2B (TM)

Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH-2020 (AP)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2020(AP)

Time : 3 Hours **గణితశాస్త్రం – 2B** Max.Marks : 75

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: **10 × 2 = 20**

1. $x^2+y^2-8x-8y+27=0$ వృత్తము యొక్క వ్యాసాగ్రం ఒక కొన $(2, 3)$ అయిన దాని రెండవకొన కనుగొనుము.
2. $x^2+y^2=9$ అనే వృత్తం దృష్ట్యా $(1,1)$ యొక్క స్పర్శ జ్యా సమీకరణం కనుగొనుము.
3. $x^2+y^2-5x-14y-34=0$, $x^2+y^2+2x+4y+k=0$ అనే వృత్తాలు లంబంగా ఖండించుకుంటే k విలువ కనుగొనుము.
4. శీర్షము $(3,-2)$, నాభి $(3, 1)$ గా గల పరావలయ సమీకరణం కనుగొనుము.
5. $x^2-4y^2=5$ అతిపరావలయానికి $3x-4y+k=0$ స్పర్శరేఖ అయిన k విలువ కనుగొనుము.
6. $\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}dx$ ను గణించండి
7. $\int x\log x\, dx$ ను గణించండి
8. $\underset{n\to\infty}{Lt} \frac{1^4+2^4+3^4+..+n^4}{n^5}$ ను గణించండి.
9. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x\cos^4 x\, dx$ ను గణించండి.
10. $y(1+x)dx+x(1+y)dy=0$ ను సాధించండి

సెక్షన్-బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. **5 × 4 = 20**

11. $x^2+y^2-a^2=0$ వృత్తంపై (x_1, y_1) బిందువు వద్ద గీచిన స్పర్శరేఖ, నిరూపకాక్షాలతో ఏర్పరచే త్రిభుజ వైశాల్యం కనుగొనుము.
12. $x^2+y^2+2gx+2fy=0$, $x^2+y^2+2g'x+2f'y=0$ అనే వృత్తాలు ఒకదానికొకటి స్పృశించుకుంటే $f'g=fg'$ అని చూపండి.
13. ఒక దీర్ఘవృత్తం నాభులు S, T లు. హ్రస్వాక్షం ఒక కొన B. STB ఒక సమబాహు త్రిభుజం అయితే, దీర్ఘవృత్తం ఉత్కేంద్రత కనుక్కోండి.
14. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ దీర్ఘవృత్తానికి $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ స్పర్శరేఖ కావడానికి నియమం కనుక్కోండి.
15. $x^2-4y^2=4$ అనే అతిపరావలయం యొక్క కేంద్రం, ఉత్కేంద్రత, నాభులు, నియత రేఖ సమీకరణం, నాభిలంబం పొడవులను కనుగొనుము.
16. $y^2=4x$, $x^2=4y$ అనే పరావలయములచే ఏర్పడు ప్రదేశ వైశాల్యము కనుగొనుము.
17. $(x^2+y^2)dx=2xydy$ ను సాధించుము

సెక్షన్-సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. **5 ×7 = 35**

18. $(4, 1)$ $(6, 5)$ బిందువులు గుండా పోతూ, $4x+3y-24=0$ రేఖపై కేంద్రము ఉండే వృత్త సమీకరణం కనుగొనుము.
19. $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ వృత్తాన్ని $(5, 5)$ వద్ద బాహ్యంగా స్పృశిస్తూ 5 యూనిట్లు వ్యాసార్ధము ఉన్న వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.
20. పరావలయము $y^2=4ax$ కు బాహ్య బిందువు P నుంచి గీచిన స్పర్శరేఖలు అక్షరేఖతో θ_1,θ_2 కోణాలు చేస్తున్నాయి. $\tan\theta_1+\tan\theta_2$ విలువ స్థిరం b అయితే $y=bx$ రేఖపై P ఉంటుందని చూపండి.
21. $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$ ను గణించండి.
22. $I_n=\int \cos^n x dx$ అయిన $I_n=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ అని నిరూపించండి. దానినుండి $\int \cos^4 x dx$ ను గణించుము.
23. $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)$ అని చూపండి.
24. $x\log x\frac{dy}{dx}+y=2\log x$ ను సాధించండి.

IPE AP MARCH-2020
SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

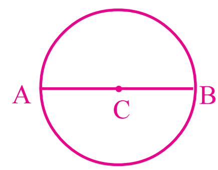
1. **$x^2+y^2-8x-8y+27=0$ వృత్తము యొక్క వ్యాసాగ్రం ఒక కొన (2, 3) అయిన దాని రెండవకొన కనుగొనుము.**

A: దత్త వృత్తము $x^2+y^2-8x-8y+27=0$

దత్త వృత్తమును x $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$తో పోల్చగా కేంద్రం $=(-g,-f)=(4,4)$

రెండవ కొన (α,β)అనుకొనుము

కేంద్రం $=(\alpha,\beta)$, (2,3) ల మధ్య బిందువు



$$(4,4)=\left(\frac{\alpha+2}{2},\frac{\beta+3}{2}\right)\Rightarrow \alpha+2=8;\beta+2=8 \Rightarrow \alpha=8-2=6;\ \alpha=8-3=5$$

$\therefore$ రెండవ కొన $=(6,5)$

---

2. **$x^2+y^2=9$ అనే వృత్తం దృష్ట్యా (1,1) యొక్క స్పర్శ జ్యా సమీకరణం కనుగొనుము.**

Sol: దత్త బిందువు $P(x_1,y_1)=(1,1)$ మరియు వృత్తం $S=x^2+y^2-9=0$

$S=x^2+y^2-9=0$ అనే వృత్తం దృష్ట్యా P(1,1) యొక్క స్పర్శ జ్యా సమీకరణం $S_1=0\Rightarrow x_1x+y_1y-r^2=0$

$\Rightarrow 1(x)+1(y)-9=0\Rightarrow x+y-9=0$

---

3. **$x^2+y^2-5x-14y-34=0$, $x^2+y^2+2x+4y+k=0$ అనే వృత్తాలు లంబంగా ఖండించుకుంటే k విలువ ఎంత?**

Sol: ఇక్కడ $g=-5/2$, $f=-7$, $c=-34$ మరియు $g'=1$, $f'=2$, $c'=k$

వృత్తాల లంబచ్ఛేదన నియమం: $2gg'+2ff'=c+c'$

$$\Rightarrow \not{2}\left(\frac{-5}{\not{2}}\right)(1)+2(-7)(2)=-34+k$$

$$\Rightarrow -5-28=-34+k\Rightarrow k=-33+34=1$$

BABY BULLET-Q

4. శీర్షము (3,−2), నాభి (3,1) గా గల పరావలయ సమీకరణం కనుగొనుము.

Sol: శీర్షము A=(3, −2), నాభి S=(3,1) ఇచ్చుట A, S ల x-నిరూపకాలు సమానం.

∴ అక్షము y-అక్షానికి సమాంతరం మరియు పరావలయము క్షితిజ లంబంగా ఉంటుంది

(∵ నాభి S, శీర్షము A కంటే పైన ఉన్నది)

$a = AS = \sqrt{(3-3)^2+(1+2)^2} = \sqrt{9} = 3$

∴ శీర్షము (h,k)=(3,−2) వద్ద గల

పరావలయ సమీకరణము $(x-h)^2 = 4a(y-k) \Rightarrow (x-3)^2=4(3)(y-(-2))$

$\Rightarrow (x-3)^2=12(y+2)$

---

5. $x^2-4y^2=5$ అతిపరావలయానికి $3x-4y+k=0$ స్పర్శరేఖ అయిన k విలువ కనుగొనుము.

Sol: ఇచ్చిన అతిపరావలయం $x^2-4y^2=5 \Rightarrow \frac{x^2}{5}-\frac{4y^2}{5}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{5/4}=1 \Rightarrow a^2=5$ మరియు $b^2=5/4$

$3x-4y+k=0$ ను $lx+my+n=0$ తో పోల్చగా $l=3, m=-4, n=k$

స్పర్శరేఖ నియమం: $n^2 = a^2l^2 - b^2m^2$

$\Rightarrow (k)^2 = 5(3^2) - \frac{5}{4}(-4)^2 = 45-20=25$

$\therefore k^2 = 25 \Rightarrow k = \pm 5$

Try this: $3x-4y+k=0$ ను $y=mx+c$ రేఖపైకు మార్చి $c^2=a^2m^2-b^2$ అనే నియమంను అనువర్తించవలెను.

---

6. $\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}dx$ ను గణించండి.

Sol: $1+\sin x=t \Rightarrow \cos x\, dx = dt$

$$\therefore I = \int \frac{\cos x dx}{(1+\sin x)^2} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}+c = \frac{-1}{1+\sin x}+c$$

BABY BULLET-Q

7. **$\int x\log x\,dx$ ను గణించండి.**

Sol : మొదటి ప్రమేయం u=logx మరియు రెండవ ప్రమేయం v = x

విభాగ సమాకలన సూత్రం నుండి

$$I=\int \log x.xdx=(\log x)\left(\frac{x^2}{2}\right)-\int\frac{1}{x}.\frac{x^2}{2}dx \quad =(\log x)\left(\frac{x^2}{2}\right)-\int\frac{x}{2}dx$$

$$=(\log x)\left(\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{2}.\frac{x^2}{2}+c=(\log x)\left(\frac{x^2}{2}\right)-\frac{x^2}{4}+c$$

---

8. **$\underset{n\to\infty}{Lt}\dfrac{1^4+2^4+3^4+..+n^4}{n^5}$ ను గణించండి.**

Sol: $$\underset{n\to\infty}{Lt}\frac{1^4+2^4+3^4+..+n^4}{n^5}=\underset{n\to\infty}{Lt}\sum_{r=1}^{n}\frac{r^4}{n^5}=\underset{n\to\infty}{Lt}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{r}{n}\right)^4=\int_0^1 x^4dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{5}$$

---

9. **$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2x\cos^4x\,dx$ ను గణించండి.**

Sol : $f(x)=\sin^2x\cos^4x \Rightarrow f(-x)=\sin^2(-x)\cos^4(-x)=(-\sin x)^2(\cos x)^4=\sin^2x\cos^4x=f(x)$

$\therefore$ f(x) సరి ప్రమేయం

$$\therefore \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2x\cos^4x\,dx=2\int_0^{\pi/2}\sin^2x.\cos^4x\,dx \quad =2\frac{[(1)][(3)(1)]}{(6)(4)(2)}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16}$$

---

10. **y(1 + x) dx + x(1 + y) dy = 0 ను సాధించండి.**

Sol: దత్త అవకలన సమీకరణం $y(1+x)\,dx+x(1+y)\,dy=0 \Rightarrow x(1+y)\,dy=-y(1+x)\,dx$

$$\Rightarrow\frac{(1+y)dy}{y}=-\frac{(1+x)dx}{x}\Rightarrow\int\frac{(1+y)dy}{y}=-\int\frac{(1+x)dx}{x}\Rightarrow\int\left(\frac{1}{y}+1\right)dy=-\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx$$

$\Rightarrow \log y+y=-\log x-x+c\Rightarrow y+x+\log y+\log x=c$

$\therefore$ సాధన $y+x+\log(yx)=c$

సెక్షన్-బి

11. $x^2+y^2-a^2=0$ వృత్తంపై (x_1,y_1) బిందువు వద్ద గీచిన స్పర్శరేఖ, నిరూపకాక్షాలతో ఏర్పరచే త్రిభుజ వైశాల్యం కనుగొనుము.

> $O=(0,0), A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$
> వైశాల్యం $= \frac{1}{2}|(x_1y_2 - x_2y_1)|$

Sol : దత్త బిందువు $P(x_1,y_1)$ మరియు వృత్తం $S=x^2+y^2-a^2=0$.

$S=x^2+y^2-a^2=0$ వృత్తంపై (x_1,y_1) వద్ద గీచిన స్పర్శరేఖ సమీకరణము $S_1=xx_1+yy_1-a^2=0$

$\therefore$ ఈ స్పర్శరేఖ, నిరూపకాక్షాలతో ఏర్పరచే త్రిభుజవైశాల్యము

$$\Delta = \frac{1}{2}|(x-\text{అంతరఖండం})(y-\text{అంతరఖండం})| = \frac{1}{2}\left|\frac{a^2}{x_1}.\frac{a^2}{y_1}\right| = \frac{a^4}{2|x_1y_1|} \text{ చ.యూ.}$$

---

12. $x^2+y^2+2gx+2fy=0$, $x^2+y^2+2g'x+2f'y=0$ అనే వృత్తాలు ఒకదానికొకటి స్పృశించుకుంటే $f'g=fg'$ అని చూపండి.

Sol: ఇచ్చిన రెండు వృత్త సమీకరణాలలో స్థిరపదము లేదు

$\therefore$ ఆ వృత్తములు $O(0,0)$ గుండా పోవును.

ఆ వృత్తములు స్పృశించుకుంటే $O(0,0)$ మరియు కేంద్రాలు

$C_1=(-g,-f)$, $C_2=(-g',-f')$ సరేఖీయములగును.

$\Rightarrow \Delta OC_1C_2$ యొక్క వైశాల్యము $=0$

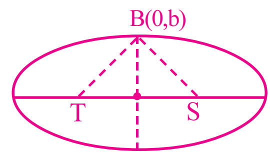
$\Rightarrow \frac{1}{2}[(-g)(-f')+(f)(-g')]=0 \Rightarrow gf'-fg'=0 \Rightarrow fg' = f'g.$

BABY BULLET-Q

13. **ఒక దీర్ఘవృత్తం నాభులు S, T లు. హ్రస్వాక్షం ఒక కొన B. STB ఒక సమబాహు త్రిభుజం అయితే, దీర్ఘవృత్తం ఉత్కేంద్రత కనుక్కోండి.**

Sol: దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ (a>b)$ అనుకొనుము.

S(ae,0), T=(–ae,0) లు రెండు నాభులు మరియు B(0,b) అనునది హ్రస్వాక్షం ఒక కొన.



రెండు నాభుల మధ్య దూరం ST=2ae

ఇప్పుడు ΔSTB సమబాహు త్రిభుజం $\Rightarrow$ SB=ST=TB.

ఇప్పుడు SB=ST $\Rightarrow (SB)^2=(ST)^2$

$\Rightarrow (ae)^2+b^2=(2ae)^2=4a^2e^2$

$\Rightarrow a^2e^2+a^2(1-e^2)=4a^2e^2\ [\because b^2=a^2(1-e^2)]$

$\Rightarrow e^2+(1-e^2)=4e^2 \Rightarrow 4e^2=1 \Rightarrow e^2=\frac{1}{4} \Rightarrow e=\frac{1}{2}$

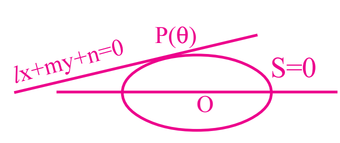
$\therefore$ దీర్ఘవృత్త ఉత్కేంద్రత e=1/2

---

14. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **దీర్ఘవృత్తానికి $lx+my+n=0$ స్పర్శరేఖ కావడానికి నియమం కనుక్కోండి.**

Sol: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ దీర్ఘవృత్తానికి $P(\theta)=(a\cos\theta, b\sin\theta)$ వద్ద స్పర్శరేఖ $lx+my+n=0$ అనుకొందాం.

దీర్ఘవృత్తంపై $P(\theta)$ వద్ద స్పర్శరేఖ $\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1$



పై సమీకరణాన్ని $lx+my=-n$ తో పోల్చగా

$\frac{\cos\theta}{al}=\frac{\sin\theta}{bm}=\frac{-1}{n} \Rightarrow \cos\theta=-\frac{al}{n}, \sin\theta=\frac{-bm}{n}$

ఇప్పుడు $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

$\Rightarrow \frac{a^2l^2}{n^2}+\frac{b^2m^2}{n^2}=1 \Rightarrow a^2l^2+b^2m^2=n^2$

BABY BULLET-Q

15. **$x^2-4y^2=4$ అనే అతిపరావలయం యొక్క కేంద్రం, ఉత్కేంద్రత, నాభులు, నియత రేఖ సమీకరణం, నాభిలంబం పొడవులను కనుగొనుము.**

Sol: ఇచ్చిన అతిపరావలయ సమీకరణం $x^2-4y^2=4$

$\Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$. ఇక్కడ $a^2=4, b^2=1$

(i) కేంద్రం C= (0,0)

(ii) ఉత్కేంద్రత $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{4+1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

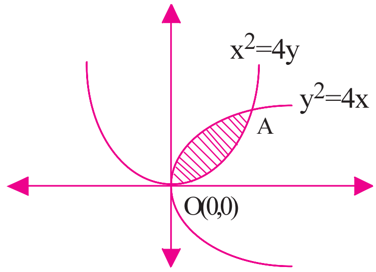
(iii) నాభులు= $(\pm ae,0)=\left(\pm 2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right),0\right)=\left(\pm\sqrt{5},0\right)$

(iv) నియతరేఖల సమీకరణం $x=\pm\frac{a}{e} \Rightarrow x=\pm\frac{2}{\frac{\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow x=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}$

(v) నాభిలంబం పొడవు $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(1)}{2}=1$

---

16. **$y^2=4x$, $x^2=4y$ అనే పరావలయములచే ఏర్పడు ప్రదేశ వైశాల్యము కనుగొనుము.**



Sol: దత్త వక్రములు $y^2=4x$ ....(1), $x^2=4y$ .....(2)

(1),(2) లను సాధించగా, $x^2=4y \Rightarrow x^4=16y^2=16(4x)=4^3x$.

$\Rightarrow x=0$ (లేదా) $x^3=4^3 \Rightarrow x=4$

ఎగువపు వక్రము $y^2=4x \Rightarrow y=2\sqrt{x}$

దిగువపు వక్రము $x^2=4y \Rightarrow y=x^2/4$

$\therefore$కావలసిన వైశాల్యము $A=\int_0^4\left(2\sqrt{x}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left[2\times\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^3}{12}\right]_0^4=\frac{32}{3}-\frac{16}{3}=\frac{16}{3}$ చ.యూ.

BABY BULLET-Q

17. **$(x^2+y^2)dx=2xydy$ ను సాధించండి.**

Sol: దత్త అవకలన సమీకరణము $(x^2+y^2)dx = 2xydy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}$ .....(1)

. ఇది ఒక సమఘాత అవకలన సమీకరణము.

$$y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

(1) నుండి $v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2+(vx)^2}{2x(vx)} = \frac{x^2+v^2x^2}{2x^2v} = \frac{x^2(1+v^2)}{2x^2 v} = \frac{1+v^2}{2v}$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} - v = \frac{1+v^2-2v^2}{2v} = \frac{1-v^2}{2v}$$

$$\therefore x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{2v} \Rightarrow \frac{2vdv}{1-v^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{2vdv}{1-v^2} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow -\int\frac{-2vdv}{1-v^2} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow -\log(1-v^2) = \log x + \log c \Rightarrow \log x + \log(1-v^2) = \log c$$

$$\Rightarrow \log(x(1-v^2)) = \log c \Rightarrow x(1-v^2) = c \Rightarrow x\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right) = c; \quad \left(\because v = \frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2}\right) = c \Rightarrow \frac{x^2-y^2}{x} = c \Rightarrow x^2-y^2 = cx$$

$\therefore$ సాధన $x^2-y^2 = cx$

☞ 'c' is modified accordingly.

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-సి

18. 4,1), (6,5) బిందువులు గుండా పోతూ, 4x+3y–24=0 రేఖపై కేంద్రము ఉండే వృత్త సమీకరణం కనుగొనుము.

Sol: $A=(4,1), B=(6,5)$ అనుకోండి

$S(x_1,y_1)$ వృత్త కేంద్రం అనుకొనుము.

$\Rightarrow SA=SB \Rightarrow SA^2=SB^2$.

$\Rightarrow (x_1-4)^2+(y_1-1)^2=(x_1-6)^2+(y_1-5)^2$

$\Rightarrow (\cancel{x_1^2}-8x_1+16)+(\cancel{y_1^2}-2y_1+1)$

$=(\cancel{x_1^2}-12x_1+36)+(\cancel{y_1^2}-10y_1+25)$

$\Rightarrow 17-8x_1-2y_1=61-12x_1-10y_1$

$\Rightarrow 17-8x_1-2y_1-61+12x_1+10y_1=0$

$\Rightarrow 4x_1+8y_1-44=0$..... (1)

కాని(x_1,y_1) కేంద్రం $4x+3y-24=0$ పై ఉండును

$\Rightarrow 4x_1+3y_1-24=0$ .... (2)

$(2)-(1) \Rightarrow -5y_1+20=0 \Rightarrow 5y_1=20 \Rightarrow y_1=4$

(2)నుండి, $4x_1+3(4)-24=0 \Rightarrow 4x_1-12=0$

$\Rightarrow 4x_1=12 \Rightarrow x_1=3$

$\therefore$వృత్త కేంద్రం $S(x_1,y_1)=(3,4)$

మరియు $A=(4,1)$

వ్యాసార్థం $r=SA \Rightarrow r^2=SA^2$.

$\therefore r^2=(3-4)^2+(4-1)^2=1+9=10$

$\therefore$ కేంద్రం (3,4) మరియు $r^2=10$ గా గల

వృత్త సమీకరణం $(x-3)^2+(y-4)^2=10$

$\Rightarrow (x^2+9-6x)+(y^2+16-8y)=10$

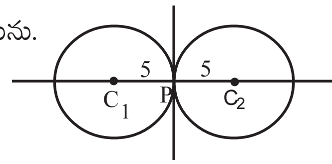
$\Rightarrow x^2+y^2-6x-8y+15=0$

BABY BULLET-Q

19. $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ వృత్తాన్ని (5,5) వద్ద బాహ్యంగా స్పృశిస్తూ 5 యూనిట్లు వ్యాసార్థము ఉన్న వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ అనే వృత్త కేంద్రం $C_1=(1, 2)$ వ్యాసార్థము $r_1=\sqrt{1+4+20}=\sqrt{25}=5$

కావలసిన వృత్త కేంద్రం C_2 మరియు వ్యాసార్థము r_2 అనుకుంటే $r_2=5$ అగును.



స్పర్శబిందువు P=(5,5) రెండు వృత్తములు బాహ్యముగా స్పృశించుకొనును

వ్యాసార్థాలు సమానం కావున C_1C_2యొక్క మధ్యబిందువు P(5,5) ఇక్కడ $C_1=(1, 2)$, $C_2=(x_1,y_1)$

$$\Rightarrow\left(\frac{x_1+1}{2},\frac{y_1+2}{2}\right)=(5,5)\Rightarrow\frac{x_1+1}{2}=5,\ \frac{y_1+2}{2}=5\Rightarrow x_1+1=10, y_1+2=10$$

$\Rightarrow x_1=9, y_1=8 \quad \therefore C_2=(9,8)$

కావలసిన వృత్తం యొక్క సమీకరణం$(x-9)^2+(y-8)^2=5^2 \Rightarrow x^2+y^2-18x-16y+120=0$

---

20. పరావలయము $y^2=4ax$ కు బాహ్య బిందువు P నుంచి గీచిన స్పర్శరేఖలు అక్షరేఖతో θ_1,θ_2 కోణాలు చేస్తున్నాయి. $\tan\theta_1+\tan\theta_2$ విలువ స్థిరం b అయితే y=bx రేఖపై P ఉంటుందని చూపండి.

Sol: బాహ్య బిందువు $P=(x_1,y_1)$ అనుకొనుము

$y^2=4ax$ పరావలయానికి m వాలు కలిగిన స్పర్శరేఖ సమీకరణం $y=mx+\frac{a}{m}$

ఈ స్పర్శరేఖ $P(x_1,y_1)$ గుండా పోతే $y_1=mx_1+\frac{a}{m}\Rightarrow m^2x_1-my_1+a=0$

పై సమీకరణము m లో ఒక వర్గ సమీకరణము మరియు దాని మూలాలు m_1, m_2 గా తీసుకుందాం.

ఇక్కడ , $m_1=\tan\theta_1$ మరియు $m_2=\tan\theta_2$.

అయిన $m_1+m_2=\frac{y_1}{x_1}\Rightarrow\tan\theta_1+\tan\theta_2=\frac{y_1}{x_1}\Rightarrow b=\frac{y_1}{x_1}(Q\ \tan\theta_1+\tan\theta_2=b)\Rightarrow y_1=bx_1$

కావున $P(x_1,y_1)$ అనే బిందువు y=bx అనే రేఖపై ఉండును.

BABY BULLET-Q

21. $\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$. ను గణించండి.

Sol: $\tan\frac{x}{2}=t$ then $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ and $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

$$\therefore I=\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx=\int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\left(\frac{2dt}{1+t^2}\right)=\int\frac{1}{\frac{(1+t^2)+2t+(1-t^2)}{\cancel{1+t^2}}}\cdot\frac{2dt}{\cancel{1+t^2}}$$

$$=\int\frac{2dt}{2+2t}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\int\frac{dt}{1+t}=\log|1+t|+c=\log\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$$

---

22. $I_n=\int \csc^n x dx$ నకు లఘూకరణ సూత్రమును రాబట్టి దానినుండి $\int \csc^5 x dx$ ను గణించుము.

Sol: $I_n=\int \csc^n x dx=\int \csc^{n-2}x\csc^2 x dx$.

మొదటి ప్రమేయము $u=\csc^{n-2}x$ మరియు రెండవ ప్రమేయము $v=\csc^2 x \Rightarrow \int v=-\cot x$

విభాగ సమాకలన సూత్రము ప్రకారము

$$I_n=\csc^{n-2}x(-\cot x)-\int(n-2)\csc^{n-3}x(-\csc x\cot x)(-\cot x)dx$$

$$=-\csc^{n-2}x\cot x-(n-2)\int\csc^{n-2}x\cot^2 x dx$$

$$=-\csc^{n-2}x\cot x-(n-2)\int\csc^{n-2}x(\csc^2 x-1)dx$$

$$=-\csc^{n-2}x\cot x-(n-2)\int\csc^n x dx+(n-2)\int\csc^{n-2}x dx$$

$$I_n=-\csc^{n-2}x\cot x-(n-2)I_n+(n-2)I_{n-2}$$

$$\Rightarrow I_n+(n-2)I_n=\csc^{n-2}x\cot x+(n-2)I_{n-2}$$

$$\Rightarrow I_n(1+n-2)=-\csc^{n-2}x\cot x+(n-2)I_{n-2}$$

$$\Rightarrow I_n(n-1)=-\csc^{n-2}x\cot x+(n-2)I_{n-2}\Rightarrow I_n=-\frac{\csc^{n-2}x\cot x}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$$

n=5,3,1 విలువలను వరుసగా (1)లో ప్రతిక్షేపించగా, $I_5=\int\csc^5 x dx=\frac{-\csc^3 x\cot x}{4}+\frac{3}{4}I_3$

$$=-\frac{\csc^3 x\cot x}{4}+\frac{3}{4}\left[\frac{-\csc x+\cot x}{2}+\frac{1}{2}I_1\right]\quad=-\frac{\csc^3 x\cot x}{4}-\frac{3\csc x\cot x}{8}+\frac{3}{8}\int\csc x dx$$

$$=-\frac{\csc^3 x\cot x}{4}-\frac{3\csc x\cot x}{8}+\frac{3}{8}\log|\csc x-\cot x|+c$$

$$\therefore I_5=\frac{\csc^3 x.\cot x}{4}-\frac{3}{8}\csc x\cot x\,]\qquad+\frac{3}{8}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$$

BABY BULLET-Q

23. $\int_0^{\pi/2}\frac{x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)$ అని చూపండి.

Sol: $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$ అని మనకు తెలుసు.

$$\therefore I=\int_0^{\pi/2}\frac{x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos x+\sin x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x+\cos x}-\int_0^{\pi/2}\frac{x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x+\cos x}-I$$

$$\Rightarrow I+I=2I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x+\cos x}\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{2}\left(\sin x\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\left[\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right]}$$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin\left[x+\frac{\pi}{4}\right]}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\operatorname{cosec}\left[x+\frac{\pi}{4}\right]dx=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\log\left[\tan\left(\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\right]_0^{\pi/2}$$ $\left[\because \int\csc x\,dx=\log\tan\frac{x}{2}\right]$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\log\left[\tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left[\log\left(\tan\frac{3\pi}{8}\right)-\log\left(\tan\frac{\pi}{8}+0\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\log\left(\tan\frac{3\pi}{8}\right)-\log\left(\tan\frac{\pi}{8}\right)\right]$$ $\left[\because \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi+2\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}\right]$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left[\log(\sqrt{2}+1)-\log(\sqrt{2}-1)\right]$$ $\left[\because \tan\frac{3\pi}{8}=\sqrt{2}+1;\ \tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1\right]$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left[\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\right]$$ $\left[\because \log a-\log b=\log\frac{a}{b}\right]$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\log\left[\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right)\right]=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\log\left[\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}\right]$$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}.2\log(\sqrt{2}+1)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.\log(\sqrt{2}+1)$$

BABY BULLET-Q

24. $x\log x \frac{dy}{dx} + y = 2\log x$ ను సాధించండి.

Sol: దత్త సమీకరణము $x\log x\frac{dy}{dx}+y=2\log x \Rightarrow \frac{dy}{dx}+y\left(\frac{1}{x\log x}\right)=\frac{2}{x}$.

పై సమీకరణము $\frac{dy}{dx}+yP(x)=Q(x)$.అనే రూపంలో కలదు. ఇది **y** లో రేఖీయ అవకలజ సమీకరణము.

ఇక్కడ $P(x)=\frac{1}{x\log x} \Rightarrow \int P(x)dx = \int \frac{1}{x\log x}dx = \log(\log x)$ $\left[\because \int \frac{f'(x)}{f(x)} = \log f(x)\right]$

$\therefore I.F = e^{\int P(x)dx} = e^{\log(\log x)} = \log x.$

$\therefore$ సాధన $y\,(I.F) = \int (I.F)Q(x)\,dx \Rightarrow y(\log x) = \int \log x\left(\frac{2}{x}\right)dx = 2\int \log x\left(\frac{dx}{x}\right)$

$\log x = t \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt$

$\therefore y(t) = 2\int t dt = \cancel{2}\left(\frac{t^2}{\cancel{2}}\right)+c \Rightarrow y(t)=t^2+c \Rightarrow y(\log x) = (\log x)^2 + c$

BABY BULLET-Q