JR MATHS-1A (TM)

Previous IPE
SOLVED PAPERS

MARCH -2019 (TS)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2019(TS)

Time : 3 Hours **గణితశాస్త్రం - 1A** Max.Marks : 75

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: **10 x 2 = 20**

1. If $f(x)=2x-1,\ g(x)=\frac{x+1}{2}\ \forall x\in R$ అయిన $(gof)(x)$ & $(fog)(x)$ ను కనుగొనుము.

2. $f(x)=\frac{1}{6x-x^2-5}$ వాస్తవ మూల్య ప్రమేయానికి ప్రదేశాన్ని కనుగొనుము.

3. $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&2&1\\1&2&3\end{bmatrix}$, అయిన 3B–2A ను కనుగొనుము. **4.** If $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&1&5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&1&-2\end{bmatrix}$ అయిన $(AB^T)^T$ ను కనుగొనుము.

5. $\overline{OA}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k},\ \overline{AB}=3\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k},\ \overline{BC}=\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k},\ \overline{CD}=2\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}$ అయిన $\overline{\mathbf{OD}}$ సదిశను కనుగొనుము.

6. $\bar{a}=2\bar{i}+4\bar{j}-5\bar{k}, \bar{b}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}, \bar{c}=\bar{j}+2\bar{k}$ అయిన $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ నకు వ్యతిరేక దిశలోనియూనిట్ సదిశ కనుగొనుము.

7. $(3,-2,1)$ బిందువు గుండా పోతూ $(4,7,-4)$ సదిశకు లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణం కనుగొనుము.

8. $\sin\theta=-\frac{1}{3}$ అయినθ 3వ పాదంలో ఉండదు. అప్పుడు $\cos\theta$ & $\cot\theta$ విలువ కనుగొనుము.

9. $\sin^2 82\frac{1}{2}^{o}-\sin^2 22\frac{1}{2}^{o}$ ను కనుగొనుము. **10.** $\cosh x=5/2$ అయిన (i) $\cosh(2x)$ మరియు (ii) $\sinh(2x)$ విలువలు కనుగొనుము.

సెక్షన్-బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. **5 x 4 = 20**

11. If $A=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\\3&-1&1\end{bmatrix}$ అయిన A^3-3A^2-A-3I విలువ కనుగొనుము (ఇక్కడ **I** ఒక 3 వ తరగతి యూనిట్ మాత్రిక)

12. $2\bar{a}+3\bar{b}-\bar{c},\ 3\bar{a}+4\bar{b}-2\bar{c}$ అనే బిందువులను కలిపే సరళరేఖ మరియు $\bar{a}-2\bar{b}+3\bar{c},\ \bar{a}-6\bar{b}+6\bar{c}$ అనే బిందువులను కలిపే సరళరేఖల ఖండన బిందువును కనుగొనుము.

13 $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}, \bar{b}=\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}, \bar{c}=\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$ అయిన $\bar{\mathbf{a}}\mathbf{x}(\bar{\mathbf{b}}\mathbf{x}\bar{\mathbf{c}})$ ను గణించుము మరియు అది $\bar{\mathbf{a}}$ కు లంబంగా ఉంటుందని సరిచూడుము. **14.** $\left(1+\cos\frac{\pi}{10}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{10}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{10}\right)\left(1+\cos\frac{9\pi}{10}\right)=\frac{1}{16}$ అని చూపండి.

15. $a\cos2\theta+b\sin2\theta=c$ నకు θ_1,θ_2 లు సాధనాలు $\tan\theta_1\neq\tan\theta_2$, $a+c\neq0$ అయితే (i)$\tan\theta_1+\tan\theta_2$ (ii)$\tan\theta_1.\tan\theta_2$ విలువలు కనుక్కోండి

16. $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}=\cos^{-1}\frac{36}{85}$ అని నిరూపించండి. **17.** ΔABCలో $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ అయితే C=60° అని చూపండి.

సెక్షన్-సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. **5 x 7 = 35**

18. $f:A\rightarrow B$ ద్విగుణ ప్రమేయం, I_A, I_B లు A, B ల మీద తత్సమ ప్రమేయాలైతే (i) $fof^{-1}=I_B$ (ii) $f^{-1}of=I_A$ అని నిరూపించండి.

19. గణితానుగమన పద్ధతిని ఉపయోగించి ప్రతి $n\in N$ కు $\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)$..........$\left(1+\frac{2n+1}{n^2}\right)=(n+1)^2$ రుజువు చేయండి.

20. $\begin{vmatrix}a+b+2c&a&b\\c&b+c+2a&b\\c&a&c+a+2b\end{vmatrix}=2(a+b+c)^3$ అని నిరూపించండి.

21. $3x+4y+5z=18,\ 2x-y+8z=13,\ 5x-2y+7z=20$ను మాత్రిక విలోమపద్ధతిన సాధించుము.

22. A=(1,–2,–1), B=(4,0,–3), C=(1,2,–1), D=(2,–4,–5) అయిన $\overline{\mathbf{AB}}, \overline{\mathbf{CD}}$ ల మధ్య కనిష్ట దూరం కనుగొనుము.

23. A,B,C లు త్రిభుజం యొక్క కోణాలైన $\cos A+\cos B-\cos C=-1+4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$ అని చూపండి.

24. $\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{\Delta^2}$ అని చూపండి.

BABY BULLET-Q

IPE TS MARCH-2019
SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. $x \in R,\ f(x)=2x-1,\ g(x)=\frac{x+1}{2}$ అయితే (i) (gof)(x) (ii) (fog)(x)లను కనుక్కోండి.

A: (i) $(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x-1) = \frac{(2x-1)+1}{2} = \frac{2x}{2} = x$

(ii) $(fog)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{x+1}{2}\right) = \cancel{2}\left(\frac{x+1}{\cancel{2}}\right) - 1 = x+1-1 = x$

---

2. $f(x) = \frac{1}{6x-x^2-5}$ యొక్క ప్రదేశము కనుగొనుము.

A: దత్తాంశ f(x) నిర్వచితమైతే $6x-x^2-5 \neq 0$

$\Rightarrow -(x^2-6x+5)\neq 0 \Rightarrow -(x-1)(x-5)\neq 0 \Rightarrow x \neq 1,5$

$\therefore$ ప్రదేశం $R-\{1,5\}$

---

3. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ అయిన 3B–2A ను కనుగొనుము.

A: దత్తాంశం నుండి $B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}; A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$

$$\therefore 3B-2A = 3\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9 & 6 & 3\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 6 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}9-2 & 6-4 & 3-6\\ 3-6 & 6-4 & 9-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 2 & -3\\ -3 & 2 & 7\end{bmatrix}$$

BABY BULLET-Q

4. $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$ **అయిన $(AB')'$ ను కనుగొనుము.**

A: $AB'=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 5\end{bmatrix}_{2\times3}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}_{3\times2}=\begin{bmatrix}2(-1)+0(1)+1(0) & 2(0)+0(1)+1(-2)\\ -1(-1)+1(1)+5(0) & -1(0)+1(1)+5(-2)\end{bmatrix}_{2\times2}$

$=\begin{bmatrix}-2+0+0 & 0+0-2\\ 1+1+0 & 0+1-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 2 & -9\end{bmatrix}$

$\therefore (AB')'=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ -2 & -9\end{bmatrix}$

---

5. $\overline{OA}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k},\ \overline{AB}=3\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k},\ \overline{BC}=\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k},\ \overline{CD}=2\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}$ **అయిన $\overline{OD}$ సదిశను కనుగొనుము.**

A: $\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=(\overline{OA}+\overline{AB})+\overline{BC}+\overline{CD}=(\overline{OB}+\overline{BC})+\overline{CD}=\overline{OC}+\overline{CD}=\overline{OD}$ అనుకొనుము.

కావున $\overline{OD}=\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k})+(3\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k})+(\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k})+(2\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k})$

$=7\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$

---

6. $\bar{a}=2\bar{i}+4\bar{j}-5\bar{k}, \bar{b}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}, \bar{c}=\bar{j}+2\bar{k}$. **అయిన $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ నకు వ్యతిరేక దిశలోని యూనిట్ సదిశ కనుగొనుము.**

Sol: దత్తాంశం నుండి $\bar{a}=2\bar{i}+4\bar{j}-5\bar{k}, \bar{b}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}, \bar{c}=0\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$ అయిన

$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=(2\bar{i}+4\bar{j}-5\bar{k})+(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k})+(0\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k})=3\bar{i}+6\bar{j}-2\bar{k}$

$\Rightarrow|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|=\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}=\sqrt{9+36+4}=\sqrt{49}=7$

$\therefore$ కావలసిన యూనిట్ సదిశ $=\dfrac{-(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})}{|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|}=\dfrac{-(3\bar{i}+6\bar{j}-2\bar{k})}{7}$

---

7. **3,–2,1) బిందువు గుండాపోతూ (4,7,–4) అనే సదిశకు లంబముగా ఉండే తలసమీకరణం కనుగొనుము.**

Sol: $\bar{a}=3\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$ బిందువు గుండాపోతూ $\bar{n}=4\bar{i}+7\bar{j}-4\bar{k}$ సదిశలకు లంబముగా ఉండే తలానికి సమీకరణము $\bar{r}.\bar{n}=\bar{a}.\bar{n}$

$\Rightarrow \bar{r}.(4\bar{i}+7\bar{j}-4\bar{k})=(3\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}).(4\bar{i}+7\bar{j}-4\bar{k})=12-14-4=-6$

$\Rightarrow \bar{r}.(4\bar{i}+7\bar{j}-4\bar{k})=-6 \quad \Rightarrow \bar{r}.(-4\bar{i}-7\bar{j}+4\bar{k})=6$

BABY BULLET-Q

8. $\sin\theta = \frac{-1}{3}$ అయినθ 3వ పాదంలో ఉండదు. అప్పుడు cosθ విలువ కనుగొనుము.

Sol: దత్తాంశం నుండి sinθ ఋణాత్మకం మరియు Q_3 పాదంలో θ లేదు $\therefore \theta \in Q_4$

Q_4 పాదంలో cosθ ధనాత్మకం $\cos\theta = +\sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

---

9. $\sin^2 82\frac{1}{2}^\circ - \sin^2 22\frac{1}{2}^\circ$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

A: $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$ అని మనకు తెలుసు

$$\therefore \sin^2 82\frac{1}{2}^\circ - \sin^2 22\frac{1}{2}^\circ = \sin(82\frac{1}{2}^\circ + 22\frac{1}{2}^\circ).\sin(82\frac{1}{2}^\circ - 22\frac{1}{2}^\circ)$$

$$= \sin(105^\circ).\sin 60^\circ = \sin(60^\circ+45^\circ).\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{2}}$$

---

10. **cosh x=5/2 అయిన cosh(2x), sinh(2x) లను కనుగొనుము.**

A: దత్తాంశం నుండి coshx=5/2, then $\sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1}$

$$= \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{25}{4} - 1} = \sqrt{\frac{25-4}{4}} = \sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

(i) $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{21}{4} = \frac{46}{4} = \frac{23}{2}$

(ii) $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x = 2 \times \frac{\sqrt{21}}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{5\sqrt{21}}{2}$

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-బి

11. $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$ అయిన A^3-3A^2-A-3I విలువ కనుగొనుము

A : $A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0+3 & -2-2-1 & 1+2+1\\ 0+0-3 & 0+1+1 & 0-1-1\\ 3-0+3 & -6-1-1 & 3+1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -5 & 4\\ -3 & 2 & -2\\ 6 & -8 & 5\end{bmatrix}$

$$A^3=A^2.A=\begin{bmatrix}4 & -5 & 4\\ -3 & 2 & -2\\ 6 & -8 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+0+12 & -8-5-4 & 4+5+4\\ -3+0-6 & 6+2+2 & -3-2-2\\ 6+0+15 & -12-8-5 & 6+8+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & -17 & 13\\ -9 & 10 & -7\\ 21 & -25 & 19\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^3-3A^2-A-3I=\begin{bmatrix}16 & -17 & 13\\ -9 & 10 & -7\\ 21 & -25 & 19\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}4 & -5 & 4\\ -3 & 2 & -2\\ 6 & -8 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}16 & -17 & 13\\ -9 & 10 & -7\\ 21 & -25 & 19\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-12 & 15 & -12\\ 9 & -6 & 6\\ -18 & 24 & -15\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}16-12-1-3 & -17+15+2-0 & 13-12-1-0\\ -9+9+0-0 & 10-6-1-3 & -7+6+1+0\\ 21-18-3+0 & -25+24+1+0 & 19-15-1-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=O$$

BABY BULLET-Q

12. **$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ లు అతలీయములైన $2\bar{a}+3\bar{b}-\bar{c}, \bar{a}-2\bar{b}+3\bar{c}, 3\bar{a}+4\bar{b}-2\bar{c}, \bar{a}-6\bar{b}+6\bar{c}$ లు స్థాన సదిశలుగా గల బిందువులు సతలీయములని చూపండి.**

Sol: 'O' ఆది బిందువు అయిన $\overline{OP} = 2\bar{a}+3\bar{b}-\bar{c}, \overline{OQ} = \bar{a}-2\bar{b}+3\bar{c}$,

$\overline{OR} = 3\bar{a}+4\bar{b}-2\bar{c}, \overline{OS} = \bar{a}-6\bar{b}+6\bar{c}$ అనుకొనుము.

$\overline{PQ} = \overline{OQ}-\overline{OP} = (\bar{a}-2\bar{b}+3\bar{c})-(2\bar{a}+3\bar{b}-\bar{c}) = -\bar{a}-5\bar{b}+4\bar{c}$

$\overline{PR} = \overline{OR}-\overline{OP} = (3\bar{a}+4\bar{b}-2\bar{c})-(2\bar{a}+3\bar{b}-\bar{c}) = \bar{a}+\bar{b}-\bar{c}$

$\overline{PS} = \overline{OS}-\overline{OP} = (\bar{a}-6\bar{b}+6\bar{c})-(2\bar{a}+3\bar{b}-\bar{c}) = -\bar{a}-9\bar{b}+7\bar{c}$

$$[\overline{PQ}\ \overline{PR}\ \overline{PS}] = \begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -9 & 7 \end{vmatrix} [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$$

$=[-1(7-9)+5(7-1)+4(-9+1)][\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$

$=[-1(-2)+5(6)+4(-8)]\ [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$

$=[2+30-32][\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$

$=0\times[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]=0$

కావున $\overline{PQ}, \overline{PR}, \overline{PS}$ అనే మూడు సదిశలు సతలీయములు

కావున P,Q,R,S అనే నాలుగు బిందువులు సతలీయములని నిరూపించబడినది.

---

13. **$\bar{a} = 2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}, \bar{b} = \bar{i}+\bar{j}-\bar{k}, \bar{c} = \bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$, అయిన $\bar{a}x(\bar{b}x\bar{c})$ ను గణించుము మరియు అది $\bar{a}$ కు లంబంగా ఉంటుందని సరిచూడుము.**

Sol: దత్తాంశము నుండి $\bar{a} = 2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k}, \bar{b} = \bar{i}+\bar{j}-\bar{k}, \bar{c} = \bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$

$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$, ను కనుగొనుటకు , మొదటగా బ్రాకెట్ పదము $\bar{b}\times\bar{c}$ ను కనుగొనవలెను

$$\bar{b}\,x\,\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i}(1-1)-\bar{j}(1+1)+\bar{k}(-1-1) = -2\bar{j}-2\bar{k}$$

$$\therefore \bar{a}\,x\,(\bar{b}\,x\,\bar{c}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \bar{i}(-6+8)-\bar{j}(-4-0)+\bar{k}(-4-0) = 2\bar{i}+4\bar{j}-4\bar{k}$$

ఇప్పుడు $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}).\bar{a} = (2\bar{i}+4\bar{j}-4\bar{k}).(2\bar{i}+3\bar{j}+4\bar{k})$

$= 2(2) + 4(3) - 4(4) = 4 + 12 - 16=0$

సదిశా లబ్దం సున్నా కావున $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ నకు $\bar{a}$ లంబంగా ఉన్నది.

BABY BULLET-Q

14. $\left(1+\cos\frac{\pi}{10}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{10}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{10}\right)\left(1+\cos\frac{9\pi}{10}\right)=\frac{1}{16}$ **అని నిరూపించండి.**

A: $\cos\frac{\pi}{10}=\cos\frac{180^\circ}{10}=\cos18^\circ;\ \cos\frac{3\pi}{10}=\cos\frac{3(180^\circ)}{10}=\cos54^\circ$

$\cos\frac{7\pi}{10}=\cos\frac{7(180^\circ)}{10}=\cos126^\circ=\cos(180^\circ-54^\circ)=-\cos54^\circ$

$\cos\frac{9\pi}{10}=\cos\frac{9(180^\circ)}{10}=\cos162^\circ=\cos(180^\circ-18^\circ)=-\cos18^\circ$

$\therefore$ L.H.S= $(1+\cos18^\circ)(1+\cos54^\circ)(1-\cos54^\circ)(1-\cos18^\circ)=(1-\cos^2 18^\circ)(1-\cos^2 54^\circ)$

$=\sin^2 18^\circ\sin^2 54^\circ=\left(\frac{\sqrt5-1}{4}\right)^2\left(\frac{\sqrt5+1}{4}\right)^2=\left(\frac{5-1}{16}\right)^2=\left(\frac{\cancel{4}}{\cancel{16}}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}=$ R.H.S

---

15. **$a\cos2\theta+b\sin2\theta=c$ అనే సమీకరణం యొక్క మూలాలు θ_1,θ_2 లు అయిన**

(i) $\tan\theta_1+\tan\theta_2=\frac{2b}{c+a}$, (ii) $\tan\theta_1.\tan\theta_2=\frac{c-a}{c+a}$ అని చూపండి మరియు

దీని నుండి $\tan(\theta_1+\theta_2)=b/a$ అని చూపండి.

BABY BULLET-Q

Sol: దత్త సమీకరణం $a\cos2\theta+b\sin2\theta=c$

$\Rightarrow a\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)+b\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)=c$

అడ్డ గుణకారం చేయగా, $a(1-\tan^2\theta)+b(2\tan\theta)=c(1+\tan^2\theta)$

$\Rightarrow a-a\tan^2\theta+2b\tan\theta=c+c\tan^2\theta\quad\Rightarrow c\tan^2\theta+a\tan^2\theta-2b\tan\theta+(c-a)=0$

$\Rightarrow (c+a)\tan^2\theta-2b\tan\theta+(c-a)=0$

$\tan\theta_1,\tan\theta_2$ లు పై వర్గ బహుపది మూలాలు

$\therefore \tan\theta_1+\tan\theta_2=\frac{2b}{c+a}$ [$\because$ $ax^2+bx+c=0$ యొక్క మూలాల మొత్తం $-\frac{b}{a}$]

$\tan\theta_1.\tan\theta_2=\frac{c-a}{c+a}$, [$\because$ $ax^2+bx+c=0$ మూలాల లబ్ధం $\frac{c}{a}$]

$\therefore \tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{\frac{2b}{c+a}}{1-\left(\frac{c-a}{c+a}\right)}=\frac{\frac{2b}{\cancel{c+a}}}{\frac{\cancel{c}+a-\cancel{c}+a}{\cancel{c+a}}}=\frac{\cancel{2}b}{\cancel{2}a}=\frac{b}{a}$

16. $\mathbf{Sin^{-1}\frac{3}{5}+Sin^{-1}\frac{8}{17}=Cos^{-1}\frac{36}{85}}$ **అని నిరూపించండి.**

A: $\text{Sin}^{-1}\frac{3}{5}=\alpha$ మరియు $\text{Cos}^{-1}\frac{12}{13}=\beta$

నిరూపిత అంశం: $\alpha+\beta=\text{Cos}^{-1}\frac{36}{85}\Rightarrow\cos(\alpha+\beta)=\frac{36}{85}$

$\text{Sin}^{-1}\frac{3}{5}=\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{4}{5}$

$\text{Sin}^{-1}\frac{8}{17}=\beta\Rightarrow\sin\beta=\frac{8}{17}\Rightarrow\cos\beta=\frac{15}{17}$

$\therefore\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\times\frac{15}{17}-\frac{3}{5}\times\frac{8}{17}=\frac{60-24}{85}=\frac{36}{85}$

కావున నిరూపించబడినది.

---

17. **ΔABC లో** $\mathbf{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}}$ **అయిన C=60°అని చూపండి.**

A: దత్తాంశం నుండి $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$

$\Rightarrow\frac{b+c+a+c}{(a+c)(b+c)}=\frac{3}{a+b+c}\Rightarrow\frac{(a+b+c)+c}{(a+c)(b+c)}=\frac{3}{(a+b+c)}$

$\Rightarrow(a+b+c)^2+c(a+b+c)=3(a+c)(b+c)$

$\Rightarrow(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)+ca+cb+c^2=3ab+3ac+3cb+3c^2$

$\Rightarrow a^2+b^2-c^2=ab\Rightarrow\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}=1$

$\Rightarrow\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos C=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ\Rightarrow C=60^\circ$

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-సి

18. **$f:A\rightarrow B$ ద్విగుణ ప్రమేయం అయిన (i) $fof^{-1}=I_B$ (ii) $f^{-1}of=I_A$ అని నిరూపించండి.**

Sol: (i) $f\,of^{-1}=I_B$ అని చూపుట:

Part-1: $f:A\rightarrow B$ ద్విగుణ ప్రమేయం. కావున $f^{-1}: B\rightarrow A$ కూడా ద్విగుణ ప్రమేయం అగును.

$\therefore\ fof^{-1}: B\rightarrow B$

$I_B: B\rightarrow B$ అని మనకు తెలుసు

కావున fof^{-1} మరియు I_B అనే ప్రమేయాలకు ఒకే ప్రదేశం B కలదు.

Part-2: $b\in B$ నకు $(fof^{-1})(b)=f\,[f^{-1}(b)]$

$=f(a)$ [$\because f:A\rightarrow B$ ద్విగుణ ప్రమేయం$\Rightarrow f(a)=b \Rightarrow f^{-1}(b)=a$]

$=b=I_B(b)$ [$\because b\in B$ నకు $I_B(b)=b$]

కావున $fof^{-1}=I_B$అని నిరూపించబడినది.

(ii) $f^{-1}of=I_A$ అని చూపుట:

Part-1: $f:A\rightarrow B$ ద్విగుణ ప్రమేయం కావున $f^{-1}:B\rightarrow A$ కూడా ద్విగుణ ప్రమేయం అగును.

$\therefore\ f^{-1}of : A\rightarrow A$

$I_A: A\rightarrow A$ అని మనకు తెలుసు.

$f^{-1}of$ మరియు I_A అనే ప్రమేయాలకు ఒకే ప్రదేశం A కలదు.

Part-2: $a\in A$ నకు $(f^{-1}of)(a)=f^{-1}[f(a)]$

$= f^{-1}(b)= a$ [$\because f:A\rightarrow B$ ద్విగుణ ప్రమేయం$\Rightarrow f(a)=b\Rightarrow f^{-1}(b)=a$]

$= I_A(a)$ [$\because a\in A$ నకు $I_A(a)=a$]

$f^{-1}of=I_A$ అని నిరూపించబడినది.

BABY BULLET-Q

19. పరిమిత గణితానుగమన సూత్రంను ఉపయోగించి ప్రతి $n \in N$ కు

$$\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\ldots\ldots\ldots\left(1+\frac{2n+1}{n^2}\right)=(n+1)^2$$ అని రుజువు చేయండి.

A: $S(n): \left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\ldots\ldots\ldots\left(1+\frac{2n+1}{n^2}\right)=(n+1)^2$

Step 1: S(1) యొక్క L.H.S = $1+\frac{3}{1}=4$, S(1) యొక్క RH.S $=(1+1)^2=4$

$\therefore$ LHS =RHS. కావున S(1) సత్యము

Step-2: $k \in N$ నకు S(k) సత్యము అనుకొనుము.

$$S(k)=\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\ldots\ldots\ldots\left(1+\frac{2k+1}{k^2}\right)=(k+1)^2 \ldots\ldots\ldots(1)$$

Step-3: $k \in N$ నకు S(k+1) సత్యము అనుకొనుము.

(1) నకు ఇరువైపులా $1+\frac{2k+3}{(k+1)^2}$ అనే పదాన్ని కలుపగా

$$S(k+1) \text{ యొక్క L.H.S} = \left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\ldots\ldots\ldots\left(1+\frac{2k+1}{k^2}\right)\left(1+\frac{2k+3}{(k+1)^2}\right)$$

$$=(k+1)^2\left(1+\frac{2k+3}{(k+1)^2}\right) \text{ From(1)}$$

$$=(k+1)^2\left(\frac{(k+1)^2+2k+3}{(k+1)^2}\right)=(k+1)^2+2k+3=k^2+2k+1+2k+3$$

$$=k^2+4k+4=(k+2)^2$$

= S(k+1) యొక్క R.H.S

$\therefore$ S(k+1) యొక్క L.H.S = S(k+1) యొక్క R.H.S. కావున, S(k) సత్యమైన S(k+1) కూడా సత్యమగును.

కావున పరిమిత గణితానుగమన సిద్ధాంతం నుంచి ప్రతి $n \in N$ కి దత్త ప్రవచనం S(n) సత్యం

BABY BULLET-Q

20. $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$ అని చూపండి.

A: $$\text{L.H.S} = \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2a+2b+2c & a & b \\ 2a+2b+2c & b+c+2a & b \\ 2a+2b+2c & a & c+a+2b \end{vmatrix} (\because C_1 \to C_1 + C_2 + C_3)$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix} (\because R_2 \to R_2 - R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1)$$

$$= 2(a+b+c)1[(a+b+c)^2 - 0] = 2(a+b+c)^3 = \text{R.H.S}$$

BABY BULLET-Q

21. **3x+4y+5z=18, 2x–y+8z=13, 5x–2y+7z=20 సమీకరణాలను మాత్రికా విలోమ పద్ధతిన సాధించండి.**

Sol : ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థ యొక్క మాత్రికా సమీకరణ రూపం: $AX = D$

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 8\\ 5 & -2 & 7\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}18\\ 13\\ 20\end{bmatrix}$$

$\therefore$ AX=D యొక్క సాధన $X=A^{-1}D$ అగును.

ఇప్పుడు A^{-1} కనుగొందాం.

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 8\\ 5 & -2 & 7\end{vmatrix}=3(-7+16)-4(14-40)+5(-4+5)=3(9)-4(-26)+5(1)=27+104+5=136$$

$$\text{Adj}A=\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 8\\ -2 & 7\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 8\\ 5 & 7\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & -2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}4 & 5\\ -2 & 7\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 5\\ 5 & 7\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & -2\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}4 & 5\\ -1 & 8\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 8\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-7+16 & -(14-40) & -4+5\\ -(28+10) & (21-25) & -(-6-20)\\ (32+5) & -(24-10) & (-3-8)\end{bmatrix}^T=\begin{vmatrix}9 & 26 & 1\\ -38 & -4 & 26\\ 37 & -14 & -11\end{vmatrix}^T$$

$$\Rightarrow \text{Adj }A=\begin{bmatrix}9 & -38 & 37\\ 26 & -4 & -14\\ 1 & 26 & -11\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{\text{Adj }A}{|A|}=\frac{1}{136}\begin{bmatrix}9 & -38 & 37\\ 26 & -4 & -14\\ 1 & 26 & -11\end{bmatrix}$$

$$\therefore X=A^{-1}D=\frac{1}{136}\begin{bmatrix}9 & -38 & 37\\ 26 & -4 & -14\\ 1 & 26 & -11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}18\\ 13\\ 20\end{bmatrix}=\frac{1}{136}\begin{bmatrix}9\times18-38\times13+37\times20\\ 26\times18-4\times13-14\times20\\ 1\times18+26\times13-11\times20\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{136}\begin{bmatrix}162-494+740\\ 468-52-280\\ 18+338-220\end{bmatrix}=\frac{1}{136}\begin{bmatrix}408\\ 136\\ 136\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{408}{136}\\ \frac{136}{136}\\ \frac{136}{136}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$\therefore$ సాధన x=3, y=1, z=1

BABY BULLET-Q

22. A=(1,–2,–1),B=(4,0,–3), C=(1,2,–1), D=(2,–4,–5) అయిన $\overline{AB}, \overline{CD}$ మధ్య దూరం కనుక్కోండి.

Sol: దత్త బిందువులు A=(1,–2,–1),B=(4,0,–3), C=(1,2,–1), D=(2,–4,–5)

$\overline{OA} = \bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}, \overline{OB} = 4\bar{i} - 3\bar{k}, \overline{OC} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}, \overline{OD} = 2\bar{i} - 4\bar{j} - 5\bar{k}$

(i) $\overline{AB}$ అనే సరళరేఖ సదిశా సమీకరణం $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}, t \in R$, ఇక్కడ

$\bar{a} = \overline{OA} = \bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}$ & $\bar{b} = \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (4\bar{i} - 3\bar{k}) - (\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}) = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$

(ii) $\overline{CD}$ అనే సరళరేఖ సదిశా సమీకరణం $\bar{r} = \bar{c} + s\bar{d}, s \in R$, ఇక్కడ

$\bar{c} = \overline{OC} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$ and $\bar{d} = \overline{CD} = \overline{OD} - \overline{OC} = (2\bar{i} - 4\bar{j} - 5\bar{k}) - (\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}) = \bar{i} - 6\bar{j} - 4\bar{k}$

కావున $\bar{a} - \bar{c} = (\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}) - (\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}) = -4\bar{j}$

$$\bar{b} \times \bar{d} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -6 & -4 \end{vmatrix} = \bar{i}(-8-12) - \bar{j}(-12+2) + \bar{k}(-18-2) = -20\bar{i} + 10\bar{j} - 20\bar{k}$$

ఇప్పుడు, $(\bar{a} - \bar{c}).(\bar{b} \times \bar{d}) = (-4\bar{j}).(-20\bar{i} + 10\bar{j} - 20\bar{k}) = -4(10) = -40$

మరియు $|\bar{b} \times \bar{d}| = \sqrt{(-20)^2 + 10^2 + (-20)^2} = \sqrt{400 + 100 + 400} = \sqrt{900} = 30$

$\therefore$ కనిష్ట దూరం (SD) $= \dfrac{|(\bar{a} - \bar{c}).(\bar{b} \times \bar{d})|}{|\bar{b} \times \bar{d}|} = \dfrac{|-40|}{30} = \dfrac{\cancel{40}}{\cancel{30}} = \dfrac{4}{3}$ యూనిట్లు

---

23. A, B, C లు త్రిభుజ కోణాలైన $\cos A + \cos B - \cos C = -1 + 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$ అని నిరూపించండి.

Sol: A,B,C లు త్రిభుజ కోణాలైన A+B+C=180° $\Rightarrow \dfrac{A+B+C}{2} = 90^o \Rightarrow \dfrac{A+B}{2} = 90^o - \dfrac{C}{2}$

L.H.S $= (\cos A + \cos B) - \cos C = 2\cos\dfrac{A+B}{2}.\cos\dfrac{A-B}{2} - \cos C$ [cosC+cosD సూత్రం నుండి]

$= 2\cos\left(90^o - \dfrac{C}{2}\right).\cos\dfrac{A-B}{2} - \cos C = 2\sin\dfrac{C}{2}.\cos\dfrac{A-B}{2} - \left(1 - 2\sin^2\dfrac{C}{2}\right)$ $\left[\because \cos\theta = 1 - 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right]$

$= -1 + 2\sin\dfrac{C}{2}.\cos\dfrac{A-B}{2} + 2\sin^2\dfrac{C}{2} = -1 + 2\sin\dfrac{C}{2}\left(\cos\dfrac{A-B}{2} + \sin\dfrac{C}{2}\right)$

$= -1 + 2\sin\dfrac{C}{2}\left[\cos\dfrac{A-B}{2} + \sin\left(90^o - \dfrac{A+B}{2}\right)\right] = -1 + 2\sin\dfrac{C}{2}\left(\cos\dfrac{A-B}{2} + \cos\dfrac{A+B}{2}\right)$

$= -1 + 2\sin\dfrac{C}{2}\left(2\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}\right)$ $[\because \cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A\cos B]$

$= -1 + 4\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} = R.H.S$

BABY BULLET-Q

24. $\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{\Delta^2}$ అని చూపండి.

A: $$\text{L.H.S}=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\left(\frac{s}{\Delta}\right)^2+\left(\frac{s-a}{\Delta}\right)^2+\left(\frac{s-b}{\Delta}\right)^2+\left(\frac{s-c}{\Delta}\right)^2$$

$$=\frac{1}{\Delta^2}\left(s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2\right)=\frac{1}{\Delta^2}(s^2+(s^2-2as+a^2)+(s^2-2bs+b^2)+(s^2-2sc+c^2))$$

$$=\frac{1}{\Delta^2}(4s^2-2s(a+b+c)+a^2+b^2+c^2)=\frac{1}{\Delta^2}(4s^2-2s(2s)+a^2+b^2+c^2)$$

$$=\frac{(a^2+b^2+c^2)}{\Delta^2}=\text{R.H.S}$$

BABY BULLET-Q