JR MATHS-1B
(TM)

Previous IPE
SOLVED PAPERS

MARCH-2019 (TS)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2019(TS)

Time : 3 Hours **గణితశాస్త్రం - 1B** Max.Marks : 75

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: 10 x 2=20

1. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{a^x-1}{b^x-1}$ ను గణించుము. **2.** $3x + py - 1 = 0$, $7x - 3y + 3 = 0$ అనే సరళరేఖలు లంబముగా ఉంటే p విలువ కనుగొనుము

3. $f(x) = \log(\tan e^x)$ అయిన $f'(x)$ను కనుగొనుము.

4. A(–2,3,4),B(1,2,3) లను కలిపే రేఖాఖండాన్ని XZ-తలము విభజించే నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

5. $x+2y-3z-6=0$ అనే సమీకరణమును తలము యొక్క అభిలంబరూపములోని మార్చుము.

6. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{\log_e(1+5x)}{x}$ ను గణించుము. **7.** $f(x) = 1+x+x^2+............+x^{100}$ అయిన $f^1(1)$ ను కనుగొనుము.

8. $y = \sqrt{3}x - 4$ అనే సరళరేఖ Y-అక్షముతో చేసే కోణము కనుగొనుము.

9. $y=f(x)=x^2+4$ అనే ప్రమేయమునకు [–3,3] అనే అంతరంలో రోల్స్ సిద్ధాంతమును సరిచూడుము.

10. y=cosx ప్రమేయానికి $x=60^o, \Delta x=1^o=0.0174$ rad అయిన Δy, dy లను కనుగొనుము.

సెక్షన్-బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. 5 x 4=20

11. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2-4) & \text{if } 0<x<2\\ 0 & \text{if } x=2\\ 2-8x^{-3} & \text{if } x>2\end{cases}$ at 2. అనే ప్రమేయం యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను 2 వద్ద సరిచూడండి.

12. A(1,2), B(2,–3), C(–2,3) లు 3 బిందువులు. P అనే బిందువు $PA^2+PB^2=2PC^2$ అగునట్లుగా చలించుచున్నది అయిన P యొక్క బిందుపథ సమీకరణం $7x-7y+4=0$ అని చూపుము.

13. ఒక సరళరేఖ $Q(\sqrt{3},2)$ గుండా పోతూ, X- అక్షం ధనదిశతో $\pi/6$ కోణం చేస్తోంది. ఆ సరళరేఖ $\sqrt{3}x-4y+8=0$ రేఖను P వద్ద ఖండిస్తూంటే, PQ దూరం కనుక్కోండి.

14. అక్షాలను α కోణంతో భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ రూపాంతర సమీకరణం కనుక్కోండి.

15. $x=c\sec\theta$, $y=c\tan\theta$ మీద θ అనే బిందువు వద్ద గల స్పర్శరేఖ $y\sin\theta=x-c\cos\theta$ అని చూపుము.

16. ప్రాథమిక సూత్రాన్ని ఉపయోగించి $\cos^2x$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.

17. తిరగేసిన శంకువు రూపంలో ఉన్న ఒక పాత్ర యొక్క ఎత్తు 12 సెం.మీ మరియు పైన వ్యాసార్థము 6 సెం.మీ.దానిని నీటితో 12 $\mathbf{cm^3/sec}$ చొప్పున నింపుతూ ఉంటే నీటి మట్టము 8 సెం.మీల వద్ద నీటి మట్టము పెరుగుదల రేటును కనుగొనుము.

సెక్షన్-సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. 5 x 7 = 35

18. (5,–2),(–1, 2), (1, 4) శీర్షాలుగా గల త్రిభుజం లంబకేంద్రాన్ని కనుక్కోండి.

19. $ax^2+2hxy+by^2=0$, $lx+my+n=0$ సరళరేఖలు ఏర్పరచే త్రిభుజం వైశాల్యం $\dfrac{n^2\sqrt{h^2-ab}}{|am^2-2hlm+bl^2|}$ అని నిరూపించండి.

20. సమాంతరంగా లేని 2 రేఖల దిక్ కొసైన్లు $l+m+n=0$, $l^2+m^2-n^2=0$ లను తృప్తి పరిస్తే, ఆ రేఖల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.

21. $x^{\log y}=\log x$ అయిన $\dfrac{dy}{dx}$ ను కనుగొనుము.

22. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ వక్రంపై ఏదైనా బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ నిరూపకాక్షాలను A, Bలలో ఖండిస్తే, AB పొడవు స్థిరమని చూపండి.

23. $2x^2-2xy+3y^2+2x-y-1=0$ వక్రం $x+2y=k$ రేఖల ఖండన బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపే రేఖలు పరస్పరం లంబాలయితే k విలువ కనుక్కోండి.

24. 20 యూనిట్ల నియమిత చుట్టుకొలత గల దీర్ఘ చతురస్రముతో ఏర్పడే గరిష్ట వైశాల్యమును కనుగొనుము.

SAKSHI BULLET-Q

IPE TS MARCH-2019

SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{b^x-1}$ **ను గణించుము.**

A: $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{b^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{a^x-1}{x}\right)}{\left(\frac{b^x-1}{x}\right)}=\frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}\right)}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{b^x-1}{x}\right)}=\frac{\log_e a}{\log_e b}=\log_b a$

---

2. 3x + 7y −1 =0, 7x −py + 3= 0 అనే సరళరేఖలు లంబముగా ఉంటే p విలువ కనుగొనుము

Sol: 3x + 7y −1 =0 అనే సరళరేఖ వాలు $m_1=-\left(\frac{a}{b}\right)=-\left(\frac{3}{7}\right)=-\frac{3}{7}$

7x −py + 3= 0 అనే సరళరేఖ వాలు $m_2=-\left(\frac{a}{b}\right)=-\left(\frac{7}{-p}\right)=\frac{7}{p}$

దత్త సరళరేఖలు లంబం. కావున $m_1m_2=-1\Rightarrow\left(\frac{-3}{\not 7}\right)\left(\frac{\not 7}{p}\right)=-1\Rightarrow-\frac{3}{p}=-1\Rightarrow p=3$

---

3. f(x) = log(tan e^x) అయిన f′(x)ను కనుగొనుము.

A: దత్తాంశం నుండి f(x) = log (tan e^x) $\Rightarrow f'(x)=\frac{d}{dx}\log\left(\tan e^x\right)$

$=\frac{1}{\tan e^x}.\frac{d}{dx}\tan e^x=\frac{1}{\tan e^x}.\sec^2(e^x).\frac{d}{dx}(e^x)$

$=\cot(e^x)\sec^2(e^x).e^x$

---

4. A(−2,3,4), B(1,2,3) లను కలిపే రేఖాఖండాన్ని XZ-తలము విభజించే నిష్పత్తిని, ఖండన బిందువును కనుగొనుము.

Sol: • $A(x_1,y_1,z_1)=(-2,3,4)$ మరియు $B(x_2,y_2,z_2)=(1,2,3)$ అనుకొనుము.

★ $\overline{AB}$ కలిపే రేఖాఖండముXZ-తలమును విభజించే నిష్పత్తి $-y_1:y_2=-3:2$

• ∴ A(−2,3,4), B(1,2,3) లను −3 : 2 నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు నిరూపకాలు

★ $P=\left[\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\frac{my_2+ny_1}{m+n},\frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right]$

★ $=\left(\frac{-3\times1+2\times-2}{-3+2},\frac{-3\times2+2\times3}{-3+2},\frac{-3\times3+2\times4}{-3+2}\right)$

• $=\left(\frac{-7}{-1},\frac{0}{-1},\frac{-1}{-1}\right)=(7,0,1)$

BABY BULLET-Q

5. x+2y–3z–6=0 అనే సమీకరణమును తలము యొక్క అభిలంబరూపములోని మార్చుము.

Sol: తలం సమీకరణం $x+2y-3z-6=0 \Rightarrow x+2y-3z=6$

పై సమీకరణమును $\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$, తో భాగించగా

$$\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)x+\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)y+\left(\frac{-3}{\sqrt{14}}\right)z=\frac{6}{\sqrt{14}},$$ ఇదే తలం యొక్క అభిలంబరూపం.

---

6. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{\log(1+5x)}{x}$ ను గణించండి.

A: $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{\log(1+5x)}{x}=\underset{5x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{\log(1+5x)}{5x}\times 5=1\times 5=5$ $\left(\because \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{\log_e(1+x)}{x}=1\right)$

---

7. $f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{100}$ అయిన $f'(1)$ను కనుగొనుము.

A: $f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{100}$ $\Rightarrow f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 .... + 100\,x^{99}$.

$\Rightarrow f'(1) = 1+2+3....+100 = \dfrac{100\times 101}{2} = 5050$ $\left[\because \Sigma n=\dfrac{n(n+1)}{2}\right]$

---

8. $y = \sqrt{3}x - 4$ అనే సరళరేఖ Y-అక్షముతో చేసే కోణము కనుగొనుము.

Sol: దత్త సరళరేఖా రూపము $y=\sqrt{3}x-4$. ఇది $y = mx + c$ రూపంలో కలదు $\Rightarrow$ వాలు $m=\sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} = \tan 60^{o}$ $\Rightarrow$ X--అక్షముతో చేసే కోణము $\theta = 60^{o}$

$\therefore$ Y-అక్షముతో చేసే కోణము $90^{o}-60^{o} = 30^{o}$

BABY BULLET-Q

9. $y=f(x)=x^2+4$ అనే ప్రమేయమునకు $[-3,3]$ అనే అంతరంలో రోల్స్ సిద్ధాంతమును సరిచూడుము.

Sol : • దత్తాంశం నుండి $f(x) = x^2+4 \Rightarrow f'(x) = 2x$

• $f(x)$ అనునది (i) $[-3,3]$ మీద అవిచ్ఛిన్నము

• (ii) $(-3,3)$ లో అవకలనీయము

★(iii) $f(-3) = (-3)^2+4 = 9+4 = 13;$

$f(3) = 3^2+4 = 9+4 = 13$

• $\Rightarrow f(-3) = f(3)$

★కావున రోల్స్ సిద్ధాంతము నుండి, $f'(c)=0$

$\Rightarrow 2c=0 \Rightarrow c=0$

★ $\therefore$ $c=0\in(-3,3)$.

•కావున రోల్స్ సిద్ధాంతము సరిచూడబడినది.

---

10. $y = \cos x$ ప్రమేయానికి $x=60^\circ, \Delta x=1^\circ = 0.0174$ rad అయిన Δy, dy లను కనుగొనుము.

A: (i) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

$= \cos(60^\circ+1^\circ) - \cos 60^\circ = \cos 61^\circ - \cos 60^\circ$

$\cos 1^\circ = 0.4848$ అని మనకు తెలుసు.

$\therefore \Delta y = 0.4848 - \frac{1}{2} = 0.4848 - 0.5 = -0.0152$

(ii) $dy = f'(x)\Delta x = (-\sin x)\Delta x$

$= (-\sin 60^\circ)(1^\circ) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0.0174)$

$= (-0.8660)(0.0174) = -0.01506$

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-బి

11. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2-4) & \text{if } 0<x<2 \\ 0 & \text{if } x=2 \\ 2-8x^{-3} & \text{if } x>2 \end{cases}$ **అనే ప్రమేయం యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను 2 వద్ద సరిచూడండి.**

Sol: (a) x<2 అయినప్పుడు L.H.L= $\underset{x\to 2-}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x\to 2-}{\text{Lt}} \frac{1}{2}(x^2-4) = \frac{1}{2}(4-4) = 0$ ....(1)

(b) x>2 అయినప్పుడు

R.H.L= $\underset{x\to 2+}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x\to 2+}{\text{Lt}} (2-8x^{-3}) = \underset{x\to 2+}{\text{Lt}}\left(2-\frac{8}{x^3}\right) = 2-\frac{8}{8} = 2-1 = 1$.......(2)

(1) & (2) ల నుండి L.H.L≠R.H.L

కావున f(x) అనునది 2 వద్ద విచ్ఛిన్నము అని నిరూపించబడినది.

---

12. A(1,2), B(2,–3), C(–2,3) లు 3 బిందువులు. P అనే బిందువు $PA^2+PB^2=2PC^2$ అగునట్లుగా చలించుచున్నది అయిన P యొక్క బిందుపథ సమీకరణం 7x–7y+4=0 అని చూపుము.

***Sol*:** A=(1,2), B=(2,–3), C=(–2,3) లు దత్త బిందువులు. P(x,y) బిందుపథ బిందువు.

దత్త నియమం నుండి: $PA^2+PB^2=2PC^2$

$\Rightarrow [(x-1)^2+(y-2)^2]+[(x-2)^2+(y+3)^2] = 2[(x+2)^2+(y-3)^2]$

$\Rightarrow (x^2+1-2x)+(y^2+4-4y)+(x^2+4-4x)+(y^2+9+6y) = 2[(x^2+4+4x)+(y^2+9-6y)]$

$\Rightarrow \cancel{2x^2}+\cancel{2y^2}-6x+2y+18 = \cancel{2x^2}+\cancel{2y^2}+8x-12y+26$

$\Rightarrow -6x-8x+2y+12y+18-26=0$

$\Rightarrow -14x+14y-8=0 \Rightarrow \cancel{-2}(7x-7y+4)=0 \Rightarrow 7x-7y+4=0$

$\therefore$ P(x,y) బిందుపథం 7x–7y+4=0

BABY BULLET-Q

13. ఒక సరళరేఖ Q($\sqrt{3}$,2) గుండా పోతూ, X-అక్షం ధనదిశతో π/6 కోణం చేస్తోంది. ఆ సరళరేఖ $\sqrt{3}-4y+8=0$ రేఖను P వద్ద ఖండిస్తూంటే, PQ దూరం కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చిన కోణం θ= π/6 =30°

ఇచ్చిన బిందువు $Q(x_1,y_1)=(\sqrt{3},2)$ మరియు దూరం PQ=r అయిన

$P=(x_1+r\cos\theta, y_1+r\sin\theta) = (\sqrt{3}+r\cos30^o, 2+r\sin30^o)$

$$=\left(\sqrt{3}+r\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right),2+r\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$=P\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}r}{2},2+\frac{r}{2}\right)$$

కాని బిందువు P, $\sqrt{3}x-4y+8=0$ రేఖపై ఉండును.

$$\Rightarrow\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)-4\left(2+\frac{r}{2}\right)+8=0$$

$$\Rightarrow 3+\frac{3r}{2}\cancel{-8}-2r\cancel{+8}=0$$

$$\Rightarrow 2r-\frac{3r}{2}=3\Rightarrow\frac{4r-3r}{2}=3$$

$$\Rightarrow\frac{r}{2}=3\Rightarrow r=6$$

కావున PQ దూరం = r = 66

---

14. అక్షాలను α కోణంతో భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు xcosα+ysinα=p రూపాంతర సమీకరణం కనుక్కోండి.

Sol: • దత్త మూల సమీకరణం xcosα+ysinα=p........(1)

• భ్రమణ పరివర్తన కోణం θ=α, అయిన

★ $x=X\cos\theta-Y\sin\theta\Rightarrow x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha$

$y=Y\cos\theta+X\sin\theta\Rightarrow y=Y\cos\alpha+X\sin\alpha$

• (1) నుండి, రూపాంతర సమీకరణం

• $(X\cos\alpha-Y\sin\alpha)\cos\alpha+(Y\cos\alpha+X\sin\alpha)\sin\alpha=p$

• $\Rightarrow X\cos^2\alpha\cancel{-Y\sin\alpha\cos\alpha}\cancel{+Y\cos\alpha\sin\alpha}+X\sin^2\alpha=p$

• $\Rightarrow X(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=p\Rightarrow X(1)=p\Rightarrow X=p$

కావున కావలసిన రూపాంతర సమీకరణం X=p

BABY BULLET-Q

15. **$x=c\sec\theta, y=c\tan\theta$ మీద θ అనే బిందువు వద్ద గల స్పర్శరేఖ $y\sin\theta=x-c\cos\theta$. అని చూపుము.**

A: $\theta(c\sec\theta, c\tan\theta)$ అనే బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{dy}{d\theta}\right)}{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)}=\frac{\frac{d}{d\theta}(c\tan\theta)}{\frac{d}{d\theta}(c\sec\theta)}=\frac{\not{c}\,\not{\sec^2}\theta}{\not{c}\,\not{\sec}\theta\tan\theta}=\frac{\sec\theta}{\tan\theta}=\frac{\cot\theta}{\cos\theta}=\frac{\not{\cos}\theta}{\sin\theta(\not{\cos}\theta)}=\frac{1}{\sin\theta}$$

$\therefore \theta(c\sec\theta, c\tan\theta)$ వద్ద వాలు $\frac{1}{\sin\theta}$ గల స్పర్శరేఖ సమీకరణం $y-c\tan\theta=\frac{1}{\sin\theta}(x-c\sec\theta)$

$$\Rightarrow y-c\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\left(x-\frac{c}{\cos\theta}\right)\Rightarrow y\sin\theta-\frac{c\sin^2\theta}{\cos\theta}=x-\frac{c}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow y\sin\theta=x-\frac{c}{\cos\theta}+\frac{c\sin^2\theta}{\cos\theta}=x-c\left[\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}\right]\Rightarrow y\sin\theta=x-c\left[\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}\right]$$

$\Rightarrow y\sin\theta=x-c\cos\theta$. కావున నిరూపించబడినది.

---

16. **ప్రాథమిక సూత్రాన్ని ఉపయోగించి $\cos^2x$ యొక్క అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.**

Sol: $f(x)=\cos^2x$ అనుకుంటే $f(x+h)=\cos^2(x+h)$

ప్రాథమిక సూత్రం నుండి, $f'(x)=\underset{h\to0}{Lt}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\underset{h\to0}{Lt}\frac{\cos^2(x+h)-\cos^2x}{h}$

$$=\underset{h\to0}{Lt}\frac{-\sin[(x+h)+x)]\sin[(x+h)-x]}{h}\quad[\because \cos^2A-\cos^2B=-\sin(A+B)\sin(A-B)]$$

$$=\underset{h\to0}{Lt}\frac{-\sin(2x+h)\sin(h)}{h}=-\underset{h\to0}{Lt}\sin(2x+h).\underset{h\to0}{Lt}\frac{\sin(h)}{h}=-\sin(2x+0)(1)=-\sin 2x$$

BABY BULLET-Q

17. **తిరగేసిన శంకువు రూపంలో ఉన్న ఒక పాత్ర యొక్క ఎత్తు 12 సెం.మీ మరియు పైన వ్యాసార్థము 6 సెం.మీ.దానిని నీటితో 12 cm³/sec చొప్పున నింపుతూ ఉంటే నీటి మట్టము 8 సెం.మీల వద్ద నీటి మట్టము పెరుగుదల రేటును కనుగొనుము.**

Sol: t సెకన్లు వద్ద నీటి మట్టము ఎత్తు OC .

OC=h, CD=r మరియు ఘనపరిమాణం=V.

దత్తాంశం నుండి AB=6 cm, OA= 12 cm, $\frac{dV}{dt}=12\,cm^3/sec$

h=8 cm వద్ద నీటిమట్టము పెరిగే రేటు $\left(\frac{dh}{dt}\right)_{h=8}$ ను కనుగొనవలెను.

OAB మరియు OCD త్రిభుజాలు సరూపాలు.

$$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{OC}{OA}\Rightarrow\frac{r}{6}=\frac{h}{12}\Rightarrow r=\frac{h}{2} \quad ....(1)$$

శంకువు ఘనపరిమాణం $V=\frac{\pi r^2 h}{3}$ ....(2)

(1) నుండి $V=\frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2\times h=\frac{\pi h^3}{12}$ ....(3)

(3) ను t పరంగా అవకలనం చేయగా $\frac{dV}{dt}=\frac{\pi h^2}{4}.\frac{dh}{dt}$

$$\Rightarrow\frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}=\left(\frac{1}{\pi}\right)\frac{4}{8^2}(12)=\frac{3}{4\pi}cm/sec$$

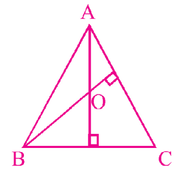
కావున నీటిమట్టం పెరిగే రేటు 3/4π cm/sec

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-సి

18. (5,–2), (–1,2), (1,4) శీర్షాలుగా గల త్రిభుజ లంబకేంద్రాన్ని కనుక్కోండి.

Sol:
- లంబకేంద్రం O(x,y) అనుకొనిన
- A=(5,–2), B=(–1,2), C= (1,4) శీర్షాలు



స్టెప్ 1: A (5,–2) గుండా పోయే ఉన్నతి సమీకరణం:

$\overline{BC}$ యొక్క వాలు m $=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{4-2}{1+1}=\dfrac{2}{2}=1$

దీనికి లంబంగా ఉండే రేఖవాలు $\dfrac{-1}{m}=\dfrac{-1}{1}=-1$

A(5,–2) గుండా పోతూ వాలు –1 గా కలిగిన ఉన్నతి సమీకరణం $y-y_1=\dfrac{-1}{m}(x-x_1)$

$\Rightarrow y+2=-1(x-5) \Rightarrow y+2=-x+5$

$\Rightarrow x+y-3=0$ .... (1)

స్టెప్ 2: B(–1,2) గుండా పోయే ఉన్నతి సమీకరణం

$\overline{AC}$ యొక్క వాలు

$m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{4-(-2)}{1-5}=\dfrac{6}{-4}=-\dfrac{3}{2}$

దీనికి లంబంగా ఉండే రేఖవాలు $\dfrac{-1}{m}=\dfrac{-1}{-\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$

B(–1,2) గుండా పోతూ వాలు $\dfrac{2}{3}$ గా కలిగిన ఉన్నతి సమీకరణం $y-y_1=\dfrac{-1}{m}(x-x_1)$

$\Rightarrow y-2=\dfrac{2}{3}(x+1) \Rightarrow 3y-6=2(x+1)$

$\Rightarrow 3y-6=2x+2 \Rightarrow 2x-3y+2+6=0$

$\Rightarrow 2x-3y+8=0$ .... (2)

స్టెప్ 3: (1), (2) లను సాధించగా O వచ్చును.

(1) $\Rightarrow x+y-3=0$

(2) $\Rightarrow 2x-3y+8=0$

$\therefore \dfrac{x}{1(8)-(-3)(-3)}=\dfrac{y}{(-3)(2)-(8)(1)}=\dfrac{1}{1(-3)-(2)(1)}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{8-9}=\dfrac{y}{-6-8}=\dfrac{1}{-3-2}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{-14}=\dfrac{1}{-5} \Rightarrow x=\dfrac{-1}{-5}=\dfrac{1}{5};\ y=\dfrac{-14}{-5}=\dfrac{14}{5}$

$\Rightarrow x=\dfrac{1}{5}$, $y=\dfrac{14}{5}$

$\therefore$ లంబకేంద్రం $O(x,y)=\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{14}{5}\right)$

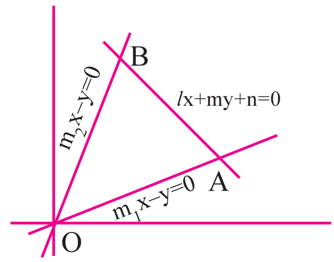
BABY BULLET-Q

19. $ax^2+2hxy+by^2=0$, $lx+my+n=0$ సరళరేఖలు ఏర్పరచే త్రిభుజం వైశాల్యం $\dfrac{n^2\sqrt{h^2-ab}}{|am^2-2hlm+bl^2|}$ అని నిరూపించండి

Sol: ★ $ax^2+2hxy+by^2 \equiv (m_1x-y)(m_2x-y)$ అనుకొందాం

- సరూప పదాల గుణకాలను పోల్చగా

★ $m_1+m_2=-\dfrac{2h}{b},\quad m_1m_2=\dfrac{a}{b}$ ....(1)



- $lx+my+n=0$, $m_1x-y=0$లను సాధించగా A వచ్చును.

$lx+my+n=0$

$m_1x-y+0=0$

$$\begin{matrix} x & y & 1 \\ m \quad n & l & m \\ -1 \quad 0 & m_1 & -1 \end{matrix}$$

★ $\Rightarrow \dfrac{x}{m(0)-(-1)(n)}=\dfrac{y}{n(m_1)-l(0)}=\dfrac{1}{l(-1)-mm_1}$

- $\Rightarrow \dfrac{x}{n}=\dfrac{y}{nm_1}=\dfrac{1}{-l-mm_1} \Rightarrow A=\left(\dfrac{-n}{l+mm_1},\dfrac{-nm_1}{l+mm_1}\right)$

★ అదే విధంగా $B=\left(\dfrac{-n}{l+mm_2},\dfrac{-nm_2}{l+mm_2}\right)$

★ $O(0,0), A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజ వైశాల్యం $\Delta=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

★ $\therefore$ ΔOAB వైశాల్యం $=\dfrac{1}{2}\left|\left(\dfrac{-n}{l+mm_1}\right)\left(\dfrac{-nm_2}{l+mm_2}\right)-\left(\dfrac{-n}{l+mm_2}\right)\left(\dfrac{-nm_1}{l+mm_1}\right)\right|$

- $=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{n^2m_2-n^2m_1}{(l+mm_1)(l+mm_2)}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{n^2(m_2-m_1)}{l^2+lmm_2+lmm_1+m^2m_1m_2}\right|$

★ $=\dfrac{1}{2}\dfrac{n^2\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}}{|l^2+lm(m_1+m_2)+m^2(m_1m_2)|}$ $\left[\because (a-b)=\sqrt{(a+b)^2-4ab}\right]$

★ $=\dfrac{1}{2}\dfrac{n^2\sqrt{\left(-\dfrac{2h}{b}\right)^2-4\left(\dfrac{a}{b}\right)}}{\left|l^2+lm\left(\dfrac{-2h}{b}\right)+m^2\left(\dfrac{a}{b}\right)\right|}=\dfrac{1}{2}\dfrac{n^2\sqrt{\dfrac{4h^2}{b^2}-4\dfrac{a}{b}}}{\left|l^2-\left(\dfrac{2hlm}{b}\right)+\left(\dfrac{am^2}{b}\right)\right|}=\dfrac{1}{2}\dfrac{n^2\sqrt{\dfrac{4h^2-4ab}{\cancel{b^2}}}}{\left|\dfrac{bl^2-2hlm+am^2}{\cancel{b}}\right|}$ [(1) నుండి]

★ $=\dfrac{1}{2}\dfrac{n^2\sqrt{4h^2-4ab}}{|am^2-2hlm+bl^2|}=\dfrac{1}{\cancel{2}}\dfrac{\cancel{2}\left(n^2\sqrt{h^2-ab}\right)}{|am^2-2hlm+bl^2|}=\dfrac{n^2\sqrt{h^2-ab}}{|am^2-2hlm+bl^2|}$ చ.యూనిట్లు.

BABY BULLET-Q

20. సమాంతరంగా లేని రెండు రేఖల దిక్ కొసైన్లు $l+m+n=0$, $l^2+m^2-n^2=0$ సమీకరణాలను తృప్తి పరిస్తే, ఆ రేఖల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: • దత్తాంశం నుండి $l+m+n=0$

$\Rightarrow l = -(m+n)$.....(1),

• $l^2+m^2-n^2=0$ ......(2)

• (1) & (2) లను సాధించగా

$[-(m+n)]^2 + m^2-n^2=0 \Rightarrow (m^2 + n^2 + 2mn)+m^2 - n^2 = 0$

$\Rightarrow 2m^2+2mn=0 \Rightarrow 2(m^2+mn)=0$

$\Rightarrow m^2+mn=0 \Rightarrow m(m+n)=0$

★ $\Rightarrow m=0$ (or) $m+n=0 \Rightarrow m=0$ (or) $m=-n$

•Case (i):

(1) లో $m=0$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$l = -(0+n) = -n \therefore l = -n$

$l : m : n = -n : 0 : n = -1 : 0 : 1$

★L_1 దిక్ సంఖ్యలు$=(a_1,b_1,c_1)= (-1,0,1)$ ......(3)

Case (ii):

(1) లో $m=-n$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$l = -(-n+n)=0 \therefore l=0$

$l : m : n = 0 : -n : n = 0 : -1 : 1$

L_2 యొక్క దిక్ సంఖ్యలు

$=(a_2,b_2,c_2)= (0,-1,1)$......(4)

•(3), (4) నుండి రేఖల మధ్య కోణం

★ $$\cos\theta = \frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}} = \frac{|(-1)(0)+(0)(-1)+1(1)|}{\sqrt{((-1)^2+0^2+1^2)(0^2+(-1)^2+1^2)}}$$

★ $$= \frac{1}{\sqrt{(2)(2)}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

కావున రేఖల మధ్య కోణం 60°.

BABY BULLET-Q

21. $x^{\log y}=\log x$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ను కనుగొనుము.

A : దత్తాంశం నుండి $x^{\log y}=\log x \Rightarrow \log(x^{\log y})=(\log y)(\log x) \Rightarrow \log y(\log x)=\log(\log x)$

x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$$\log y\left(\frac{1}{x}\right)+\log x\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{\log x}\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow\frac{\log y}{x}+\left(\frac{\log x}{y}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{x\log x}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\log x}{y}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\log x}-\frac{\log y}{x}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\log x}-\log y\right)$$

$$\Rightarrow\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\log x}\left(\frac{1-\log x\log y}{\log x}\right)=\frac{1-\log x\log y}{(\log x)^2}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left(\frac{1-\log x\log y}{(\log x)^2}\right)$$

BABY BULLET-Q

22. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ వక్రంపై ఏదైనా బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ నిరూపకాక్షాలను A,B బిందువులతో ఖండిస్తే, AB పొడవు స్థిరమని చూపండి.

Sol: ★ దత్త వక్రానికి పరామితీయ బిందువు $P(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ అయిన

- $x=a\cos^3\theta$ and $y=a\sin^3\theta$

★ $$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\frac{d}{d\theta}(a\sin^3\theta)}{\frac{d}{d\theta}(a\cos^3\theta)}=\frac{\cancel{a}.3\cancel{\sin^2}\theta(\cancel{\cos\theta})}{\cancel{a}.3\cancel{\cos^2}\theta(\cancel{-}\sin\theta)}=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

- $P(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు $m=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

★ $\therefore$ $P(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ వద్ద $-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ వాలుగా గల స్పర్శరేఖా సమీకరణం $y-y_1=m(x-x_1)$

★ $$\Rightarrow y-a\sin^3\theta=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(x-a\cos^3\theta)$$

- $$\Rightarrow \frac{y-a\sin^3\theta}{\sin\theta}=-\frac{(x-a\cos^3\theta)}{\cos\theta}$$

- $$\Rightarrow \frac{y}{\sin\theta}-\frac{a\sin^3\theta}{\sin\theta}=-\frac{x}{\cos\theta}+\frac{a\cos^3\theta}{\cos\theta}$$

- $$\Rightarrow \frac{x}{\cos\theta}+\frac{y}{\sin\theta}=a\cos^2\theta+a\sin^2\theta=a(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a(1)$$

- $$\Rightarrow \frac{x}{a\cos\theta}+\frac{y}{a\sin\theta}=1$$

★ $\therefore$ $A=(a\cos\theta, 0)$, $B=(0, a\sin\theta)$

- $$\therefore AB=\sqrt{(a\cos\theta-0)^2+(0-a\sin\theta)^2}$$
$$=\sqrt{a^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}=\sqrt{a^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\sqrt{a^2(1)}=a$$

$\therefore$ కావున AB పొడవు స్థిరము

BABY BULLET-Q

23. **$2x^2-2xy+3y^2+2x-y-1=0$ వక్రం $x+2y=k$ రేఖల ఖండన బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపే రేఖలు పరస్పరం లంబాలయితే k విలువ కనుక్కోండి.**

Sol: • దత్తరేఖ $x+2y=k \Rightarrow \frac{x+2y}{k}=1$ ...(1)

• దత్త వక్రం $2x^2-2xy+3y^2+2x-y-1=0$............(2)

• (1) & (2) ల నుండి సమఘాతీకరణ సమీకరణం

★ $2x^2-2xy+3y^2+2x(1)-y(1)-(1)^2=0$

★ $\Rightarrow 2x^2-2xy+3y^2+2x\left(\frac{x+2y}{k}\right)-y\left(\frac{x+2y}{k}\right)-\frac{(x+2y)^2}{k^2}=0$

★ $\Rightarrow \frac{k^2(2x^2-2xy+3y^2)+k(2x^2+4xy)-k(xy+2y^2)-(x^2+4y^2+4xy)}{k^2}=0$

★ $\Rightarrow k^2(2x^2-2xy+3y^2)+k(2x^2+4xy)-k(xy+2y^2)-(x^2+4y^2+4xy)=0$

★ $\Rightarrow x^2(2k^2+2k-1)+y^2(3k^2-2k-4)+xy(-2k^2+3k-4)=0$

• సరళరేఖాయుగ్మాలు పరస్పర లంబాలు అయితే

★ x^2 గుణకం + y^2 గుణకం = 0

• $\Rightarrow (2k^2 \cancel{+2k} -1)+(3k^2 \cancel{-2k} -4)=0 \Rightarrow 5k^2-5=0$

• $\Rightarrow \cancel{5}(k^2-1)=0 \Rightarrow k^2-1=0 \Rightarrow k^2=1 \Rightarrow k=\pm 1$

కావున, k విలువ ±1

BABY BULLET-Q

24. 20 యూనిట్ల నియమిత చుట్టుకొలత గల దీర్ఘ చతురస్రముతో ఏర్పడే గరిష్ట వైశాల్యమును కనుగొనుము.

Sol: • దీర్ఘచతురస్రము యొక్క పొడవు x మరియు వెడల్పు y అనుకొనుము.

1) దత్తాంశం నుండి దీర్ఘచతురస్రము యొక్క చుట్టుకొలత 20

$\Rightarrow 2(x+y)=20 \Rightarrow x+y=10$

$\Rightarrow y=10-x$ .....(1)

2) దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం $A=xy$

(1) నుండి, $A(x)=xy=x(10-x)=10x-x^2$ .....(2)

3) (2) ను x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$A'(x)=10-2x$.........(3)

4) గరిష్ట లేదా కనిష్ట విలువ వద్ద $A'(x)=0$ అగును.

కావున $10-2x=0 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=5$

(1) నుండి, $y=10-x=10-5=5$

5) ఇప్పుడు (3) ను x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

$A''(x)=-2$ ......(4)

6) $x=5$ వద్ద (4) నుండి $A''(5)<0$ కావున

7) $\therefore$ $x=5$ మరియు $y=5$ వద్ద వైశాల్యం A గరిష్టమగును

కావున గరిష్ట వైశాల్యం $A=xy=5(5)=25$ చ.యూనిట్లు

BABY BULLET-Q