JR MATHS-1A (TM)

Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH -2023(AP)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2023(AP)

Time : 3 Hours **గణితశాస్త్రం - 1A** Max.Marks : 75

BABY BULLETS

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: $10 \times 2 = 20$

1. $x \in R$ నకు $f(x) = 2x-1$, $g(x) = \frac{x+1}{2}$ అయిన $(gof)(x)$ ను కనుగొనుము.
2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ అనే ప్రమేయపు ప్రదేశము కనుగొనుము.
3. సౌష్ఠవ మాత్రికను నిర్వచించి ఉదాహరణ ఇవ్వండి. **4.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & x \end{bmatrix}$ మరియు $\det A = 45$ అయిన x ను కనుగొనుము.
5. $\overline{OA} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, $\overline{AB} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $\overline{BC} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$, $\overline{CD} = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$ అయిన $\overline{OD}$ సదిశను కనుగొనుము.
6. $\bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}$, $-5\bar{j} - \bar{k}, -3\bar{i} + 5\bar{j}$ అనే బిందువుల గుండా పోయే తలం యొక్క సదిశా సమీకరణం కనుగొనుము.
7. $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$ అయిన $\bar{a}$, $\bar{b}$ ల మధ్య కోణమును కనుగొనుము.
8. $\sin 330^\circ . \cos 120^\circ + \cos 210^\circ . \sin 300^\circ$ అని చూపండి.
9. $A - B = \frac{3\pi}{4}$ అయితే, $(1-\tan A)(1+\tan B) = 2$ అని చూపండి. **10.** $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\log_e 3$ అని చూపండి.

సెక్షన్-బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 4 = 20$

11. $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ ఒక సాధారణ మాత్రిక అయిన $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\text{Adj } A)$ అని నిరూపించండి.
12. $3\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}, 2\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}, -\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}, 4\bar{i} + 5\bar{j} + \lambda\bar{k}$ స్థానసదిశల బిందువులు సతలీయములైతే $\lambda = -146/17$ అని చూపండి.
13. $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}, \bar{b} = -\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}, \bar{c} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ అయిన $(\bar{a} \times \bar{b}).(\bar{b} \times \bar{c})$ ను కనుగొనుము.
14. $A \in R$ అయితే $\cos A \cos\left(\frac{\pi}{3} + A\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - A\right) = \frac{1}{4}\cos 3A$ అని నిరూపించి తద్వారా $\cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{2\pi}{9}.\cos\frac{3\pi}{3}.\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{16}$ అని రాబట్టండి.
15. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ అయితే సమీకరణం $\cot^2 x - (\sqrt{3}+1)\cot x + \sqrt{3} = 0$ ను సాధించండి.
16. $\text{Tan}^{-1}\frac{1}{2} + \text{Tan}^{-1}\frac{1}{5} + \text{Tan}^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$ అని నిరూపించండి. **17.** ΔABC లో $\frac{b^2 - c^2}{a^2} = \frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}$ అని చూపండి.

సెక్షన్-సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 7 = 35$

18. $f : A \to B$ ద్విగుణ ప్రమేయం అయిన (i) $fof^{-1} = I_B$ (ii) $f^{-1}of = I_A$ అని నిరూపించండి.
19. $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots\ldots + n$ పదాల వరకు $= \frac{n}{2n+1}$ అని చూపండి
20. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 2bc - a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac - b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab - c^2 \end{vmatrix} = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2$ అని చూపండి.
21. $2x - y + 3z = 8, -x + 2y + z = 4, 3x + y - 4z = 0$ సమీకరణాలను మాత్రిక విలోమపద్ధతిన సాధించుము.
22. ఈ క్రింది అతలీయ రేఖల మధ్య కనిష్ట దూరము కనుగొనుము. $\bar{r} = (6\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}) + t(\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k})$;
    $\bar{r} = (-4\bar{i} - \bar{k}) + s(3\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k})$
23. $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ అయిన $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 1 + 4\sin A \sin B \sin C$ అని నిరూపించండి.
24. $r + r_1 + r_2 - r_3 = 4R\cos C$ అని నిరూపించండి.

IPE AP MARCH-2023
SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. $x\in R$ నకు $f(x)=2x-1$, $g(x)=\frac{x+1}{2}$ అయిన (gof)(x) (ii) (fog)(x) లను కనుగొనుము.

A: (i) $(gof)(x)=g(f(x))=g(2x-1)=\frac{(2x-1)+1}{2}=\frac{2x}{2}=x$

(ii) $(fog)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{x+1}{2}\right)=\cancel{2}\left(\frac{x+1}{\cancel{2}}\right)-1=x+1-1=x$

---

2. $\sqrt{x^2-25}$ అనే ప్రమేయపు ప్రదేశము కనుగొనుము.

A: దత్తాంశ f(x) నిర్వచితమైతే $x^2-25\geq 0$

$\Rightarrow (x-5)(x+5)\geq 0$

$\Rightarrow x\in(-\infty,-5]\cup[5,\infty)$

$\therefore$ ప్రదేశం $=(-\infty,-5]\cup[5,\infty)$

---

3. సౌష్ఠవ మాత్రికను నిర్వచించి ఉదాహరణ ఇవ్వండి.

A: **సౌష్ఠవ మాత్రిక:** $A^T=A$ అయ్యేటట్లుగా ఉండే చతురస్ర మాత్రిక A ని సౌష్ఠవ మాత్రిక అంటాం.

ఉదా: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -3 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}a & h & g\\ h & b & f\\ g & f & c\end{bmatrix}$

---

4. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 4\\ 5 & -6 & x\end{bmatrix}$, det A= 45 అయిన xను కనుగొనుము.

A: దత్తాంశం నుండి $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 4\\ 5 & -6 & x\end{vmatrix}=45$

$\Rightarrow 1(3x+24)+0+0=45\Rightarrow 3x=45-24\Rightarrow \cancel{3}x=\cancel{21}\Rightarrow x=7$ $\therefore$ x=7

5. $\overline{OA}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k},\ \overline{AB}=3\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k},\ \overline{BC}=\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k},\ \overline{CD}=2\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}$ అయిన $\overline{OD}$ ని దిశను కనుగొనుము.

A: $\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=(\overline{OA}+\overline{AB})+\overline{BC}+\overline{CD}=(\overline{OB}+\overline{BC})+\overline{CD}=\overline{OC}+\overline{CD}=\overline{OD}$ అనుకొనుము.

$\overline{OD}=\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k})+(3\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k})+(\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k})+(2\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k})$

$=7\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$

---

6. $\bar{i}-2\bar{j}+5\bar{k},\ -5\bar{j}-\bar{k},\ -3\bar{i}+5\bar{j}$ అనే బిందువులు గుండా పోయే తలం యొక్క సదిశా సమీకరణం కనుక్కోండి.

A: దత్త బిందువులు $A(\bar{a})=\bar{i}-2\bar{j}+5\bar{k},$

$B(\bar{b})=-5\bar{j}-\bar{k},\ C(\bar{c})=-3\bar{i}+5\bar{j}$

తలం యొక్క సదిశా సమీకరణం $\bar{r}=(1-s-t)\bar{a}+s\bar{b}+t\bar{c}, s, t\in R$

$\therefore\ \bar{r}=(1-s-t)(\bar{i}-2\bar{j}+5\bar{k})\ +s(-5\bar{j}-\bar{k})+t(-3\bar{i}+5\bar{j}),\ s, t\in R$

---

7. $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}-\bar{b}|$ అయిన $\bar{a}$ మరియు $\bar{b}$ ల మధ్య కోణమును కనుగొనుము.

A: దత్తాంశం నుండి $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}-\bar{b}|$

$\Rightarrow|\bar{a}+\bar{b}|^2=|\bar{a}-\bar{b}|^2\Rightarrow\bar{a}^2+\bar{b}^2+2\bar{a}.\bar{b}=\bar{a}^2+\bar{b}^2-2\bar{a}.\bar{b}$

$\Rightarrow 4\bar{a}.\bar{b}=0\Rightarrow\bar{a}.\bar{b}=0\Rightarrow\bar{a}\perp\bar{b}$

$\therefore$ $\bar{a}$ మరియు $\bar{b}$ ల మధ్య కోణం 90^o

---

8. $\sin330^o.\cos120^o+\cos210^o.\sin300^o$ విలువను కనుగొనుము.

A: $\sin330^o=\sin(360^o-30^o)=-\sin30^o=-1/2$

$\cos120^o=\cos(180^o-60^o)=-\cos60^o=-1/2$

$\cos210^o=\cos(180^o+30^o)=-\cos30^o=-\sqrt{3}/2$

$\sin300^o=\sin(360^o-60^o)=-\sin60^o=-\sqrt{3}/2$

$\therefore\ G.E=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1$

BABY BULLET-Q

9. $A-B=\frac{3\pi}{4}$ అయిన **(1–tanA)(1+tanB)=2 అని చూపండి.**

A: దత్తాంశం నుండి $A-B=\frac{3\pi}{4} \Rightarrow \tan(A-B)=\tan\frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}=-1$

$\Rightarrow$tan A–tanB= –1 –tan A tan B = –tan A + tan B – tan A tan B=1 ఇరువైపులా 1 ను కలుపగా

$\Rightarrow$ 1 – tan A + tan B – tan A tan B=1+1

$\Rightarrow$ (1 – tan A) – tanB(1–tanA) = 2 $\Rightarrow$ (1 – tan A) (1 – tan B) = 2

---

10. $\mathbf{Tanh^{-1}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\log_e 3}$ **అని చూపండి.**

A: $\text{Tanh}^{-1}x=\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ అని మనకు తెలుసు.

$$\therefore \text{Tanh}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{\frac{3}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}\right)=\frac{1}{2}\log_e(3)$$

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-బి

11. A ఒక సాధారణ మాత్రిక అయిన $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\text{Adj } A)$ అని నిరూపించండి.

Sol: $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ అనుకొందాం.

a_1, b_1, c_1 ..... ల సహగుణావయవాలను వరుసగా A_1, B_1, C_1 ...... అనుకొందాం.

$$\therefore \text{Adj } A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}^T \Rightarrow \text{Adj} A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$$

$$A.(\text{Adj}A) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 & a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 & a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 \\ a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 & a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 & a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 \\ a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 & a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 & a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix}$$ (నిర్ధారకధర్మాల నుండి)

$$= (\det A)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\det A).I$$

$\therefore A(\text{Adj } A) = (\det A)\, I$;   అదేవిధంగా $(\text{Adj } A)A = (\det A)\, I$ అని చూపించవచ్చు.

$\therefore A\left(\frac{\text{Adj } A}{\det A}\right) = I$ ($\because$ A సాధారణమాత్రిక $\Rightarrow \det A \neq 0$)

$\therefore\ A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{\det A}$ [$\because AB=I \Rightarrow A^{-1}=B$]

BABY BULLET-Q

12. $3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k}, 2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k}, -\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}, 4\bar{i}+5\bar{j}+\lambda\bar{k}$ లు స్థానసదిశలుగా గల బిందువులు సతలీయములైతే $\lambda=-146/17$ అని చూపండి.

A: O అనునది ఆదిబిందువు మరియు

$\overline{OP}=3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k}, \overline{OQ}=2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k}$,

$\overline{OR}=-\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}, \overline{OS}=4\bar{i}+5\bar{j}+\lambda\bar{k}$, అనుకొనుము.

$\therefore \overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP}$

$=(2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k})-(3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k})$

$=-\bar{i}+5\bar{j}-3\bar{k}$

$\overline{PR}=\overline{OR}-\overline{OP}$

$=(-\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k})-(3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k})$

$=-4\bar{i}+3\bar{j}+3\bar{k}$

$\overline{PS}=\overline{OS}-\overline{OP}$

$=(4\bar{i}+5\bar{j}+\lambda\bar{k})-(3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k})$

$=\bar{i}+7\bar{j}+(\lambda+1)\bar{k}$

కాని $[\overline{PQ}\ \overline{PR}\ \overline{PS}]=0$ [P,Q,R,S అనే నాలుగు బిందువుల సతలీయములు కావున]

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ -4 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & \lambda+1 \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow (-1)[3(\lambda+1)-21]-5[-4(\lambda+1)-3]\ \ -3[(-28)-3]=0$

$\Rightarrow -1(3\lambda-18)\ -5(-4\lambda-7)-3(-31)=0$

$\Rightarrow -3\lambda+18+20\lambda+35+93=0$

$\Rightarrow -3\lambda+20\lambda+35+93+18=0$

$\Rightarrow 17\lambda+146=0$

$\Rightarrow 17\lambda=-146$

$\Rightarrow \lambda=-146/17$

BABY BULLET-Q

13. $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}, \bar{b}=-\bar{i}+2\bar{j}-4\bar{k}, \bar{c}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$ **అయిన** $(\bar{a}\times\bar{b}).(\bar{b}\times\bar{c})$ **ను కనుగొనుము.**

A: దత్తాంశం నుండి $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}, \bar{b}=-\bar{i}+2\bar{j}-4\bar{k}$ and $\bar{c}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$

ఇప్పుడు $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 2 & -4\end{vmatrix} = \bar{i}(-4+2)-\bar{j}(-8-1)+\bar{k}(4+1) = -2\bar{i}+9\bar{j}+5\bar{k}$

మరియు $\bar{b}\times\bar{c}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & 2 & -4\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = \bar{i}(2+4)-\bar{j}(-1+4)+\bar{k}(-1-2) = 6\bar{i}-3\bar{j}-3\bar{k}$

$(\bar{a}\times\bar{b}).(\bar{b}\times\bar{c}) = (-2\bar{i}+9\bar{j}+5\bar{k}).(6\bar{i}-3\bar{j}-3\bar{k}) = (-2)(6)+(9)(-3)+5(-3) = -12-27-15 = -54$

$\therefore (\bar{a}\times\bar{b}).(\bar{b}\times\bar{c}) = 54$

---

14. $A\in R$ **అయితే** $\cos A\cos\left(\frac{\pi}{3}+A\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-A\right)=\frac{1}{4}\cos 3A$ **అని నిరూపించి తద్వారా** $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{16}$ **అని రాబట్టండి.**

A: $L.H.S=\cos A\cos\left(\frac{\pi}{3}+A\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-A\right)=\cos A\left(\cos^2\frac{\pi}{3}-\sin^2 A\right)$

$=\cos A\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(1-\cos^2 A\right)\right]=\cos A\left[\frac{1}{4}-1+\cos^2 A\right]$

$=\cos A\left(\frac{1-4+4\cos^2 A}{4}\right)=\frac{1}{4}\cos A(4\cos^2 A-3) = \frac{1}{4}[4\cos^3 A-3\cos A]=\frac{1}{4}\cos 3A = R.H.S$

$\therefore \cos A\cos(60^\circ+A)\cos(60^\circ-A)=\frac{1}{4}\cos 3A$

$A=20^\circ$ అయిన $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{4}\cos 60^\circ$

ఇరువైపులా $\cos 60^\circ$ తో గుణించగా $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{4}\cos^2 60^\circ$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$

BABY BULLET-Q

15. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ అయిన $\cot^2 x - (\sqrt{3}+1)\cot x + \sqrt{3} = 0$ ను సాధించుము.

A: దత్తాంశం నుండి $\cot^2 x - (\sqrt{3}+1)\cot x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cot^2 x - \sqrt{3}\cot x - \cot x + \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \cot x(\cot x - \sqrt{3}) - (\cot x - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow (\cot x - 1)(\cot x - \sqrt{3}) = 0$

$\Rightarrow \cot x - 1 = 0$ (or) $\cot x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cot x = 1$ (or) $\cot x = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan x = 1$ (or) $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan x = 1 = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}; \quad \left[\because 0 < x < \frac{\pi}{2}\right]$

$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ సాధనలు $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$

---

16. $\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2} + \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5} + \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$ అని నిరూపించండి.

A: $\mathrm{Tan}^{-1}x + \mathrm{Tan}^{-1}y = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ అని మనకు తెలుసు

$$\therefore \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2} + \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5} = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}\right) = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\frac{5+2}{\cancel{10}}}{\frac{10-1}{\cancel{10}}}\right) = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{7}{9}$$

$$\therefore \text{L.H.S} = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{7}{9} + \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{8} = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{8}}\right) = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\frac{56+9}{\cancel{72}}}{\frac{72-7}{\cancel{72}}}\right)$$

$$= \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{65}{65}\right) = \mathrm{Tan}^{-1}1 = \frac{\pi}{4} = \text{R.H.S}$$

---

17. ΔABC లో $\frac{b^2 - c^2}{a^2} = \frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}$ అని చూపండి.

A: $\text{L.H.S} = \frac{b^2-c^2}{a^2} = \frac{(2R\sin B)^2 - (2R\sin C)^2}{(2R\sin A)^2} = \frac{4R^2(\sin^2 B - \sin^2 C)}{4R^2\sin^2 A}$

$$= \frac{\sin^2 B - \sin^2 C}{\sin^2 A} = \frac{\cancel{\sin(B+C)}\sin(B-C)}{\sin^{\cancel{2}}(B+C)} = \frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \text{R.H.S}$$

సెక్షన్-సి

18. $f:A\to B$ ద్విగుణ ప్రమేయం అయిన (i) $fof^{-1}=I_B$ (ii) $f^{-1}of=I_A$ అని నిరూపించండి.

Sol: (i) $f\,of^{-1}=I_B$ అని చూపుట:

Part-1: $f:A\to B$ ద్విగుణ ప్రమేయం. కావున $f^{-1}: B\to A$ కూడా ద్విగుణ ప్రమేయం అగును.

$\therefore\ fof^{-1}: B\to B$

$I_B: B\to B$ అని మనకు తెలుసు

కావున fof^{-1} మరియు I_B అనే ప్రమేయాలకు ఒకే ప్రదేశం B కలదు.

Part-2: $b\in B$ నకు $(fof^{-1})(b)=f\,[f^{-1}(b)]$

$=f(a)$ [$\because f:A\to B$ ద్విగుణ ప్రమేయం $\Rightarrow f(a)=b \Rightarrow f^{-1}(b)=a$]

$=b=I_B(b)$ [$\because\ b\in B$ నకు $I_B(b)=b$]

కావున $fof^{-1}=I_B$అని నిరూపించబడినది.

(ii) $f^{-1}of=I_A$ అని చూపుట:

Part-1: $f:A\to B$ ద్విగుణ ప్రమేయం కావున $f^{-1}:B\to A$ కూడా ద్విగుణ ప్రమేయం అగును.

$\therefore\ f^{-1}of : A\to A$

$I_A: A\to A$ అని మనకు తెలుసు.

$f^{-1}of$ మరియు I_A అనే ప్రమేయాలకు ఒకే ప్రదేశం A కలదు.

Part-2: $a\in A$ నకు $(f^{-1}of)(a)=f^{-1}[f(a)]$

$= f^{-1}(b)= a$ [$\because f:A\to B$ ద్విగుణ ప్రమేయం$\Rightarrow f(a)=b\Rightarrow f^{-1}(b)=a$]

$= I_A(a)$[$\because a\in A$ నకు $I_A(a)=a$]

$f^{-1}of=I_A$ అని నిరూపించబడినది.

BABY BULLET-Q

19. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+.....+n$ పదాల వరకు $=\frac{n}{2n+1}$ అని చూపండి

Sol: **n వ పదము కనుగొనుట:**

1,3,5... లు అంకశ్రేఢిలో ఉన్నాయి. ఇక్కడ a=1, d=2

$\therefore T_n = a+(n-1)d \Rightarrow T_n=1+(n-1)2=1+2n-2=2n-1$

3,5,7... లు అంకశ్రేఢిలో ఉన్నాయి. ఇక్కడ a=3, d=2

$\therefore T_n=3+(n-1)2=3+2n-2=2n+1$

$\therefore$ n వ పదము $T_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$$S(n) : \frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+.....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

Step 1: S(1) యొక్క $L.H.S=\frac{1}{1.3}=\frac{1}{3}$;

S(1) యొక్క $R.H.S=\frac{1}{2.1+1}=\frac{1}{3}$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S.

కావున S(1) సత్యము

Step 2: $k\in N$ నకు S(k) సత్యము అనుకొనుము.

$$S(k) : \frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+.....+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1} \quad .....(1)$$

Step 3: ఇప్పుడు S(k+1) సత్యమని చూపవలెను.

(k+1) వ పదము $=\frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}=\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

(1)నకు ఇరువైపులా (k+1) పదాన్ని కలుపగా

$$L.H.S=\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+.....+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right]+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)\cancel{(2k+1)}}{\cancel{(2k+1)}(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}=\frac{k+1}{2k+2+1}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}=R.H.S$$

$\therefore$ L.H.S =R.H.S.

కావున, S(k) సత్యమైన S(k+1) కూడా సత్యమగును.

కావున పరిమిత గణితానుగమన సిద్ధాంతం నుంచి ప్రతి $n\in N$ కి దత్త ప్రవచనం S(n) సత్యం

20. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = (a^3+b^3+c^3-3abc)^2$ అని చూపండి.

Sol: $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ అనుకొనుము

$$= a(bc-a^2) - b(b^2-ac) + c(ab-c^2)$$

$$= abc - a^3 - b^3 + abc + abc - c^3$$

$$= -(a^3+b^3+c^3-3abc)$$

$$\Rightarrow \Delta^2 = (a^3+b^3+c^3-3abc)^2 \text{...............}(1)$$

మరల $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

మొదటి నిర్ధారకము మీద C_{23} ను అనువర్తించగా

$$= -\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -a & c & b \\ -b & a & c \\ -c & b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -a^2+cb+bc & \cancel{-ab}+c^2\cancel{+ab} & \cancel{-ac}+\cancel{ac}+b^2 \\ \cancel{-ab}\cancel{+ab}+c^2 & -b^2+ac+ca & \cancel{-bc}+a^2+\cancel{cb} \\ \cancel{-ca}+b^2\cancel{+ac} & \cancel{-cb}\cancel{+bc}+a^2 & -c^2+ba+ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} \text{................}(2)$$

(1), (2) లనుండి ఇచ్చిన ఫలితము నిరూపించబడినది.

BABY BULLET-Q

21. **2x–y+3z=8, –x+2y+z=4, 3x+y–4z=0 సమీకరణాలను మాత్రికా విలోమ పద్ధతిన సాధించండి.**

Sol: ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థ యొక్క మాత్రికా సమీకరణ రూపం: $AX = D$

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -4\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}8\\4\\0\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

∴ AX=D యొక్క సాధన $X=A^{-1}D$ అగును.

ఇప్పుడు A^{-1} కనుగొందాం.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -4\end{vmatrix}=2(-8-1)+1(4-3)+3(-1-6)=2(-9)+1(1)+3(-7)=-18+1-21=-38$$

$$\text{Adj}A=\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & -4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}(-8-1) & -(4-3) & (-1-6)\\ -(4-3) & (-8-9) & -(2+3)\\ (-1-6) & -(2+3) & (4-1)\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-9 & -1 & -7\\ -1 & -17 & -5\\ -7 & -5 & 3\end{bmatrix}^T$$

$$\Rightarrow \text{Adj }A=\begin{bmatrix}-9 & -1 & -7\\ -1 & -17 & -5\\ -7 & -5 & 3\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{adj}A)=\frac{1}{-38}\begin{bmatrix}-9 & -1 & -7\\ -1 & -17 & -5\\ -7 & -5 & 3\end{bmatrix}$$

$$\therefore X=A^{-1}.D=\frac{-1}{38}\begin{bmatrix}-9 & -1 & -7\\ -1 & -17 & -5\\ -7 & -5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\4\\0\end{bmatrix}=\frac{-1}{38}\begin{bmatrix}-72-4-0\\ -8-68-0\\ -56-20-0\end{bmatrix}=\frac{-1}{38}\begin{bmatrix}-76\\-76\\-76\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$$

$$\therefore X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$$

∴ సాధన x=2, y=2, z=2

BABY BULLET-Q

22. ఈ క్రింది అతలీయ రేఖల మధ్య కనిష్ఠ దూరము కనుగొనుము.

$\bar{r} = (6\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}) + t(\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k})$ మరియు $\bar{r} = (-4\bar{i} - \bar{k}) + s(3\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k})$

Sol: దత్త అతలీయ రేఖలు $\bar{r} = (6\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}) + t(\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k})$; $\bar{r} = (-4\bar{i} - \bar{k}) + s(3\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k})$

సూత్రం: $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}$, $\bar{r} = \bar{c} + s\bar{d}$ రేఖల మధ్య కనిష్ఠ దూరము(SD)= $\dfrac{|(\bar{a} - \bar{c}).(\bar{b} x \bar{d})|}{|\bar{b} x \bar{d}|}$

దత్త రేఖలను $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}$, $\bar{r} = \bar{c} + s\bar{d}$ తో పోల్చగా

$\bar{a} = 6\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$ and $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$

$\bar{c} = -4\bar{i} - \bar{k}$ and $\bar{d} = 3\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$

కావున, $\bar{a} - \bar{c} = (6\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}) - (-4\bar{i} - \bar{k}) = 10\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$

$$\bar{b} \times \bar{d} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \bar{i}(4+4) - \bar{j}(-2-6) + \bar{k}(-2+6) = 8\bar{i} + 8\bar{j} + 4\bar{k}$$

$\therefore (\bar{a} - \bar{c}).(\bar{b} \times \bar{d}) = (10\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}).(8\bar{i} + 8\bar{j} + 4\bar{k}) = 80+16+12 = 108$

మరియు $|\bar{b} \times \bar{d}| = \sqrt{8^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 64 + 16} = \sqrt{144} = 12$

$\therefore$ కనిష్ఠ దూరం(SD) = $\dfrac{|(\bar{a} - \bar{c}).(\bar{b} \times \bar{d})|}{|\bar{b} \times \bar{d}|} = \dfrac{108}{12} = 9$

---

23. $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ అయిన cos2A+cos2B+cos2C=1+4sinAsinBsinC అని నిరూపించండి.

A: L.H.S = cos2A+cos2B+cos2C $= 2\cos\left(\dfrac{2A+2B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{2A-2B}{2}\right) + \cos 2C$

$= 2\cos(A+B)\cos(A-B) + \cos 2C = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - C\right)\cos(A-B) + \cos 2C$

$= 2\sin C\cos(A-B) + (1-2\sin^2 C)$ $[\because \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta]$

$= 1 + 2\sin C[\cos(A-B) - \sin C] = 1 + 2\sin C[\cos(A-B) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - (A+B)\right)]$

$= 1 + 2\sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)] = 1 + 2\sin C[2\sin A\sin B]$

$= 1 + 4\sin A\sin B\sin C$ = R.H.S

BABY BULLET-Q

24. **$r + r_1 + r_2 - r_3 = 4R\cos C$ అని నిరూపించండి.**

A: L.H.S $= r + r_1 + r_2 - r_3 = (r + r_1) + (r_2 - r_3)$

$$= \left(4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right) + \left(4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right) + 4R\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right) + 4R\cos\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right)$$

$$= 4R\left[\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right) + \cos\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right)\right]$$

$$= 4R\sin\left[\frac{A}{2} + \frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right] \qquad \left[\because A + B + C = 180^\circ \Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ\right]$$

$$= 4R\sin(90^\circ - C) = 4R\cos C = \text{R.H.S}$$

BABY BULLET-Q