

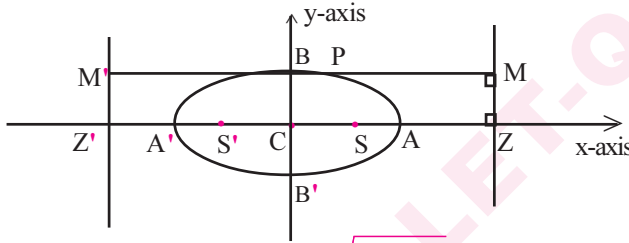
4. దీర్ఘవృత్తం

IPE : 2SAQ = 4 + 4 = 8 Marks

ముఖ్యమైన సూత్రాలు, నిర్వచనాలు

నిర్వచనం: ఒక తలములోని ఒక స్థిరబిందువుకు మరియు ఒక స్థిర సరళరేఖకు దూరాల నిష్పత్తి స్థిరము e , $0 < e < 1$ అయ్యే విధంగా ఉండే బిందువు యొక్క బిందుపథాన్ని దీర్ఘ వృత్తం అంటారు.

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ దీర్ఘవృత్తం దృష్ట్యా ముఖ్యాంశాలు:



1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ దీర్ఘవృత్తం యొక్క ఉత్కేంద్రీయత $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ఇక్కడ $a^2 e^2 = a^2 - b^2$

2) దీర్ఘవృత్తం యొక్క నాభులు $S = (ae, 0)$, $S' = (-ae, 0)$ i.e., $(\pm \sqrt{a^2 - b^2}, 0)$

3) నియతరేఖ లంబ పాదాలు $Z = \left(\frac{a}{e}, 0\right)$, $Z' = \left(-\frac{a}{e}, 0\right)$ మరియు నియతరేఖల సమీకరణం $x = \pm \frac{a}{e}$

4.1) AA' ను దీర్ఘాక్షం అని, BB' ను ప్రాస్వాక్షం అని అంటారు.

4.2) దీర్ఘాక్షం పొడవు $2a$, దీర్ఘాక్షం సమీకరణం $y=0$; ప్రాస్వాక్షం పొడవు $2b$, ప్రాస్వాక్షం సమీకరణం $x=0$

5.1) దీర్ఘవృత్తం యొక్క శీర్షాలు $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$ మరియు $B(0, b)$, $B'(0, -b)$ లు ప్రాస్వాక్షంపై గల శీర్షాలు.

5.2) శీర్షాల వద్ద స్పర్శరేఖల సమీకరణాలు $x = \pm a$

6.1) నాభిలంబాల సమీకరణము $x = \pm ae$

6.2) నాభిలంబాల కొనలు $\left(ae, \pm \frac{b^2}{a}\right)$ మరియు $\left(-ae, \pm \frac{b^2}{a}\right)$

6.3) నాభిలంబము పొడవు $\frac{2b^2}{a}$

7) దీర్ఘవృత్తంపై నాభి S దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$ బిందువు యొక్క నాభిదూరము $SP = a - ex_1$ మరియు దీర్ఘవృత్తంపై నాభి S' దృష్ట్యా P బిందువు యొక్క నాభిదూరం $P = a + ex_1$

8) దీర్ఘ వృత్తం యొక్క అనుబంధ(సహాయక) వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 = a^2$

9) దీర్ఘవృత్తం యొక్క నియత వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

II) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ క్షితిజ సమాంతర దీర్ఘవృత్తం దృష్ట్యా

1) సంకేతాలు: $S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$; $S_1 = \frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} - 1$; $S_{11} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1$; $S_{12} = \frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} - 1$

2) $S=0$ దీర్ఘవృత్తమునకు $P(x_1, y_1)$ బిందువు యొక్క స్థానం

(i) $S=0 \Leftrightarrow S_{11}=0$ దీర్ఘవృత్తంపై $P(x_1, y_1)$ బిందువు ఉండును.

(ii) $S=0 \Leftrightarrow S_{11}<0$ దీర్ఘవృత్తం లోపల $P(x_1, y_1)$ బిందువు ఉండును.

(iii) $S=0 \Leftrightarrow S_{11}>0$ దీర్ఘవృత్తం వెలుపల $P(x_1, y_1)$ బిందువు ఉండును.

3) $S=0$ దీర్ఘవృత్తంపై $A(x_1, y_1)$ & $B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలిపే జ్యా సమీకరణము $S_1 + S_2 = S_{12}$

4) $S=0$ దీర్ఘవృత్తంపై $P(x_1, y_1)$ వద్ద గీచిన స్పర్శరేఖ సమీకరణము $S_1=0$

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ దీర్ఘవృత్తంపై $P(x_1, y_1)$ వద్ద గీచిన అభిలంబరేఖ సమీకరణము $\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2$

6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ దీర్ఘవృత్తానికి $y=mx+c$ అనే రేఖ స్పర్శరేఖ కావడానికి నియమం $c^2 = a^2m^2 + b^2$.

7) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ దీర్ఘవృత్తానికి m వాలుగా కలిగిన స్పర్శరేఖ సమీకరణము $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

8) బాహ్యబిందువు $P(x_1, y_1)$ నుండి $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ దీర్ఘవృత్తానికి రెండు స్పర్శరేఖలు గీయగలము. మరియు ఆ

స్పర్శరేఖల వాలు m_1, m_2 అయిన $m_1 + m_2 = \frac{2x_1y_1}{x_1^2 - a^2}$, $m_1m_2 = \frac{y_1^2 - b^2}{x_1^2 - a^2}$

9) బాహ్యబిందువు $P(x_1, y_1)$ నుండి $S=0$ దీర్ఘవృత్తానికి గీచిన స్పర్శరేఖాయుగ్మ సమీకరణము $S_1^2 = S_{11}S$.

10) $S=0$ దీర్ఘవృత్తం దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$ బిందువు యొక్క స్పర్శ జ్యా సమీకరణము $S_1=0$.

11) $P(x_1, y_1)$ బిందువు మధ్యబిందువుగా కలిగిన $S=0$ దీర్ఘవృత్తం యొక్క జ్యా సమీకరణము $S_1 = S_{11}$.

III) పరామితీయ సమీకరణాలు:

12) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ దీర్ఘవృత్తంపై బిందువు యొక్క పరామితీయ రూపం $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ దీనిని θ తో సూచిస్తాము.

13) $S=0$ దీర్ఘవృత్తంపై $P(\theta)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము $\frac{x \cos \theta}{a} + \frac{y \sin \theta}{b} = 1$

14) $S=0$ దీర్ఘవృత్తంపై $P(\theta)$ వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణము $\frac{ax}{\cos \theta} - \frac{by}{\sin \theta} = a^2 - b^2$

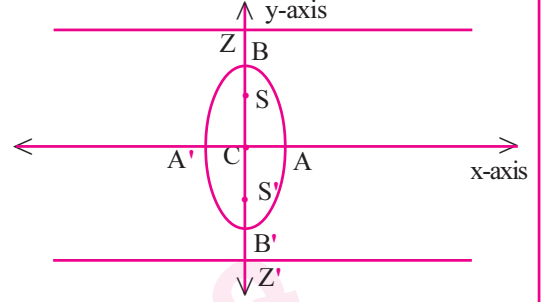
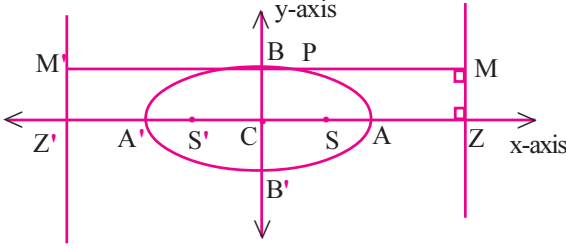
IV) దీర్ఘవృత్తం యొక్క రెండు ప్రామాణిక రూపాలు

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ or } b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, a > b$$

క్షితిజ సమాంతర దీర్ఘవృత్తం

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ or } b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, a < b$$

క్షితిజ లంబ దీర్ఘవృత్తం



- 1) ఉత్కేంద్రత $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
 $b^2 = a^2(1 - e^2)$ or $a^2e^2 = a^2 - b^2$.
- 2) కేంద్రం $C = (0, 0)$
- 3) నాభులు $S = (ae, 0) \Rightarrow S(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$
 $S' = (-ae, 0) \Rightarrow S'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$
- 4) శీర్షాలు $A = (a, 0)$ మరియు $A' = (-a, 0)$
- 5) నాభిలంబం కొసలు $= \left(\pm ae, \pm \frac{b^2}{a} \right)$
- 6) నియతరేఖపై పాదాలు $= (\pm a/e, 0)$
- 7) నియతరేఖల సమీకరణం $x = \pm a/e$ (లేదా)
 $(\sqrt{a^2 - b^2})x = \pm a^2$
- 8) నాభిలంబాల సమీకరణము $x = \pm ae$
- 9) దీర్ఘాక్షం పొడవు $2a$ మరియు దాని సమీకరణం $y = 0$
ప్రాస్వాక్షం పొడవు $2b$ మరియు దాని సమీకరణం $x = 0$
- 10) శీర్షాల వద్ద స్పర్శరేఖల సమీకరణం $x = \pm a$

- 1) ఉత్కేంద్రత $e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$
 $a^2 = b^2(1 - e^2)$ or $b^2e^2 = b^2 - a^2$.
- 2) కేంద్రం $C = (0, 0)$
- 3) నాభులు $S = (0, be) \Rightarrow S(0, \sqrt{b^2 - a^2})$
 $S' = (0, -be) \Rightarrow S'(0, -\sqrt{b^2 - a^2})$
- 4) శీర్షాలు $B = (0, b)$ మరియు $B' = (0, -b)$
- 5) నాభిలంబం కొసలు $= \left(\pm \frac{a^2}{b}, \pm be \right)$
- 6) నియతరేఖపై పాదాలు $= (0, \pm b/e)$
- 7) నియతరేఖల సమీకరణము $y = \pm b/e$ (లేదా)
 $(\sqrt{b^2 - a^2})y = \pm b^2$
- 8) నాభిలంబాల సమీకరణము $y = \pm be$
- 9) దీర్ఘాక్షం పొడవు $2b$ మరియు దాని సమీకరణం $x = 0$
ప్రాస్వాక్షం పొడవు $2a$ మరియు దాని సమీకరణం $y = 0$
- 10) శీర్షాల వద్ద స్పర్శరేఖల సమీకరణం $y = \pm b$