2 x \tan^2 x dx = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + c \left[\because f(x) = \tan x, f'(x) = \sec^2 x\right]$

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-సి

18. (9,1), (7,9), (–2,12), (6,10) బిందువులు చక్రీయాలు అని చూపి, ఈ బిందువుల గుండాపోయే వృత్త సమీకరణము కనుగొనుము.

Sol: A=(9,1), B=(7,9), C=(–2,12), D=(6,10) అనుకోండి.

$S(x_1,y_1)$ వృత్త కేంద్రం అనుకొనుము $\Rightarrow SA=SB=SC$

ఇప్పుడు $SA = SB \Rightarrow SA^2 = SB^2 \Rightarrow (x_1-9)^2+(y_1-1)^2=(x_1-7)^2+(y_1-9)^2$

$\Rightarrow (x_1^2-18x_1+\cancel{81})+(y_1^2-2y_1+1)=(x_1^2-14x_1+49)+(y_1^2-18y_1+\cancel{81})$

$\Rightarrow -4x_1+16y_1-48=0 \Rightarrow x_1-4y_1+12=0$ ....(1)

$SB = SC \Rightarrow SB^2 = SC^2 \Rightarrow (x_1-7)^2+(y_1-9)^2=(x_1+2)^2+(y_1-12)^2$

$\Rightarrow (x_1^2-14x_1+49)+(y_1^2-18y_1+81)=(x_1^2+4x_1+4)+(y_1^2-24y_1+144)$

$\Rightarrow -18x_1+6y_1-18=0 \Rightarrow 3x_1-y_1+3=0$ ......(2)

(1) & (2) లను సాధిస్తే వృత్త కేంద్రం $S(x_1,y_1)$ వస్తుంది.

(2) నుండి, $y_1=3x_1+3$

(1) $\Rightarrow x-4(3x_1+3)+12=0 \Rightarrow x-12x_1-12+12=0 \Rightarrow -11x_1=0 \Rightarrow x_1=0$

$x_1=0$ ను (2) లో వ్రాయగా $3x_1-y_1+3=0 \Rightarrow 0-y_1+3=0 \Rightarrow y_1=3$

$\therefore$ వృత్త కేంద్రం $S(x_1,y_1)=(0,3)$

ఇప్పుడు వ్యాసార్థం $r=SA=\sqrt{(9-0)^2+(1-3)^2}=\sqrt{81+4}=\sqrt{85}$

కావున కేంద్రం (0,3) మరియు $r=\sqrt{85}$ గా గల వృత్త సమీకరణం $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

$\Rightarrow (x-0)^2+(y-3)^2=(\sqrt{85})^2 \Rightarrow x^2+y^2-6y+9=85 \Rightarrow x^2+y^2-6y-76=0$

D(6,10) ను పై సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$(6)^2+(10)^2+6(10)-76=36+100-60-76=136-136=0$

$\therefore$ D(6,10) అనే బిందువు వృత్తం పై ఉండును.

$\therefore$ ఇచ్చిన 4 బిందువులు చక్రీయాలు

BABY BULLET-Q

19. **$x^2 + y^2 - 14x + 6y + 33 = 0$, $x^2 + y^2 + 30x - 2y + 1 = 0$ వృత్తాలకు నాలుగు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు గీయవచ్చు అని చూపండి.**

Sol: మొదటి వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 - 14x + 6y + 33 = 0$.......(1)

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ తో పోల్చగా $2g = -14 \Rightarrow g = -7$; $2f = 6 \Rightarrow f = 3$; $c = 33$

వ్యాసార్ధం $r_1 = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-7)^2 + 3^2 - 33} = \sqrt{49 + 9 - 33} = \sqrt{58 - 33} = \sqrt{25} = 5$

కేంద్రం $C_1 = (-g, -f) = (7, -3)$

రెండవ వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 + 30x - 2y + 1 = 0$......(2)

$2g = 30 \Rightarrow g = 15$; $2f = -2 \Rightarrow f = -1$; $c = 1$

వ్యాసార్ధం $r_2 = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(15)^2 + (-1)^2 - 1} = \sqrt{225} = 15$

$C_1(7,-3)$, $C_2(-15,1)$ అనే రెండు కేంద్రాల మధ్య దూరం

$$C_1C_2 = \sqrt{(7 + 15)^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{484 + 16} = \sqrt{500}$$

ఇప్పుడు $r_1 + r_2 = 5 + 15 = 20$ $\qquad C_1C_2 = \sqrt{500}$

$\therefore C_1C_2 > r_1 + r_2$ [$(C_1C_2)^2 = 500$; $(r_1 + r_2)^2 = 20^2 = 400$ కావున]

కావున ఒక వృత్తం రెండవ వృత్తమునకు పూర్తిగా వెలుపల ఉండును.

కావున ఇచ్చిన రెండు వృత్తములకు నాలుగు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు గీయవచ్చును.

BABY BULLET-Q

20. **పరావలయము $y^2=4ax$ కు బాహ్య బిందువు P నుంచి గీచిన స్పర్శరేఖలు అక్షరేఖతో θ_1,θ_2 కోణాలు చేస్తున్నాయి. $\cot\theta_1+\cot\theta_2$ విలువ స్థిరం d అయితే అలాంటి P లు క్షితిజ సమాంతర రేఖపై ఉంటాయని చూపండి.**

Sol: బాహ్య బిందువు $P=(x_1,y_1)$ అనుకొనుము

$y^2=4ax$ పరావలయానికి m వాలు కలిగిన స్పర్శరేఖ సమీకరణం $y = mx + \frac{a}{m}$

ఈ స్పర్శరేఖ $P(x_1,y_1)$ గుండా పోతే $y_1 = mx_1 + \frac{a}{m} \Rightarrow m^2x_1 - my_1 + a = 0$

పై సమీకరణము m లో ఒక వర్గ సమీకరణము మరియు దాని మూలాలు m_1, m_2 గా తీసుకుందాం.

ఇక్కడ , $m_1 = \tan\theta_1$ మరియు $m_2=\tan\theta_2$.

అప్పుడు $m_1 + m_2 = \frac{y_1}{x_1} \Rightarrow \tan\theta_1 + \tan\theta_2 = \frac{y_1}{x_1} \Rightarrow b = \frac{y_1}{x_1} (\because \tan\theta_1 + \tan\theta_2 = b)$

$\Rightarrow y_1 = bx_1$

కావున $P(x_1,y_1)$ అనే బిందువు y=bx అనే రేఖపై ఉండును.

దత్త బిందుపథ నియమం $\cot\theta_1 + \cot\theta_2 = d \Rightarrow \frac{1}{\tan\theta_1} + \frac{1}{\tan\theta_2} = d$

$$\Rightarrow \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = d \Rightarrow \frac{m_1+m_2}{m_1m_2} = d \Rightarrow m_1 + m_2 = dm_1m_2$$

$$\Rightarrow \frac{y_1}{x_1} = d\frac{a}{x_1} \Rightarrow y_1 = ad \text{ is in the form } y = k$$

$\Rightarrow \frac{y_1}{x_1} = d\frac{a}{x_1} \Rightarrow y_1 = ad$ అనునది $y = k$ రూపంలో ఉన్నది.

$P(x_1,y_1)$ బిందుపథం క్షితిజ సమాంతర రేఖ y=ad

BABY BULLET-Q

21. $\int e^{ax}\sin(bx+c)dx$ ను గణించండి.

Proof: $I=\int e^{ax}\sin(bx+c)dx$.........(1)

విభాగ సమాకలన సూత్రం ప్రకారం $u=\sin(bx+c)$ మరియు $v=e^{ax}$.

అప్పుడు $v_1=\frac{e^{ax}}{a}$ మరియు $u'=b\cos(bx+c)$

విభాగ సమాకలన సూత్రం ప్రకారం $\int uv=uv_1-\int v_1u'$

$$I=\int\sin(bx+c)\,(e^{ax})\,dx$$

$$=\sin(bx+c)\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)-\int\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)b\cos(bx+c)dx=\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx+c)-\frac{b}{a}\int\cos(bx+c)\left(e^{ax}\right)dx$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx+c)-\frac{b}{a}\left[\cos(bx+c)\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)-\int\frac{e^{ax}}{a}(-b\sin(bx+c))dx\right]$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx+c)-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx+c)-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx+c)dx$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx+c)-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx+c)-\frac{b^2}{a^2}I$$

$$\Rightarrow I\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)=\frac{1}{a^2}e^{ax}[a\sin(bx+c)-b\cos(bx+c)]$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)=\frac{e^{ax}}{a^2}[a\sin(bx+c)-b\cos(bx+c)]$$

$$\therefore I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin(bx+c)-b\cos(bx+c)]+c$$

BABY BULLET-Q

22. ధన పూర్ణాంకం $n \geq 2$, $I_n = \int \cot^n x dx$ కు లఘూకరణ సూత్రాన్ని రాబట్టండి. దాని నుంచి $\int \cot^4 x dx$ విలువ రాబట్టండి.

Sol: $I_n = \int \cot^n x dx = \int (\cot^{n-2} x)\cot^2 x dx$

$= \int (\cot^{n-2} x)(\csc^2 x - 1)dx$

$= \int \cot^{n-2} x .\csc^2 xdx - I_{n-2}$

$= \dfrac{\cot^{n-1}x}{n-1} - I_{n-2}$ ....(1)

n=4, 2,0 విలువలను వరుసగా (1)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$I_4 = -\dfrac{\cot^3 x}{3} - I_2 \quad = -\dfrac{\cot^3 x}{3} - (-\cot x - I_0) \quad = -\dfrac{\cot^3 x}{3} - (-\cot x - x)$

$= -\dfrac{\cot^3 x}{3} + \cot x + x + c$

---

23. $\int_0^{\pi} x\sin^7 x.\cos^6 x\, dx$ ను గణించండి.

Sol: $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx.$ అని మనకు తెలుసు.

$\therefore I = \int_0^{\pi} x\sin^7 x\cos^6 xdx = \int_0^{\pi} (\pi - x)\sin^7(\pi - x)\cos^6(\pi - x)dx$

$= \int_0^{\pi} (\pi - x)\sin^7 x\cos^6 x\, dx = \pi\int_0^{\pi} \sin^7 x\cos^6 x\, dx - I$

$\therefore 2I = \pi\int_0^{\pi} \sin^7 x\cos^6 xdx = 2\pi\int_0^{\pi/2} \sin^7 x\cos^6 xdx = 2\pi.\dfrac{[(6)(4)(2)][(5)(3)(1)]}{(13)(11)(9)(7)(5)(3)(1)} = \dfrac{32\pi}{3003} \Rightarrow I = \dfrac{16\pi}{3003}$

BABY BULLET-Q

24. $\frac{dy}{dx}=\frac{2y+x+1}{2x+4y+3}$ **అనే అవకలన సమీకరణమును సాధించుము.**

Sol: దత్త అవకలన సమీకరణం $\frac{dy}{dx}=\frac{(2y+x)+1}{2(x+2y)+3}$

$x+2y=z$ అయిన $1+2\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$

$$\Rightarrow 2\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx}-1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx}-1\right)=\frac{z+1}{2z+3}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx}-1=\frac{2z+2}{2z+3} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{2z+2}{2z+3}+1=\frac{2z+2+2z+3}{2z+3}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{4z+5}{2z+3}$$

$$\Rightarrow \frac{2z+3}{4z+5}dz=dx$$

$$\frac{2z+3}{4z+5}dz=dx \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{4z+6}{4z+5}\right)dz=dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{(4z+5)+1}{4z+5}\right]dz=dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{4z+5}\right]dz=dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4z+5}\right)dz=dx$$

$$\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4z+5}\right)dz\right)=\int dx$$

$$\Rightarrow \frac{z}{2}+\frac{1}{8}\log(4z+5)=x+c$$

$$\Rightarrow \frac{x+2y}{2}+\frac{1}{8}\log[4(x+2y)+5]=x+c \quad [\because z=x+2y]$$

$$\Rightarrow 4x+8y+\log(4x+8y+5)=8x+8c$$

$$\Rightarrow 8y-4x+\log(4x+8y+5)=8c$$

BABY BULLET-Q