3. మాత్రికలు

IPE : 2 VSAQ & 1 SAQ & 2 LAQ = 2 + 2 + 4 + 7 + 7 = 22 Marks

ముఖ్యమైన సూత్రాలు, నిర్వచనాలు

1.1) అడ్డు మరియు నిలువు వరసలలో మూలకాల అమరికను **మాత్రిక** అందురు.

1.2) శూన్యమాత్రిక :మాత్రికలోని ప్రతి మూలకము 'సున్నా' అయితే ఆమాత్రికను 'శూన్య మాత్రిక' అంటారు.

1.3) మాత్రికా జాడ: A అనే ఒక చతురస్ర మాత్రిక యొక్క ప్రధాన వికర్ణంలోని మూలకాల మొత్తాన్ని, A యొక్క జాడ అంటారు. దీనిని Tr(A) తో సూచిస్తారు.

1.4) వికర్ణమాత్రిక:ఒక చతురస్ర మాత్రికలో ప్రధాన వికర్ణములో తప్ప మిగతా మూలకాలన్నీ సున్నాలయితే ఆ మాత్రికను వికర్ణ మాత్రిక అంటారు.

1.5) సంఖ్యామాత్రిక:ఒక చతురస్ర మాత్రికలో ప్రధాన వికర్ణంలోని మూలకాలన్నీ సమానంగా ఉంటూ మిగిలిన మూలకాలన్నీ సున్నాలయితే ఆ మాత్రికను సంఖ్యా మాత్రిక అంటారు.

1.6) యూనిట్ మాత్రిక: ఒక మాత్రిక యొక్క ప్రధాన వికర్ణంలోని మూలకాలన్నీ 1 అవుతూ మిగిలిన మూలకాలన్నీ సున్నా అయితే ఆ మాత్రికను యూనిట్ మాత్రిక అంటారు.

1.7) ఎగువ త్రిభుజ మాత్రిక: $A=(a_{ij})_{nxn}$ అనే చతురస్ర మాత్రికలో $i>j$ అయినపుడు aij=0 అయితే A ను ఎగువ త్రిభుజ మాత్రిక అంటారు.

1.8) మాత్రికా వ్యత్యయం : A అను మాత్రికలో అడ్డు వరుసలోని నిలువు వరుసలు పరస్పరం మారిస్తే వచ్చే మాత్రికను A కు మాత్రికా వ్యత్యయం అంటారు. దీనిని A^T తో సూచిస్తారు.

1.9) సౌష్ఠవ మాత్రిక: $A^T=A$ అయ్యేటట్లుగా ఉండే చతురస్ర మాత్రిక A ని సౌష్ఠవ మాత్రిక అంటాం. **AP 23**

1.10) వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రిక: $A^T=-A$ అయ్యేటట్లుగా ఉండే చతురస్ర మాత్రిక A ని వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రిక అంటాం.

2) $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ అయిన $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$; $\operatorname{Adj} A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

3) విలోమమాత్రిక: A అనే ఒక చతురస్ర మాత్రికనకు AB=BA=I అగునట్లుగా B అనే మాత్రిక వ్యవస్థితమయినచో B ను A యొక్క విలోమ మాత్రిక అందురు.

4) క్రామర్ పద్ధతి: దత్త సమీకరణ వ్యవస్థను AX=B అనే మాత్రికా సమీకరణపు రూపంలో వ్రాసినపుడు, A ఒక అసాధారణ మాత్రిక అయిన దత్త వ్యవస్థ యొక్క సాధన సమితి $x=\frac{\Delta_1}{\Delta}, y=\frac{\Delta_2}{\Delta}, z=\frac{\Delta_3}{\Delta}$

5) మాత్రికా విలోమ పద్ధతి: దత్త సమీకరణ వ్యవస్థను AX=B అనే మాత్రికా సమీకరణపు రూపంలో వ్రాసినపుడు, A ఒక అసాధారణ మాత్రిక అయిన దత్త వ్యవస్థ యొక్క సాధన సమితి $X=A^{-1}B$ అగును.

6) గౌస్ జోర్డాన్ పద్ధతి: దత్త సమీకరణ వ్యవస్థ యొక్క సర్వమాత్రిక [AB] పై తగిన మౌలిక పరివర్తనలు అనువర్తింపజేసి నిర్ణయించిన మాత్రికా రూపములోనికి మార్చి, సాధన సమితిని కనుగొందురు.

7) A అనునది 3x3 పరిమాణము గల శూన్యేతర మాత్రిక అయితే (i) A అసాధారణ మాత్రిక $\Rightarrow$ Rank (A)=3
(ii) A సాధారణ మాత్రిక మరియు కనీసము ఒక 2x2 ఉపమాత్రిక అసాధారణము $\Rightarrow$ rank(A)=2
(iii) A సాధారణ మాత్రిక మరియు ప్రతి 2x2 ఉపమాత్రిక సాధారణము $\Rightarrow$ rank (A)=1

8) 3 చలరాశులలో గల AX=O అనే సమఘాత సమీకరణ వ్యవస్థలో (i) rank(A)=3 అయిన, ఆ వ్యవస్థకి తుల్యసాధన ఉండును. (ii) rank(A)≠3 అయిన, ఆ వ్యవస్థకి అనంత సాధన ఉండును.

9) 3 చలరాశులలో గల AX=D అనే అసమఘాత సమీకరణ వ్యవస్థలో (i) rank(A)=rank[A D]=3 అయిన, ఆ వ్యవస్థకి తుల్యసాధన ఉండును. (ii) rank(A)=rank[A D]<3 అయిన, ఆ వ్యవస్థకి అనంత సాధన ఉండును. (iii) rank (A) ≠ rank [A D] అయిన, ఆ వ్యవస్థకి సాధన ఉండదు.

1. **2x – y + 3z =8, –x+2y+z =4, 3x+y–4z =0 రేఖీయ సమీకరణాలను క్రామర్స్ పద్ధతిన సాధించుము.**

Sol: ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థ యొక్క మాత్రికా సమీకరణ రూపం: $AX = D$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2(-8-1) + 1(4-3) + 3(-1-6) = -18 + 1 - 21 = -38$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2(-8-1)+1(-16-0) + 3(4-0) = -72 - 16 + 12 = -76$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 2(-16-0) - 8(4-3) + 3(-0-12) = -32 - 8 + 36 = -76$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -0 \end{vmatrix} = 2(0-4) + 1(0-12) + 8(-1-6) = -8 - 12 - 56 = -76$$

క్రామర్ పద్ధతి ప్రకారం, $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-\cancel{76}}{-\cancel{38}} = 2$; $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\cancel{-76}}{\cancel{-38}} = 2$; $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\cancel{-76}}{\cancel{-38}} = 2$

$\therefore$ సాధన $x = 2, y = 2, z = 2$

2 **x–y+3z=5, 4x+2y–z=0, –x+3y+z=5 సమీకరణాలను మాత్రిక విలోమపద్ధతిన సాధించుము.**

Sol: ఇచ్చిన సమీకరణాలకు మాత్రికా సమీకరణం AX=D, ఇక్కడ

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}; X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}5\\ 0\\ 5\end{bmatrix}$$

$\therefore$ AX=D యొక్క సాధన $X=A^{-1}D$ అగును.

ఇప్పుడు A^{-1} కనుగొందాం.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}=1(2+3)+1(4-1)+3(12+2)=1(5)+1(3)+3(14)=5+3+42=50\neq 0$$

A యొక్క సహగుణావయవ మాత్రిక

$$\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}4 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(2+3) & -(4-1) & (12+2)\\ -(-1-9) & (1+3) & -(3-1)\\ (1-6) & -(-1-12) & (2+4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -3 & 14\\ 10 & 4 & -2\\ -5 & 13 & 6\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Adj } A=\begin{bmatrix}5 & 10 & -5\\ -3 & 4 & 13\\ 14 & -2 & 6\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{\det A}(\text{Adj}A)=\frac{1}{50}\begin{bmatrix}5 & 10 & -5\\ -3 & 4 & 13\\ 14 & -2 & 6\end{bmatrix}$$

$$\text{Now, } X=A^{-1}D=\frac{1}{50}\begin{bmatrix}5 & 10 & -5\\ -3 & 4 & 13\\ 14 & -2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 0\\ 5\end{bmatrix}=\frac{1}{50}\begin{bmatrix}25+0-25\\ -15+0+65\\ 70+0+30\end{bmatrix}=\frac{1}{50}\begin{bmatrix}0\\ 50\\ 100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\therefore X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

3. x+y+z=9, 2x+5y+7z=52, 2x+y-z=0సమీకరణాలను గాస్ -జోర్డాన్ పద్ధతిలో సాధించుము.

Sol: ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థ యొక్క మాత్రికా సమీకరణ రూపం: $AX = D$,

$$[AD] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 5 & 7 & 52 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[AD] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & 34 \\ 0 & -4 & -8 & -52 \end{bmatrix} (\because R_2 \to R_2 - 2R_1 \quad R_3 \to R_3 - R_2)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & 34 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \end{bmatrix} (\because R_3 \to (-1/4)R_3)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 3 & 5 & 34 \end{bmatrix} (\because R_{32})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} (\because R_3 \to R_3 - 3R_2)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} (\because R_1 \to R_1 + R_3 \quad R_2 \to R_2 + 2R_3)$$

$$[AD] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} (\because R_1 \to R_1 - R_2 \quad R_3 \to (-1)R_3)$$

$\therefore \ x = 1, y = 3, z = 5$

4. **$x + y + z = 1, 2x + 2y + 3z = 6, x + 4y + 9z = 3$ సమీకరణాలను గౌస్ –జోర్డాన్ పద్ధతిలో సాధించుము.**

Sol: ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థ యొక్క మాత్రికా సమీకరణ రూపం: $AX = D$

$$[AD] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -30 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{I}$$

[AD] అనునది గౌస్‌జోర్డాన్ రూపం I లోనికి మార్చబడింది.

కావున ఇచ్చిన సమీకరణాలకు ఏకైక సాధన ఉండును.

I నుండి సాధన $x = 7, y = -10, z = 4$.

5. **$x - 3y - 8z = -10, 3x + y - 4z = 0, 2x + 5y + 6z = 13$ సమీకరణాలను గాస్ -జోర్డాన్ పద్ధతిలో సాధించుము.**

Sol: **ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థ యొక్క మాత్రికా సమీకరణ రూపం:** $AX = D$

$$[AD] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 & -10 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 & -10 \\ 0 & 10 & 20 & 30 \\ 0 & 11 & 22 & 33 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2(1/10) \\ R_3(1/11) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 \to R_3 - R_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \to R_1 + 4R_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

[AD] అనునది గాస్‌జోర్డాన్ రూపం II లోనికి మార్చబడింది. (ఇక్కడ మూడవ వరుసలో అన్ని సున్నాలుఉన్నవి.)

కావున కోటి $(A) = 2$; కోటి $[AD] = 2 < 3$ (చరరాశుల సంఖ్య)

కావున దత్త వ్యవస్థ సంగతం మరియు అనంతసాధనలు కలవు.

(I) నుండి $x + y = 2$ .....(i) , $y + 2z = 3$ ....(ii)

Let $z = k, k \in R$ (ii) $\Rightarrow y = 3 - 2z = 3 - 2k$;

(i) $\Rightarrow x = 2 - y = 2 - (3 - 2k) = 2 - 3 + 2k = 2k - 1$

$\therefore$ సాధనలు $x = -1 + 2k, y = 3 - 2k, z = k, \ k \in R$