2A (TM)

Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH-2023 (AP)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2023(AP)

Time : 3 Hours **గణితశాస్త్రం- 2A** **Max.Marks : 75**

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: **$10 \times 2 = 20$**

1. $7 + 24i$ యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము.

2. $z_1 = -1,\ z_2 = i$ అయిన $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ ను కనుగొనుము.

3. $1, \omega, \omega^2$లు 1 యొక్క ఘన మూలాలు అయితే $(1 - \omega + \omega^2)^5 + (1 + \omega - \omega^2)^5$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

4. $(-3 \pm 5i)$ మూలాల వర్గ సమీకరణాన్ని రూపొందించండి.

5. $4x^3 + 16x^2 - 9x - a = 0$ సమీకరణం మూలాల లబ్ధం 9 అయితే, a ని కనుక్కోండి.

6. 6 విభిన్నమైన రంగుల పూసలతో ఏర్పరచగల పూసల గొలుసల సంఖ్యను కనుక్కోండి.

7. ${}^nC_{21} = {}^nC_{27}$ అయిన ${}^{50}C_n$ కనుగొనుము.

8. $\left(\frac{3x}{7} - 2y\right)^{10}$ విస్తరణలోని మధ్యపదము(లు) కనుగొనుము.

9. 4, 6, 9, 3, 10, 13, 2 అనే దత్తాంశానికి మధ్యగతం నుంచి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

10. X ఒక పాశ్వాన్ చలరాశి, $P(X = 1) = P(X = 2)$ ను తృప్తిపరుస్తుంది. $P(X = 5)$ ను కనుగొనుము.

సెక్షన్-బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. **$5 \times 4 = 20$**

11. $x + iy = \dfrac{1}{1 + \cos\theta + i\sin\theta}$ అయిన $4x^2 - 1 = 0$ అని చూపండి.

12. x వాస్తవ సంఖ్య అయితే, $\dfrac{1}{3x+1} + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(3x+1)(x+1)}$ విలువ 1, 4 ల మధ్య ఉండదని నిరూపించండి.

13. 'PRISON' పదంలోని అక్షరాలతో ఏర్పడే 6 అక్షరాల పదాలన్నింటినీ నిఘంటువులోని క్రమంలో అమరిస్తే (పునరావృతం లేకుండా) ఆ క్రమంలో "PRISON" పదం యొక్క కోటిని కనుక్కోండి.

14. $\dfrac{{}^{4n}C_{2n}}{{}^{2n}C_n} = \dfrac{1.3.5.....(4n-1)}{[1.3.5.....(2n-1)]^2}$ అని నిరూపించండి.

15. $\dfrac{x^2 - 3}{(x+2)(x^2+1)}$ ను పాక్షికభిన్నాలుగా విడగొట్టండి.

16. ఒక లీపు సంవత్సరం కాని సంవత్సరంలో (i)53 ఆదివారాలు (ii)52 ఆదివారాలు మాత్రమే ఉండటానికి సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

17. కలనగణితంలోని ఒక సమస్యను ఇద్దరు విద్యార్థులు A, B లకు ఇస్తే వారు సమస్యను సాధించే సంభావ్యతలు వరసగా 1/3,1/4. వారిద్దరూ స్వతంత్రంగా సమస్యను సాధించటానికి ప్రయత్నిస్తే, ఆ సమస్యను సాధింపబడే సంభావ్యత ఎంత?

సెక్షన్-సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. **$5 \times 7 = 35$**

18. $x^2 - 2x + 4 = 0$ యొక్క మూలాలు α, β అయిన $\alpha^n + \beta^n = 2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ అని చూపండి.

19. $x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$ ను సాధించుము.

20. C_r అనేది ${}^nC_r$ ని సూచిస్తే, $C_0 + \dfrac{C_1}{2}x + \dfrac{C_2}{3}x^2 + ... + \dfrac{C_n}{n+1}x^n = \dfrac{(1+x)^{n+1} - 1}{(n+1)x}$ అని నిరూపించండి.

21. $t = \dfrac{4}{5} + \dfrac{4.6}{5.10} + \dfrac{4.6.8}{5.10.15} + ...$ అయితే $9t = 16$ అని చూపుము.

22. ఈ కింది అవిచ్ఛిన్న పౌనఃపున్య విభాజనానికి విస్తృతి, ప్రామాణిక విచలనాలను గణనం చేయండి.

x_i	4	8	11	17	20	24	32
f_i	3	5	9	5	4	3	1

23. బేయీ సిద్ధాంతం ప్రవచించి, నిరూపించండి.

24. ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి X సంభావ్యతా విభాజనాన్ని క్రింద ఇచ్చాం.

X=x	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X=x)	0	k	2k	2k	3k	k^2	$2k^2$	$7k^2+k$

అయిన (i) k విలువ (ii) సగటు మరియు (iii) $P(0<x<5)$ లను కనుగొనుము.

BABY BULLET-Q

IPE AP MARCH-2023
SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. **7+24i యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము.**

Sol: $7+24i = a+bi \Rightarrow a=7, b=24$

$\therefore r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{7^2+24^2} = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25$

సూత్రం: $\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + i\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right)$

$\therefore \sqrt{7+24i} = \pm\left(\sqrt{\frac{25+7}{2}} + i\sqrt{\frac{25-7}{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{32}{2}} + i\sqrt{\frac{18}{2}}\right) = \pm(\sqrt{16}+i\sqrt{9}) = \pm(4+3i)$

---

2. **$z_1 = -1, z_2 = i$ అయిన $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ ను కనుగొనుము.**

Sol: $Arg(-1)=\pi$, $Arg\, i = \frac{\pi}{2}$ అని మనకు తెలుసు.

$\therefore Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg z_1 - Arg z_2 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

---

3. **$1,\omega,\omega^2$ లు 1 యొక్క ఘన మూలాలు అయితే $(1-\omega+\omega^2)^5+(1+\omega-\omega^2)^5$ ను కనుగొనుము.**

Sol: G.E $= (1-\omega+\omega^2)^5+(1+\omega-\omega^2)^5$

$= (1+\omega^2-\omega)^5+(1+\omega-\omega^2)^5 = (-\omega-\omega)^5+(-\omega^2-\omega^2)^5$

$= (-2\omega)^5+(-2\omega^2)^5 = -2^5[\omega^2+\omega] = -32(-1) = 32$

---

4. **$(-3\pm5i)$ మూలాల వర్గ సమీకరణాన్ని రూపొందించండి.**

Sol: $\alpha = -3+5i$, $\beta = -3-5i$ అనుకొనుము.

$\Rightarrow \alpha+\beta = -6$

$\alpha\beta = (-3+5i)(-3-5i) = 3^2+5^2 = 9+25 = 34$

α,β లు మూలాలుగా కలిగిన వర్గసమీకరణం $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \Rightarrow x^2+6x+34=0$

BABY BULLET-Q

5. **$4x^3+16x^2-9x-a=0$ సమీకరణం మూలాల లబ్ధం 9 అయితే, a కనుక్కోండి.**

Sol: ఇచ్చిన సమీకరణం నుండి $a_0=4, a_1=16, a_2=-9, a_3=-a$

మూలాల లబ్ధం 9 $\Rightarrow S_3=-\frac{a_3}{a_0}=9 \Rightarrow \frac{a}{4}=9 \Rightarrow a=4\times 9=36$

---

6. **6 విభిన్నమైన రంగుల పూసలతో ఏర్పరచగల పూసల గొలుసల సంఖ్యను కనుక్కోండి.**

Sol: n అసరూప వస్తువులతో ఏర్పరచగల వేలాడే రకం వృత్తాకార ప్రస్తారాల సంఖ్య $\frac{1}{2}(n-1)!$

కావున గొలుసల సంఖ్య$=\frac{1}{2}(6-1)!=\frac{1}{2}(5!)=\frac{1}{2}(120)=60$

---

7. **${}^nC_5={}^nC_6$, అయిన ${}^{13}C_n$ ను కనుగొనుము.**

Sol : **సూత్రం:** ${}^nC_r={}^nC_s \Rightarrow r+s=n$ (or) $r=s$

$\therefore {}^nC_5={}^nC_6 \Rightarrow n=5+6=11$

$\therefore {}^{13}C_n={}^{13}C_{11}={}^{13}C_{13-11}={}^{13}C_2=\frac{13\times \cancel{12}}{1\times \cancel{2}}=13\times 6=78$

---

8. **$\left(\frac{3x}{7}-2y\right)^{10}$ విస్తరణలోని మధ్యపదము(లు)కనుగొనుము.**

Sol: ద్విపదఘాతం n=10 సరి సంఖ్య

$\therefore$ మధ్యపదం $T_{\frac{10}{2}+1}=T_{5+1}=T_6$

$\therefore T_6=T_{5+1}={}^{10}C_5\left(\frac{3x}{7}\right)^{10-5}(-2y)^5=-{}^{10}C_5\left(\frac{3}{7}\right)^5.x^5.2^5.y^5=-{}^{10}C_5\left(\frac{6}{7}\right)^5.x^5.y^5$

BABY BULLET-Q

9. 4, 6, 9, 3, 10, 13, 2 అనే దత్తాంశానికి మధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చిన దత్తాంశం: 4, 6, 9, 3, 10, 13, 2.

దాని ఆరోహణ క్రమం: 2,3,4,6,9,10,13.

పరిశీలనల సంఖ్య n = 7 బేసి

$\therefore$ దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతం $\Rightarrow M=6$

మధ్యగతం నుండి పరిశీలనల విచలనాలు:

2–6= –4; 3–6= –3; 4–6= –2; 6–6=0; 9–6=3;10–6=4; 13–6=7

కావున విచలనాల పరమ మూల్యాలు: 4, 3, 2, 0, 3, 4, 7

$\therefore$ మధ్యగతం నుంచి $MD=\frac{\Sigma|x_i-M|}{7}=\frac{4+3+2+0+3+4+7}{7}=\frac{23}{7}=3.29$

---

10. X ఒక పాశ్వాన్ చలరాశి, P(X=1)=P(X=2) ను తృప్తిపరిచే P(X=5) ను కనుగొనుము.

Sol: $P(X=r)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}, \lambda>0$ అని మనకు తెలుసు

దత్తాంశం నుండి P(X=1)=P(X=2)

$$\Rightarrow \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}=\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}\Rightarrow \frac{\lambda}{1}=\frac{\lambda^2}{2}\Rightarrow \lambda^2=2\lambda\Rightarrow \lambda(\lambda-2)=0\Rightarrow \lambda=2\ (\because \lambda>0)$$

$$\therefore P(X=5)=\frac{e^{-2}2^5}{5!}$$

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-బి

11. $x+iy=\dfrac{1}{1+\cos\theta+i\sin\theta}$ అయిన $4x^2-1=0$ అని చూపండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $x+iy=\dfrac{1}{(1+\cos\theta)+i\sin\theta}=\dfrac{1}{(2\cos^2\frac{\theta}{2})+i(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})}$

$$\Rightarrow x+iy=\frac{1}{(2\cos\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}}{(2\cos\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2})}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}}{(2\cos\frac{\theta}{2})(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2})}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}}{(2\cos\frac{\theta}{2})(1)}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}-\frac{i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\tan\frac{\theta}{2}$$

వాస్తవ భాగాలను సమానం చేయగా $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 2x=1\Rightarrow(2x)^2=1^2\Rightarrow 4x^2=1\Rightarrow 4x^2-1=0$

---

12. x వాస్తవ సంఖ్య అయితే $\dfrac{1}{3x+1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(3x+1)(x+1)}$ యొక్క విలువ 1,4 ల మధ్య ఉండదని నిరూపించండి.

Sol: సాధారణ సమీకరణం $\dfrac{1}{3x+1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(3x+1)(x+1)}=\dfrac{x+1+3x+1-1}{(3x+1)(x+1)}=\dfrac{4x+1}{3x^2+4x+1}$

$y=\dfrac{4x+1}{3x^2+4x+1}\Rightarrow y(3x^2+4x+1)=4x+1$

$\Rightarrow 3yx^2+4yx+y=4x+1$

$\Rightarrow 3yx^2+(4y-4)x+(y-1)=0$............(1)

(1) x లో వర్గసమీకరణం మరియు దాని మూలాలు వాస్తవం.

$\therefore\ \Delta=b^2-4ac\geq 0$

$(4y-4)^2-4(3y)(y-1)\geq 0$

$\Rightarrow 16y^2+16-32y-12y^2+12y\geq 0\Rightarrow 4y^2-20y+16\geq 0$

$\Rightarrow 4(y^2-5y+4)\geq 0\Rightarrow y^2-5y+4\geq 0\ \Rightarrow (y-1)(y-4)\geq 0\ \ \Rightarrow y\leq 1$ or $y\geq 4$

ఇక్కడ y విలువ 1 మరియు 4 మధ్యలో లేదు.

కావున ఇచ్చిన సమాసం ఏ విలువలూ 1, 4 ల మధ్య ఉండవు.

BABY BULLET-Q

13. **'PRISON' పదంలోని అక్షరాలతో ఏర్పడే 6 అక్షరాల పదాలన్నింటినీ నిఘంటువులోని క్రమంలో అమరిస్తే (పునరావృతం లేకుండా) ఆ క్రమంలో "PRISON" పదం యొక్క కోటిని కనుక్కోండి.**

Sol : PRISON అనే పదములోని అక్షరాల నిఘంటువు యొక్క క్రమం

I,N,O,P,R,S

I తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య ------ = 5! = 120

N తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య ------ = 5! = 120

O తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య ------ = 5! = 120

P I తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య ---- = 4! = 24

P N తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య ---- = 4! = 24

P O తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య ---- = 4! = 24

PRIN తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య -- = 2! = 2

PRIO తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య -- = 2! = 2

PRISN తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య - = 1! = 1

తర్వాత పదం PRISON = 1! = 1

$\therefore$ PRISON అనే పదం యొక్క కోటి = 3(120) + 3(24)+2(2)+1+ 1= 360 + 72 + 4 + 1+1 =438.

---

14. $\dfrac{{}^{4n}C_{2n}}{{}^{2n}C_n} = \dfrac{1.3.5.....(4n-1)}{[1.3.5.....(2n-1)]^2}$ **అని నిరూపించండి.**

Sol: $$\text{L.H.S} = \frac{{}^{4n}C_{2n}}{{}^{2n}C_n} = \frac{\dfrac{4n!}{2n!.2n!}}{\dfrac{2n!}{n!.n!}} = \frac{(4n)!}{(2n!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad \left[\because {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}\right]$$

$$= \frac{(4n)(4n-1)(4n-2)(4n-3)(4n-4)..........6.5.4.3.2.1}{[(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3).........4.3.2.1]^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$= \frac{[(4n)(4n-2)(4n-4)..........(6)(4)(2)][(4n-1)(4n-3).....5.3.1]}{[(2n)(2n-2)......4.2]^2[(2n-1)(2n-3).......(3)(1)]^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$= \frac{[2^{2n}(2n)(2n-1)(2n-2).......(3)(2)(1)][(4n-1)(4n-3).....5.3.1]}{[2^n(n)(n-1)........(2)(1)]^2[(2n-1)(2n-3).......(3)(1)]^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$= \frac{[2^{2n}(2n!)][(4n-1)(4n-3).....5.3.1]}{2^{2n}(n!)^2[(2n-1)(2n-3).......(3)(1)]^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} \; \frac{1.3.5......(4n-3)(4n-1)}{[1.3.5......(2n-3)(2n-1)]^2} = \text{R.H.S}$$

BABY BULLET-Q

15. $\dfrac{x^2-3}{(x+2)(x^2+1)}$ **ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.**

Sol: $\dfrac{x^2-3}{(x+2)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}=\dfrac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)}$

$\Rightarrow A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)=x^2-3 \quad ....(1)$

x= –2 ను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా $A(4+1)+(Bx+C)(0)=4-3\Rightarrow 5A=1\Rightarrow A=1/5$

x=0 ను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా $A+2C=-3\Rightarrow C=-8/5$

x^2 గుణకాలను పోల్చగా $A+B=1\Rightarrow B=1-A=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$

$\therefore \dfrac{x^2-3}{(x+2)(x^2+1)}=\dfrac{1}{5(x+2)}+\dfrac{4x-8}{5(x^2+1)}$

---

16. **ఒక లీపు సంవత్సరం కాని సంవత్సరంలో (i) 53 ఆదివారాలు (ii) 52 ఆదివారాలు మాత్రమే ఉండటానికి సంభావ్యతలను కనుగొనండి.**

Sol: i) ఒక లీపు సంవత్సరం కాని సంవత్సరంలో 53 ఆదివారాలు ఉండే ఘటన E అనుకుందాం.

ఒక లీపు సంవత్సరం కాని సంవత్సరంలో రోజుల సంఖ్య 365 = 52 వారాలు + 1 రోజు అదనం

శాంపుల్ ఆవరణ S = {ఆది, సోమ,మంగళ, బుధ, గురు, శుక్ర, శని}

కావున n(S)=7 మరియు n(E)=1 (i) $P(E)=\dfrac{n(E)}{n(S)}=\dfrac{1}{7}$

(ii) మిగిలిన ఒక రోజు ఆదివారం కాకపోతే మనకు 52 ఆదివారాలు వచ్చును. $\therefore P(\bar{E})=1-\dfrac{1}{7}=\dfrac{6}{7}$

---

17. **కలనగణితంలోని ఒక సమస్యను ఇద్దరు విద్యార్థులు A, B లకు ఇస్తే వారు సమస్యను సాధించే సంభావ్యతలు వరుసగా 1/3,1/4. వారిద్దరూ స్వతంత్రంగా సమస్యను సాధించటానికి ప్రయత్నిస్తే, ఆ సమస్యను సాధింపబడే సంభావ్యత ఎంత?**

Sol: A, B లతో సమస్య సాధింపబడే ఘటనలు వరుసగా A, B లు అనుకుందాం. $\Rightarrow P(A)=\dfrac{1}{3}, P(B)=\dfrac{1}{4}$

$\therefore P(\bar{A})=1-P(A)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3};\quad P(\bar{B})=1-P(B)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

$\therefore P(A\cup B)=1-P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-P(\bar{A}).P(\bar{B})=1-\left(\dfrac{2}{\not{3}}\right)\left(\dfrac{\not{3}}{4}\right)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-సి

18. $x^2-2x+4=0$ యొక్క మూలాలు α,β అయిన $\alpha^n+\beta^n=2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ అని చూపండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $x^2-2x+4=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-4(1)(4)}}{2(1)}=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{2}=\frac{2\pm 2i\sqrt{3}}{2}=1\pm i\sqrt{3}$

ఇప్పుడు $1+i\sqrt{3}$ యొక్క మాప-ఆయామ రూపంను కనుగొందాం.

$x+iy=1+i\sqrt{3} \Rightarrow x=1,\ y=\sqrt{3} \quad \therefore\ r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2.$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\tan\frac{\pi}{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

$1+i\sqrt{3}$ యొక్క మాప ఆయామ రూపం $r(\cos\theta+i\sin\theta)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow (1+i\sqrt{3})^n=\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^n$$

$=(2)^n\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n=2^n\left(\cos n\frac{\pi}{3}+i\sin n\frac{\pi}{3}\right)$ ..... (1) (డీమోయర్ సిద్ధాంతం నుండి)

అదేవిధంగా, $(1-i\sqrt{3})^n=2^n\left(\cos n\frac{\pi}{3}-i\sin n\frac{\pi}{3}\right)$ ..... (2)

(1) & (2)లను కలుపగా $\alpha^n+\beta^n=(1+i\sqrt{3})^n+(1-i\sqrt{3})^n$

$$=2^n\left(\left(\cos n\frac{\pi}{3}+i\sin n\frac{\pi}{3}\right)+\left(\cos n\frac{\pi}{3}-i\sin n\frac{\pi}{3}\right)\right)=2^n\left(2\cos\frac{n\pi}{3}\right)=2^{n+1}.\cos\frac{n\pi}{3}$$

19. $x^5-5x^4+9x^3-9x^2+5x-1=0$ ను సాధించుము.

Sol: దత్త సమీకరణం తరగతి n=5 బేసి సంఖ్య మరియు $a_k=-a_{n-k}\ \forall\ k=0,1,2,3,4,5$

కావున దత్త సమీకరణం రెండవ కోవకు చెందిన 'బేసి తరగతి వ్యుత్క్రమ సమీకరణం'.

కావున ఇచ్చిన సమీకరణానికి ఒక మూలం x=1

ఇచ్చిన సమీకరణంను (x–1)తో భాగించగా

1	1	–5	9	–9	5	–1
	0	1	–4	5	–4	1
	1	–4	5	–4	1	0

ఇప్పుడు $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$ అనే వ్యుత్క్రమ సమీకరణం ను సాధించవలెను.

పై సమీకరణాన్ని x^2 తో భాగించగా

$$x^2-4x+5-4\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0\ ......(1)$$

$x+\frac{1}{x}=y$ అయిన $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=y^2-2$

$\therefore(1)\Rightarrow(y^2-2)-4y+5=0$

$\Rightarrow y^2-4y+3=0\Leftrightarrow(y-3)(y-1)=0\Leftrightarrow y=3$ లేదా 1.

y=3 అయిన $x+\frac{1}{x}=3\Rightarrow\frac{x^2+1}{x}=3\Rightarrow x^2+1=3x\Rightarrow x^2-3x+1=0$

$$\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

y=1 అయిన $x+\frac{1}{x}=1\Rightarrow\frac{x^2+1}{x}=1\Rightarrow x^2+1=x\Rightarrow x^2-x+1=0$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

కావున దత్త సమీకరణం 5 మూలాలు 1, $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ మరియు $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

BABY BULLET-Q

20. **n ఒక ధరపూర్ణ సంఖ్య మరియు x ఒక శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్య అయితే**

$$C_0 + C_1\frac{x}{2} + C_2\frac{x^2}{3} + C_3\frac{x^3}{4} + ... + C_n\frac{x^n}{n+1} = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{(n+1)x}$$ **అని చూపండి.**

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + ... \frac{C_n}{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$ **అని చూపండి.**

Sol: $S = C_0 + C_1.\frac{x}{2} + C_2.\frac{x^2}{3} + ... + C_n.\frac{x^n}{n+1} = {}^nC_0 + {}^nC_1\frac{x}{2} + {}^nC_2\frac{x^2}{3} + ... + {}^nC_n.\frac{x^n}{n+1}$ అనుకొనుము.

$$\Rightarrow x.S = {}^nC_0.x + {}^nC_1\frac{x^2}{2} + {}^nC_2.\frac{x^3}{3} + ... + {}^nC_n.\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow (n+1)xS = \frac{n+1}{1}\cdot {}^nC_0.x + \frac{n+1}{2}.{}^nC_1.x^2 + \frac{n+1}{3}.{}^nC_2x^3 + ... + \frac{n+1}{n+1}\,{}^nC_n.x^{n+1}$$

$$= {}^{n+1}C_1.x + {}^{n+1}C_2x^2 + {}^{n+1}C_3x^3 + ... + {}^{n+1}C_{n+1}.x^{n+1} \qquad \left(\because \left(\frac{n+1}{r+1}\right).{}^nC_r = {}^{(n+1)}C_{r+1}\right)$$

$$\Rightarrow (n+1)xS = (1+x)^{n+1} - 1 \qquad (\because {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + ... + {}^nC_nx^n = (1+x)^n - 1)$$

$$\therefore S = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{(n+1).x}$$

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + ... \frac{C_n}{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$ **అని చూపండి.**

Proof: $S = C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + ... \frac{C_n}{n+1}$

$$\Rightarrow S = {}^nC_0 + \frac{1}{2}.{}^nC_1 + \frac{1}{3}.{}^nC_2 + ... + \frac{1}{n+1}.C_n$$

$$\Rightarrow (n+1)S = \frac{n+1}{1}.\,{}^nC_0 + \frac{n+1}{2}.{}^nC_1 + \frac{n+1}{3}.{}^nC_2 + ... + \frac{n+1}{n+1}\,{}^nC_n$$

$$= {}^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2 + {}^{n+1}C_3 + ... + {}^{n+1}C_{n+1} \qquad \left(\text{Since } \frac{n+1}{r+1}.{}^nC_r = {}^{n+1}C_{r+1}\right)$$

$$= 2^{n+1} - 1 \qquad (\because {}^nC_1 + {}^nC_2 + ... + {}^nC_n = 2^n - 1)$$

$$\therefore S = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

BABY BULLET-Q

21. $t=\frac{4}{5}+\frac{4.6}{5.10}+\frac{4.6.8}{5.10.15}+....$ అయిన $9t=16$ అని నిరూపించండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $t=\frac{4}{5}+\frac{4.6}{5.10}+\frac{4.6.8}{5.10.15}+....$

ఇరువైపులా 1 ను కలుపగా

$$1+t=1+\frac{4}{1!}\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{4.6}{2!}\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4.6.8}{3!}\left(\frac{1}{5}\right)^3+......$$

పై శ్రేణిని $1+\frac{p}{1!}\left(\frac{x}{q}\right)+\frac{p(p+q)}{2!}\left(\frac{x}{q}\right)^2+.......=(1-x)^{-p/q}$ తో పోల్చగా

$p=4, p+q=6 \Rightarrow 4+q=6 \Rightarrow q=2.$ మరియు $\frac{x}{q}=\frac{1}{5} \Rightarrow x=\frac{q}{5}=\frac{2}{5}$

$$\therefore 1+t=(1-x)^{-p/q}=(1-\frac{2}{5})^{-4/2}=\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$$

$$\Rightarrow 1+t=\frac{25}{9} \Rightarrow 9(1+t)=25 \Rightarrow 9+9t=25 \Rightarrow 9t=16$$

---

22. ఈ కింది అవిచ్ఛిన్న పౌనఃపున్య విభాజనానికి విస్తృతి, ప్రామాణిక విచలనాలను గణనం చేయండి.

x_i	4	8	11	17	20	24	32
f_i	3	5	9	5	4	3	1

Sol: ఇక్కడ $N=\Sigma f_i=3+5+9+5+4+3+1=30$

మరియు $\Sigma f_i x_i=4(3)+8(5)+11(9)+17(5)+20(4)+24(3)+32(1)=420$ $\quad \therefore \bar{x}=\frac{\Sigma f_i x_i}{N}=\frac{420}{30}=14$

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
4	3	12	–10	100	300
8	5	40	–6	36	180
11	9	99	–3	9	81
17	5	85	3	9	45
20	4	80	6	36	144
24	3	72	10	100	300
32	1	32	18	324	324
		$\Sigma f_i x_i=420$			$\Sigma f_i(x_i-\bar{x})^2=1374$

విస్తృతి $(\sigma^2)=\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{30}(1374)=45.8$.

ప్రామాణిక విచలనం $\sigma=\sqrt{45.8}=6.77$

BABY BULLET-Q

23. బేయీ సిద్ధాంతాం ప్రవచించి, నిరూపించండి.

Sol: **ప్రవచనం:** శాంపుల్ ఆవరణ S లో $E_1, E_2 ... E_n$ లు 'n' పరస్పర వివర్జిత, పూర్ణ ఘటనలు.

వాటిలో ఏదైనా ఘటన A మరియు $P(A) \neq 0$ లు అనుకుంటే అప్పుడు $P(E_k | A) = \dfrac{P(E_k)P(A/E_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(Ei).P(A/E_i)}$

నిరూపణ: నియత సంభావ్యత నిర్వచనం ప్రకారం $P(E_k | A) = \dfrac{P(E_k \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(E_k).P(A | E_k)}{P(A)}$ ...(1)

దత్తాంశం ప్రకారం $E_1, E_2 ... E_n$ లు పరస్పర వివర్జిత, పూర్ణ ఘటనలు కావున

$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$ మరియు $A \cap E_1, A \cap E_2, ... A \cap E_n$ లు పరస్పర వియుక్తాలు అగును. అనగా $A \cap E_i = \phi$

ఇప్పుడు, $P(A) = P(S \cap A) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cap A\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (E_i \cap A)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i \cap A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A | E_i)$

$\therefore$ (1) నుండి, $P(E_k | A) = \dfrac{P(E_k)P(A | E_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A | E_i)}$

---

24. ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి X సంభావ్యతా విభాజనాన్ని క్రింద ఇచ్చాం.

$X=x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=x_i)$	0	k	2k	2k	3k	k^2	$2k^2$	$7k^2+k$

అయిన (i) k విలువ (ii) సగటు మరియు (iii) P(0<x<5) లను కనుగొనుము.

Sol: సంభావ్యతల మొత్తం $\Sigma P(X=x_i)=1$

$\Rightarrow 0+k+2k+2k+3k+k^2+2k^2+7k^2+k=1 \Rightarrow 10k^2+9k=1 \Rightarrow 10k^2+9k-1=0$

$\Rightarrow 10k^2+10k-k-1=0 \Rightarrow 10k(k+1)-1(k+1)=0 \Rightarrow (10k-1)(k+1)=0 \Rightarrow k=1/10$, (since k>0)

(i) $k=1/10$

(ii) సగటు $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i.P(X = x_i) = 0(0)+1(k)+2(2k)+3(2k)+4(3k)+5(k^2)+6(2k^2)+7(7k^2+k)$

$=0+k+4k+6k+12k+5k^2+12k^2+49k^2+7k=66k^2+30k$

$= 66\left(\dfrac{1}{100}\right) + 30\left(\dfrac{1}{10}\right) = 0.66 + 3 = 3.66$

(iii) $P(0<x<5)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4) = k+2k+2k+3k=8k = 8\left(\dfrac{1}{10}\right) = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

BABY BULLET-Q