2B (TM)

Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH-2023 (AP)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2023(AP)

Time : 3 Hours **గణితశాస్త్రం - 2B** Max.Marks : 75

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: $10 \times 2 = 20$

1. $2x^2 + ay^2 - 3x + 2y - 1 = 0$ ఒక వృత్తాన్ని సూచిస్తే a విలువలు కనుగొని దాని కేంద్రము మరియు వ్యాసార్ధము కనుగొనుము.
2. $x^2 + y^2 = 35$ వృత్తం దృష్ట్యా $(1, 3), (2, k)$ లు సంయుగ్మాలు అయితే k విలువ ఎంత?
3. $x^2 + y^2 - 5x + 6y + 12 = 0, x^2 + y^2 + 6x - 4y - 14 = 0$ అనే వృత్తాల మూలాక్ష సమీకరణము కనుగొనుము.
4. $2y = 5x + k$ రేఖ $y^2 = 6x$ పరావలయాన్ని స్పృశిస్తే k విలువ కనుగొనుము.
5. ఒక అతిపరావలయపు ఉత్కేంద్రత 5/4 అయిన, దాని సంయుగ్మ అతిపరావలయం ఉత్కేంద్రత కనుగొనుము.
6. $\int \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$ ను గణించండి.
7. $\int e^x(\tan x + \log \sec x)dx$ ను గణించండి.
8. $\int_0^2 |1-x|dx$ ను గణించండి.
9. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x dx$ ను గణించండి.
10. మూల బిందువు కేంద్రంగా గల వృత్తాలు కుటుంబపు అవకలన సమీకరణం మరియు దాని పరిమాణం కనుక్కోండి

సెక్షన్-బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 4 = 20$

11. P అనే బిందువు నుండి $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ మరియు $x^2+y^2-2x-8y+1=0$ వృత్తాలకు గీసిన స్పర్శరేఖల పొడవు నిష్పత్తి 2:1 అయ్యేటట్లు P చలిస్తుంటే, P బిందుపథ సమీకరణం $x^2+y^2-2x-12y+8=0$ అని చూపండి.
12. $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ అనే వృత్తాల ఉమ్మడి జ్యా సమీకరణం మరియు పొడవును కనుగొనుము.
13. $3x^2 + y^2 - 6x - 2y - 5 = 0$ అనే దీర్ఘవృత్తానికి ఉత్కేంద్రత, నాభులు మరియు నియతరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.
14. దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ నాభిలంబం ఒక కొన వద్ద అభిలంబ రేఖ హ్రస్వాక్షం ఒక కొన ద్వారా పోతే $e^4 + e^2 = 1$ అని చూపండి.
15. $3x^2 - 4y^2 = 12$ అతిపరావలయానికి $y = x - 7$ రేఖకు (i) సమాంతరంగాను (ii) లంబంగాను ఉండే స్పర్శరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.
16. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+5\cos x}$ ను గణించండి.
17. $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$ ను సాధించండి.

సెక్షన్-సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 7 = 35$

18. (4, 1) (6, 5) బిందువులు గుండా పోతూ, $4x + y - 16 = 0$ రేఖపై కేంద్రము ఉండే వృత్త సమీకరణం కనుగొనుము.
19. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ వృత్తాన్ని $(-1, 1)$ వద్ద అంతరంగా స్పృశిస్తూ 2 యూనిట్లు వ్యాసార్ధము ఉన్న వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.
20. పరావలయపు ప్రామాణిక రూపము $y^2 = 4ax$ అని చూపుము.
21. $\int \frac{3\sin x + \cos x + 7}{\sin x + \cos x + 1} dx$ ను గణించండి.
22. $I_n = \int \cos^n x dx$ అయిన $I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ అని నిరూపించండి.దానినుండి $\int \cos^4 x dx$ ను గణించుము.
23. $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$ ను గణించండి.
24. $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^2 = 0$ ను సాధించండి.

IPE AP MARCH-2023
SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. **$2x^2+ay^2-3x+2y-1=0$ ఒక వృత్తాన్ని సూచిస్తే a విలువలు కనుగొని దాని కేంద్రము మరియు వ్యాసార్ధము కనుగొనుము.**

Sol: వృత్త సమీకరణంలో, x^2 గుణకం= y^2 గుణకం కావున 2=a

∴వృత్త సమీకరణము $2x^2+2y^2-3x+2y-1=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-\frac{3}{2}x+y-\frac{1}{2}=0$ $\qquad \Rightarrow g=\frac{-3}{4}, f=\frac{1}{2}, c=\frac{-1}{2}$

వ్యాసార్ధం r= $\sqrt{\left(\frac{-3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{9+4+8}{16}}=\frac{\sqrt{21}}{4}$

---

2. **$x^2+y^2=35$ వృత్తం దృష్ట్యా (1,3), (2,k) లు సంయుగ్మాలు అయితే k విలువ ఎంత?**

Sol: $S=x^2+y^2=35$ వృత్తం దృష్ట్యా (1,3), (2,k) లు సంయుగ్మాలు$\Rightarrow S_{12}=0$

$\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2-35=0 \Rightarrow (1)(2)+(3)(k)-35=0 \Rightarrow \cancel{3}k=\cancel{33} \Rightarrow k=11$

---

3. **$x^2+y^2-5x+6y+12=0$, $x^2+y^2+6x-4y-14=0$ అనే వృత్తాల మూలాక్ష సమీకరణము కనుగొనుము.**

A: దత్త సమీకరణాలు $S\equiv x^2+y^2-5x+6y+12=0$, $S'\equiv x^2+y^2+6x-4y-14=0$.

దత్త వృత్తాల మూలాక్ష సమీకరణం $S-S'=0 \Rightarrow -5x-6x+6y+4y+12+14=0 \Rightarrow -11x+10y+26=0$

$\Rightarrow 11x-10y-26=0$

---

4. **$2y=5x+k$ రేఖ $y^2=6x$ పరావలయాన్ని స్పృశిస్తే k విలువ కనుగొనుము.**

Sol: ఇచ్చిన పరావలయము $y^2=6x \Rightarrow 4a=6 \Rightarrow a=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

ఇచ్చిన రేఖ $2y=5x+k \Rightarrow y=\frac{5}{2}x+\frac{k}{2}$

$y=mx+c$ తో పోల్చగా $m=\frac{5}{2}, c=\frac{k}{2}$

స్పర్శరేఖా నియమం $c=a/m \Rightarrow \frac{k}{2}=\frac{\frac{3}{\cancel{2}}}{\frac{5}{\cancel{2}}} \Rightarrow \frac{k}{2}=\frac{3}{5} \Rightarrow k=2\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{6}{5}$

BABY BULLET-Q

5. **ఒక అతిపరావలయపు ఉత్కేంద్రత 5/4 అయిన, దాని సంయుగ్మ అతిపరావలయం ఉత్కేంద్రత కనుగొనుము.**

Sol: e= 5/4 మరియు సంయుగ్మ అతిపరావలయపు ఉత్కేంద్రత e_1 అప్పుడు

$$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e_1^2}=1\Rightarrow\frac{1}{(5/4)^2}+\frac{1}{e_1^2}=1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{e_1^2}=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}\Rightarrow e_1^2=\frac{25}{9}\Rightarrow e_1=\frac{5}{3}$$

---

6. $\int\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ **ను గణించండి.**

Sol: $I=\int\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=\int\sqrt{2\sin^2 x}\,dx=\sqrt{2}\int\sin x\,dx=-\sqrt{2}\cos x+c$

---

7. $\int e^x(\tan x+\log \sec x)dx$ **ను గణించండి.**

Sol: ఇక్కడ $f(x)=\log\sec x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cancel{\sec x}}\cancel{\sec x}\tan x=\tan x$

$$\therefore\int e^x(\log\sec x+\tan x)dx=e^x\log\sec x+c$$

---

8. $\int_0^2|1-x|dx$ **ను గణించండి.**

Sol : మాప ప్రమేయం నిర్వచనం నుండి $|1-x|=1-x$ for $1-x\ge 0\Rightarrow x-1\le 0\Rightarrow x\le 1$

$|1-x|=-(1-x)=x-1$ for $1-x<0\Rightarrow x-1>0\Rightarrow x>1$

$$\therefore\int_0^2|1-x|dx=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx$$

$$=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{4}{2}-2\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{2}+0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

BABY BULLET-Q

9. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x\, dx$ **ను గణించండి.**

Sol : $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x\, dx = \frac{[(5)(3)(1)][(3)(1)]}{(10)(8)(6)(4)(2)}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{512}$

☞ Note the factor $\frac{\pi}{2}$ (∵ m, n are even)

---

10. మూల బిందువు కేంద్రంగా గల వృత్తాలు కుటుంబపు అవకలన సమీకరణం మరియు దాని పరిమాణం కనుక్కోండి

Sol: మూలబిందువు కేంద్రంగా గల వృత్తాల కుటుంబపు సమీకరణం $x^2+y^2=r^2$, r పరామితి

x పరంగా అవకలనం చేయగా, $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x + y\frac{dy}{dx} = 0$

అవకలజ సమీకరణం యొక్క పరిమాణం 1.

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-బి

11. P అనే బిందువు నుండి $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ మరియు $x^2+y^2-2x-8y+1=0$ వృత్తాలకు గీసిన స్పర్శరేఖల పొడవు నిష్పత్తి 2:1 అయ్యేటట్లు P చలిస్తుంటే, P బిందుపథ సమీకరణం $x^2+y^2-2x-12y+8=0$ అని చూపండి.

Sol: బిందుపథంపై బిందువు $P(x_1, y_1)$ అనుకొనుము.

P నుండి $S= x^2+y^2-2x+4y-20=0$ కు గల స్పర్శరేఖ పొడవును PT_1 అనుకొనుము.

P నుండి $S' = x^2+y^2-2x-8y+1=0$ కు గల స్పర్శరేఖ పొడవును PT_2 అనుకొనుము.

దత్తాంశం నుండి $PT_1 : PT_2= 2:1$

$$\Rightarrow \frac{PT_1}{PT_2}=\frac{2}{1} \Rightarrow 1PT_1 = 2PT_2 \Rightarrow (PT_1)^2 = 4(PT_2)^2$$

$$\Rightarrow [x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 + 4y_1 - 20] = 4[x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 - 8y_1 + 1] \qquad [\because PT_1 = \sqrt{S_{11}}, PT_2 = \sqrt{S'_{11}}]$$

$$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 + 4y_1 - 20 = 4x_1^2 + 4y_1^2 - 8x_1 - 32y_1 + 4$$

$$\Rightarrow 3x_1^2 + 3y_1^2 - 6x_1 - 36y_1 + 24 = 0 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 - 12y_1 + 8 = 0$$

$\therefore P(x_1, y_1)$ యొక్క బిందుపథం సమీకరణం $x^2+y^2-2x-12y+8=0$

---

12. $x^2+y^2+3x+5y+4=0$, $x^2+y^2+5x+3y+4=0$ అనే వృత్తాల ఉమ్మడి జ్యా సమీకరణం మరియు పొడవును కనుగొనుము.

Sol: ఇచ్చిన వృత్తాలు $S\equiv x^2+y^2+3x+5y+4=0$ మరియు $S'\equiv x^2+y^2+5x+3y+4=0$

వీటి ఉమ్మడి జ్యా సమీకరణము $S-S' =0$

$\Rightarrow 3x-5x+5y-3y+4-4 =0 \Rightarrow -2x+2y=0 \quad \Rightarrow -2(x-y)=0 \Rightarrow x-y=0$

$S\equiv x^2+y^2+3x+5y+4=0$ అనే వృత్త కేంద్రం $C(-3/2,-5/2)$

$$r = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{25}{4}-4} = \sqrt{\frac{9+25-16}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$C\left(\frac{-3}{2},\frac{-5}{2}\right)$ నుండి $x-y=0$ అనే రేఖకు గల లంబదూరం $p = \frac{\left|\frac{-3}{2}+\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ ఉమ్మడి జ్యా పొడవు $= 2\sqrt{r^2-p^2} = 2\sqrt{\frac{9}{2}-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{4} = 2(2) = 4$ యూనిట్లు

BABY BULLET-Q

13. $3x^2+y^2-6x-2y-5=0$ అనే దీర్ఘవృత్తానికి ఉత్కేంద్రత నియతరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చిన దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం

$3x^2 + y^2 - 6x - 2y - 5 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 + y^2 - 6x - 2y = 5$

$\Rightarrow 3(x^2 - 2x)+(y^2-2y)=5$

$\Rightarrow 3(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1) = 5+3+1$

$\Rightarrow 3(x-1)^2+(y-1)^2=9$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

దీనిని $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, తో పోల్చగా

$a^2=3 \Rightarrow a=\sqrt{3}$, $b^2=9 \Rightarrow b=3$

ఇక్కడ $a<b$

$\therefore$ ఇది క్షితిజ లంబ దీర్ఘవృత్తం

మరియు $(h, k) = (1, 1)$

(i) ఉత్కేంద్రత $e=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{9-3}{9}}=\sqrt{\frac{6}{9}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

(ii) నాభులు $= (h, k\pm be)$

$$=(1,1\pm \cancel{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{3}}}\right))=(1,1\pm\sqrt{3}(\sqrt{2}))=(1,1\pm\sqrt{6})$$

BABY BULLET-Q

14. దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ నాభిలంబం ఒక కొన వద్ద అభిలంబ రేఖ హ్రస్వాక్షం ఒక కొన ద్వారా పోతే $e^4+e^2=1$ అని చూపండి.

Sol : (x_1,y_1) బిందువు వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణం $\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=a^2-b^2$

నాభిలంబం ఒక కొన $L=(ae,b^2/a)$

కనుక L వద్ద, అభిలంబరేఖ సమీకరణం $\frac{a^2x}{ae}-\frac{b^2y}{b^2/a}=a^2-b^2 \Rightarrow \frac{ax}{e}-ay=a^2-b^2$.....(1)

కాని దీర్ఘవృత్తం (1) హ్రస్వాక్షం ఒక కొన $B'(0,-b)$ గుండా పోతుంది.

$$\Rightarrow \frac{a(0)}{e}-a(-b)=a^2-b^2 \Rightarrow ab=a^2-a^2(1-e^2) \Rightarrow ab=a^2e^2 \Rightarrow e^2=\frac{b}{a}$$

$$\therefore e^4=\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2(1-e^2)}{a^2}=1-e^2 \Rightarrow e^4+e^2=1$$

---

15. $3x^2-4y^2=12$ అతిపరావలయానికి $y=x-7$ రేఖకు (i) సమాంతరంగాను (ii) లంబంగాను ఉండే స్పర్శరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చిన అతిపరావలయం $3x^2-4y^2=12$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1 \Rightarrow a^2=4, b^2=3$$

$y=x-7$ అనే రేఖ వాలు $m=1$

$\Rightarrow$ దీని లంబరేఖ వాలు -1

సూత్రం:

m వాలు కలిగిన స్పర్శరేఖ $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

(i) m=1 కలిగిన సమాంతర స్పర్శరేఖ

$$y=1.x\pm\sqrt{4(1)^2-3}=x\pm1$$

$$\Rightarrow x-y\pm1=0$$

(ii)m=–1 కలిగిన లంబ స్పర్శరేఖ $y=(-1)x\pm\sqrt{4(1)^2-3}=-x\pm1$

$$\Rightarrow x+y\pm1=0$$

BABY BULLET-Q

16. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+5\cos x}$ ను గణించండి.

Sol: $\tan\frac{x}{2} = t$ వ్రాయగా $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ and $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

మరియు $x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

$$\therefore I = \int_0^1 \frac{(2dt)/(1+t^2)}{4+5\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int_0^1 \frac{(2dt)/\cancel{(1+t^2)}}{\frac{4(1+t^2)+5(1-t^2)}{\cancel{1+t^2}}} = 2\int_0^2 \frac{dt}{9-t^2} = 2\int_0^2 \frac{dt}{3^2-t^2} = 2.\frac{1}{2(3)}\ \log\left[\frac{3+t}{3-t}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ \log\frac{4}{2} = \frac{1}{3}\ \log 2$$

---

17. $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2e^{-y}$ ను సాధించండి.

Sol: దత్త అవకలన సమీకరణం $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2e^{-y} = \frac{e^x}{e^y} + \frac{x^2}{e^y} = \frac{e^x + x^2}{e^y}$ $\quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^x + x^2}{e^y}$

$$\Rightarrow e^y dy = (e^x + x^2)dx \Rightarrow \int e^y dy = \int (e^x + x^2)dx \Rightarrow e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + c$$

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-సి

18. (4,1) (6,5) బిందువులు గుండా పోతూ, $4x + y - 16 = 0$ రేఖపై కేంద్రము ఉండే వృత్త సమీకరణం కనుగొనుము.

Sol: కావలసిన వృత్త సమీకరణం $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

S=0 పై A(4, 1) ఉన్నది కావున $\Rightarrow 16 + 1 + 8g + 2f + c = 0 \Rightarrow 8g + 2f + c = -17$ ....(1)

S=0 పై B(6, 5) ఉన్నది కావున $\Rightarrow 36 + 25 + 12g + 10f + c = 0 \Rightarrow 12g + 10f + c = -61$.....(2)

$4x + y - 16 = 0$ పై కేంద్రం $(-g, -f)$ ఉన్నది కావున $\Rightarrow -4g - f - 16 = 0 \Rightarrow 4g + f = -16$....(3)

ఇప్పుడు (2) – (1)$\Rightarrow 4g + 8f = -44$...........(4); ఇప్పుడు (4) – (3)$\Rightarrow 7f = -28 \Rightarrow f = -4$

(3) నుండి, $4g - 4 = -16 \Rightarrow 4g = -12 \Rightarrow g = -3$

(1) నుండి , $8(-3) + 2(-4) + c = -17 \Rightarrow c = -17 + 24 + 8 = 15$

S=0 లో $g = -3, f = -4, c = 15$ విలువలను ప్రతిక్షేపించగా

కావలసిన వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$

BABY BULLET-Q

19. $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ వృత్తాన్ని (5,5) వద్ద బాహ్యంగా స్పృశిస్తూ 5 యూనిట్లు వ్యాసార్థము ఉన్న వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ అనే వృత్త కేంద్రం $C_1 = (1, 2)$ వ్యాసార్థము $r_1 = \sqrt{1+4+20} = \sqrt{25} = 5$

కావలసిన వృత్త కేంద్రం C_2 మరియు వ్యాసార్థము r_2 అనుకుంటే $r_2 = 5$ అగును.

స్పర్శబిందువు P=(5,5) రెండు వృత్తములు బాహ్యముగా స్పృశించుకొనును

వ్యాసార్థాలు సమానం కావున C_1C_2 యొక్క మధ్యబిందువు P(5,5) ఇక్కడ $C_1 = (1, 2)$, $C_2=(x_1,y_1)$

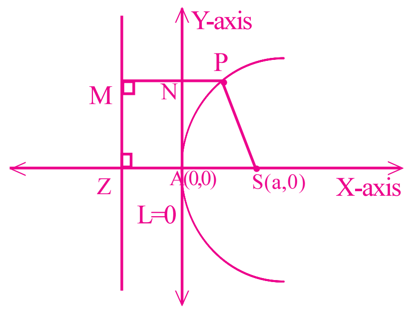
$$\Rightarrow\left(\frac{x_1+1}{2},\frac{y_1+2}{2}\right)=(5,5)\Rightarrow\frac{x_1+1}{2}=5,\ \frac{y_1+2}{2}=5\Rightarrow x_1+1=10, y_1+2=10$$

$\Rightarrow x_1=9, y_1=8 \quad \therefore C_2=(9,8)$

కావలసిన వృత్తం యొక్క సమీకరణం $(x-9)^2+(y-8)^2=5^2 \Rightarrow x^2+y^2-18x-16y+120=0$

20. పరావలయపు ప్రామాణిక రూపమును ప్రవచించుము.

Sol: పరావలయపు నాభి S మరియు నియతరేఖ L=0 అనుకొనుము.



నియత రేఖపై S యొక్క విక్షేపము Z అనుకొనుము.

SZ యొక్క మధ్యబిందువును A అనుకొనుము

అప్పుడు SA=AZ $\Rightarrow \dfrac{SA}{AZ}=1$

అనగా A బిందువు పరావలయం పై ఉండును.

AS పరావలయపు ప్రధాన అక్షాన్ని X-అక్షముగా తీసుకొని

ASకు లంబముగా A గుండాపోయే రేఖను Y-అక్షముగా తీసుకొనుము.

అప్పుడు A=(0,0) అగును.

AS=a అనుకుంటే S=(a,0), Z=(−a,0) అగును

అప్పుడు నియతరేఖ సమీకరణము x=−a $\Rightarrow$ x+a=0

పరావలయంపై $P(x_1,y_1)$ అనే బిందువును తీసుకొనుము.

Y-అక్షంపై P యొక్క విక్షేపము N అనుకొనుము.

నియతరేఖపై P యొక్క విక్షేపము M అనుకొనుము.

ఇక్కడ $PM=PN+NM=x_1+a$ ($\because$ PN = Pయొక్క x-నిరూపకం మరియు NM=AZ=AS=a)

ఇప్పుడు పరావలయపు 'నాభి–నియతరేఖ ధర్మం' ప్రకారం $\dfrac{SP}{PM}=1 \Rightarrow SP=PM \Rightarrow SP^2=PM^2$

$$\Rightarrow (x_1-a)^2+(y_1-0)^2=(x_1+a)^2$$

$$\Rightarrow y_1^2=(x_1+a)^2-(x_1-a)^2$$

$$\Rightarrow y_1^2=4ax_1 \quad [\because (a+b)^2-(a-b)^2=4ab]$$

$\therefore$ $P(x_1,y_1)$ యొక్క బిందుపథ సమీకరణము $y^2=4ax$

BABY BULLET-Q

21. $\int \frac{\cos x + 3\sin x + 7}{\cos x + \sin x + 1} dx$ ను గణించండి.

Sol: $\cos x + 3\sin x + 7 = A\frac{d}{dx}(\cos x + \sin x + 1) + B(\cos x + \sin x + 1) + C$

$\Rightarrow \cos x + 3\sin x + 7 = A(-\sin x + \cos x) + B(\cos x + \sin x + 1) + C$ ....(I)

$\Rightarrow \cos x + 3\sin x + 7 = \cos x(A + B) + \sin x(-A + B) + (B + C)$

cosx యొక్క గుణకాలను పోల్చగా, A+B=1 ....(1)

sinx యొక్క గుణకాలను పోల్చగా, –A+B=3 ....(2)

స్థిర పదాలను పోల్చగా B+C=7 ....(3)

ఇప్పుడు (1) + (2) ⇒ 2B=4 ⇒ B=2

(1) నుండి , A=1–B =1–2= –1

(3) నుండి , , C=7–B =7–2= 5

A= –1, B=2, C= 5 విలువలను (I) లో వ్రాయగా లభం వచ్చును.

$\cos x + 3\sin x + 7 = -1(-\sin x + \cos x) + 2(\cos x + \sin x + 1) + 5$

$\therefore I = \int \frac{\cos x + 3\sin x + 7}{\cos x + \sin x + 1} dx = \int \frac{-1(-\sin x + \cos x) + 2(\cos x + \sin x + 1) + 5}{\cos x + \sin x + 1} dx$

$= -\int \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x + 1} dx + 2\int \frac{\cancel{\cos x + \sin x + 1}}{\cancel{\cos x + \sin x + 1}} dx + 5\int \frac{1}{\cos x + \sin x + 1} dx$

$= -\log|\cos x + \sin x + 1| + 2x + 5\int \frac{1}{\cos x + \sin x + 1} dx$ ......(II) $\left(\because \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c\right)$

ఇప్పుడు $I_1 = \int \frac{1}{\cos x + \sin x + 1} dx$ ను కనుగొందాం.

$\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ and $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$\therefore I_1 = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + 1}\left(\frac{2dt}{1+t^2}\right) = \int \frac{1}{\frac{1-t^2+2t+1+t^2}{\cancel{1+t^2}}} \cdot \frac{2dt}{\cancel{1+t^2}}$

$= \int \frac{2dt}{2+2t} = \int \frac{\cancel{2}dt}{\cancel{2}(1+t)} = \int \frac{dt}{1+t} = \log|1+t| + c = \log\left|1 + \tan\frac{x}{2}\right| + c$

(II) నుండి $I = -\log|\cos x + \sin x + 1| + 2x + 5\log\left|1 + \tan\frac{x}{2}\right| + c$

BABY BULLET-Q

22. $I_n=\int \cos^n x dx$ నకు లఘూకరణ సూత్రమును రాబట్టి దానినుండి $\int \cos^4 x dx$ ను గణించుము.

Sol: $I_n=\int \cos^n x dx=\int \cos^{n-1}x(\cos x)dx.$

మొదటి ప్రమేయము $u=\cos^{n-1}x$ మరియు

రెండవ ప్రమేయము $v=\cos x \Rightarrow \int v = \sin x$

విభాగ సమాకలన సూత్రము ప్రకారము

$I_n = \cos^{n-1}x (\sin x) -\int (n-1)\cos^{n-2}x (-\sin x)\sin x\, dx$

$=\cos^{n-1}x(\sin x)+(n-1)\int \cos^{n-2}x (\sin x)\sin x\, dx$

$= \cos^{n-1}x (\sin x)+(n-1)\int \cos^{n-2}x (\sin^2 x)\, dx = \cos^{n-1}x (\sin x)+(n-1)\int \cos^{n-2}x (1-\cos^2 x)dx$

$= \cos^{n-1}x (\sin x) +(n-1)\int \cos^{n-2}x dx -(n-1)\int \cos^n x\, dx$

$= \cos^{n-1}x (\sin x)+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$

$\therefore I_n = \cos^{n-1}x (\sin x)+(n-1)I_{n-2}-nI_n+I_n$

$\Rightarrow nI_n = \cos^{n-1}x(\sin x)+(n-1)I_{n-2}+\cancel{I_n}-\cancel{I_n}$

$\therefore I_n = \dfrac{\cos^{n-1}x(\sin x)}{n}+\dfrac{(n-1)}{n}I_{n-2} \ldots(1)$

n=4, 2,0 విలువలను వరుసగా (1)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$I_4 = \dfrac{\cos^3 x \sin x}{4}+\dfrac{3}{4}I_2$

$\Rightarrow \dfrac{\cos^3 x \sin x}{4}+\dfrac{3}{4}\left[\dfrac{\cos x \sin x}{2}+\dfrac{1}{2}I_0\right]$

$= \dfrac{\cos^3 x \sin x}{4}+\dfrac{3}{8}\cos x \sin x+\dfrac{3}{8}I_0$

$= \dfrac{\cos^3 x \sin x}{4}+\dfrac{3}{8}\cos x \sin x+\dfrac{3}{8}x+c$ $\qquad [\because I_0 = x]$

BABY BULLET-Q

23. $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$ ను గణించండి.

Sol: $x=\tan\theta \Rightarrow dx=\sec^2\theta d\theta$ మరియు $x=0 \Rightarrow \theta=0; x=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

ఇప్పుడు $1+x^2=1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

$$\therefore \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\log(1+\tan\theta)}{\cancel{\sec^2\theta}}\cancel{\sec^2}\theta d\theta = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta)d\theta$$

$$\therefore I = \int_0^{\pi/4} \log[1+\tan\theta]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left[1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left[1+\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left[\frac{(1+\tan\theta)+(1-\tan\theta)}{1+\tan\theta}\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1+\tan\theta}\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} [\log 2-\log(1+\tan\theta)]\,d\theta$$

$$= \log 2\int_0^{\pi/4} 1\,d\theta - \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta)d\theta = \log 2\int_0^{\pi/4} 1\,d\theta - I$$

$$= \log 2[\theta]_0^{\pi/4} - I$$

$$\Rightarrow I+I=(\log 2)\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2I=\left(\frac{\pi}{4}\right)(\log 2)$$

$$\Rightarrow I=\left(\frac{\pi}{8}\right)(\log 2)$$

BABY BULLET-Q

24. $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy-4x^2=0$ను సాధించండి.

Sol : దత్త సమీకరణము $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy-4x^2=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}+y\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=\frac{4x^2}{1+x^2}$

ఇది $\frac{dy}{dx}+yP(x)=Q(x)$ ఇక్కడ $P(x)=\frac{2x}{1+x^2}$, $Q(x)=\frac{4x^2}{1+x^2}$

$P(x)=\frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow \int P(x)dx=\int\frac{2x}{1+x^2}dx=\log(1+x^2)$ $\left(\because \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log f(x)\right)$

ఇప్పుడు, $IF=e^{\int P(x)dx}=e^{\log(1+x^2)}=1+x^2$

$\therefore$ సాధన $y(I.F)=\int(I.F)Q(x)dx$

$\Rightarrow y(1+x^2)=\int(1+x^2)\left(\frac{4x^2}{1+x^2}\right)dx=\int 4x^2dx=\frac{4x^3}{3}+c$

$\therefore$సాధన $y(1+x^2)=\frac{4x^3}{3}+c$

BABY BULLET-Q