JR MATHS-1B
(TM)

Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH -2020 (AP)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2020(AP)

Time : 3 Hours **గణితశాస్త్రం-1B** Max.Marks : 75

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: $10 \times 2 = 20$

1. బిందువు $(-4,5)$ గుండా పోతూ నిరూపకాక్షాలతో సమాన అంతర ఖండాలు చేసే సరళరేఖ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.
2. $x-4y+2=0$ సరళరేఖ నిరూపాక్షాలతో చేసే త్రిభుజ వైశాల్యంను కనుక్కోండి.
3. ΔABC యొక్క గురుత్వకేంద్రం ఆదిబిందువు మరియు $(1,1,1), (-2,4,1)$ లు A,B అనే శీర్షాలు అయితే ఆ త్రిభుజ మూడవ శీర్షము 'C' ను కనుగొనుము.
4. $(-2,1,3)$ బిందువు ద్వారా పోయే తలము యొక్క అభిలంబరేఖకు దిక్ సంఖ్యలు $(3,-5,4)$ అయితే తలానికి సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.
5. $\underset{x\to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\sin ax}{x\cos x}$ అవధి గణించండి.
6. $\underset{x\to\infty}{\mathrm{Lt}} \dfrac{11x^3-3x+4}{13x^3-5x^2-7}$ ను గణించుము.
7. $\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ ప్రమేయ అవకలజాన్ని కనుక్కోండి
8. అవకలజమును నిర్వచించండి
9. $y=x^2+3x+6$ అనే ప్రమేయానికి $x=10, \Delta x=0.01$ అయిన Δy, dy లను కనుగొనుము.
10. లెగ్రాంజ్ మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతమును నిర్వచించండి.

సెక్షన్-బి

II. ఈ క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 4 = 20$

11. $(-5,0), (5,0)$ బిందువుల నుంచి దూరాల భేదం 8 యూనిట్లుగాగల బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.
12. అక్షాలను α కోణంతో భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ రూపాంతర సమీకరణం కనుక్కోండి.
13. $4x-3y+12=0$ సమీకరణాన్ని(i) అంతరఖండరూపం (ii) అభిలంబ రూపంలోనికి మార్చుము.
14. $f(x)\dfrac{x^2-9}{(x^2-2x-3)}, 0<x5, x\neq 3$ అయితే $f(x)=1.5, x=3$ అయితే ద్వారా నిర్వచితమైన ప్రమేయం బిందువు 3 వద్ద అవిచ్ఛిన్నమేయో చూడండి.
15. అవకలజం ప్రాథమిక సూత్రం అనుసరించి $f(x)=\sin 2x$ ప్రమేయ అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.
16. $y=x^3+4x^2$ అనే వక్రం మీద $(-1,3)$ వద్ద స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబ రేఖ సమీకరణములను కనుగొనుము
17. తిరగేసిన శంకువు రూపంలో ఉన్న ఒక పాత్ర యొక్క ఎత్తు 8 సెం.మీ మరియు పైన వ్యాసార్థము 6 సెం.మీ. దానిని నీటితో 2 m^3/min చొప్పున నింపుతూ ఉంటే నీటి మట్టము 4మీ.ల వద్ద నీటి మట్టము పెరుగుదల రేటును కనుగొనుము.

సెక్షన్-సి

III. ఈ క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 7 = 35$

18. (a) $ax+by+c=0$ రేఖకు $P(x_1,y_1)$ నుంచి లంబపాదం $Q(h,k)$ అయిన $(h-x_1) : a=(k-y_1):b = -(ax_1+by_1+c) : (a^2+b^2)$ అని నిరూపించుము(b) $(4,1)$ నుండి $3x-4y+12=0$ అనే రేఖకు గల లంబపాదాన్ని కనుక్కోండి.
19. (a) $ax^2+2hxy+by^2=0$ సరళరేఖాయుగ్మపు మధ్య కోణం θ అయిన $\cos\theta = \dfrac{a+b}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$ అని చూపండి.
(b) $x^2-7xy+12y^2=0$ సరళరేఖా యుగ్మపు మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.
20. $x-y-\sqrt{2}=0$ సరళరేఖ, $x^2-xy+y^2+3x+3y-2=0$ వక్రాన్ని ఖండించే బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపితే ఏర్పడిన రేఖలు పరస్పరం లంబాలని చూపండి.
21. ఒక సమఘనము యొక్క రెండు కర్ణాల మధ్య కోణమును కనుగొనుము. **22.** $y=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right)$ అయిన $\dfrac{dy}{dx}$ ను కనుగొనుము.
23. $y^2=4x$ మరియు $x^2+y^2=5$ వక్రాల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.
24. ఒక కంపెనీ రోజుకు x వస్తువులు అమ్మగా వచ్చే లాభ ప్రమేయం $p(x)=(150-x)x-1600$. కంపెనీ గరిష్ట లాభం పొందడానికి ఆ కంపెనీ ఎన్ని వస్తువులను తయారు (ఉత్పత్తి) చేయాలో కనుక్కోండి. గరిష్ఠ లాభాన్ని కూడా కనుక్కోండి.

IPE AP MARCH-2020

SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. **బిందువు (–4,5) గుండా పోతూ నిరూపకాక్షాలతో సమాన అంతర ఖండాలు చేసే సరళరేఖ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.**

Sol: •అంతరఖండాలు సమానం. ★కావున అంతర ఖండాలు a,a అనుకొందాం.

అంతరఖండ రూపం: ★ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

•$\therefore \frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$

•$\Rightarrow x+y=a$ ....(1)

★కాని (–4,5) బిందువు (1) మీద ఉండును.

• $\Rightarrow -4+5=a \Rightarrow a=1$

★$\therefore$ x+y= 1

•$\Rightarrow$ x+y –1= 0

---

2. **x–4y+2=0 సరళరేఖ నిరూపకాక్షాలతో చేసే త్రిభుజ వైశాల్యంను కనుక్కోండి.**

Sol: దత్త సరళరేఖ యొక్క x- అంతరఖండం $-c/a=-2/1=-2$

దత్త సరళరేఖ యొక్క y- అంతరఖండం $-c/b=-2/-4=1/2$

దత్త సరళరేఖ నిరూపకాక్షాలతో చేసే త్రిభుజం వైశాల్యం

$$\Delta=\frac{1}{2}|x\text{–అంతర ఖండం}||y\text{ –అంతర ఖండం }|=\frac{1}{2}\left|-2\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2}\text{ sq.units}$$

3. ΔABC యొక్క గురుత్వకేంద్రం ఆదిబిందువు మరియు (1,1,1), (–2,4,1) లు A,B అనే శీర్షాలు అయితే ఆ త్రిభుజ మూడవ శీర్షము 'C' ను కనుగొనుము.

Sol: • A=(1,1,1), B=(–2,4,1) మరియు

• మూడవ శీర్షము C=(x_3,y_3,z_3)

• కేంద్రాభాసం G=(0,0,0).

★ ΔABC త్రిభుజ కేంద్రాభాసం

★ $$G=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

★ $$\Rightarrow\left(\frac{1-2+x_3}{3},\frac{1+4+y_3}{3},\frac{1+1+z_3}{3}\right)=(0,0,0)$$

★ $$\Rightarrow\left(\frac{x_3-1}{3},\frac{y_3+5}{3},\frac{z_3+2}{3}\right)=(0,0,0)$$

• $\Rightarrow x_3-1=0\Rightarrow x_3=1;$

• $y_3+5=0\Rightarrow y_3=-5;$

• $z_3+2=0\Rightarrow z_3=-2$

• కావున మూడవ శీర్షము C=(1,–5,–2)

---

4. (–2,1,3) బిందువు ద్వారా పోయే తలము యొక్క అభిలంబరేఖకు దిక్ సంఖ్యలు (3,–5,4) అయితే తలానికి సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: (x,y,z) అనే బిందువు గుండా పోవుచూ a,b,c లు తలము అభిలంబరేఖ దిక్ సంఖ్యలుగా గల సమీకరణము

$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$. ఇక్కడ $(x_1,y_1,z_1)=(-2,1,3)$ మరియు $a=3,\ b=-5,\ c=4$

$\therefore$ కావలసిన సమీకరణము $3(x+2)-5(y-1)+4(z-3)=0\Rightarrow 3x+6-5y+5+4z-12=0\ \Rightarrow 3x-5y+4z-1=0.$

---

5. $\underset{x\to 0}{Lt}\dfrac{\sin ax}{x\cos x}$ అవధి గణించండి.

A: $$\underset{x\to 0}{Lt}\frac{\sin ax}{x\cos x}=\underset{x\to 0}{Lt}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)\frac{1}{(\cos x)}=a\frac{1}{(\cos 0)}=a\frac{1}{1}=a \qquad \left(\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k\right)$$

6. $\underset{x\to\infty}{Lt}\dfrac{11x^3-3x+4}{13x^3-5x^2-7}$ **ను గణించుము.**

Sol: లవ, హారాలలో x యొక్క అత్యధిక సాధారణ కారకము x^3 ను తీయగా

$$\underset{x\to\infty}{Lt}\frac{11x^3-3x+4}{13x^3-5x^2-7}=\underset{x\to\infty}{Lt}\frac{\cancel{x^3}\left(11-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(13-\frac{5}{x}-\frac{7}{x^3}\right)}=\underset{\frac{1}{x}\to 0}{Lt}\frac{11-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{13-\frac{5}{x}-\frac{7}{x^3}}=\frac{11-0+0}{13-0-0}=\frac{11}{13}$$

---

7. $\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ **యొక్క అవకలనిని కనుగొనుము.**

A: $y=\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=\dfrac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}=\tan^2 x$

x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా $\dfrac{dy}{dx}=2\tan(\sec^2 x)$

---

8. **అవకలజమును నిర్వచించండి**

A: ప్రాథమిక సూత్రముల నుండి f(x) అనే వాస్తవ ప్రమేయం యొక్క అవకలని $f'(x)=\underset{h\to 0}{Lt}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

---

9. **$y=x^2+3x+6$ అనే ప్రమేయానికి $x=10, \Delta x=0.01$ అయిన Δy, dy లను కనుగొనుము.**

Sol: దత్తాంశం $y=f(x)=x^2+3x+6$; $x=10, \Delta x=0.01$

(i) $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$

$=[(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)+6]-(x^2+3x+6)$

$=[\cancel{x^2}+(\Delta x)^2+2x\Delta x]\cancel{+3x}+3\Delta x\cancel{+6}-\cancel{x^2}\cancel{-3x}\cancel{-6}$

$=(\Delta x)^2+2x\Delta x+3\Delta x$

$=\Delta x[\Delta x+2x+3]$

$=(0.01)\,[0.01+2(10)+3]$

$=(0.01)\,[0.01+23]$

$=0.01(23.01)=0.2301$

(ii) $dy=f'(x)\Delta x=(2x+3)(\Delta x)$

$=[2(10)+3](0.01)$

$=(23)\,(0.01)=0.23$

10. లెగ్రాంజ్ మధ్యమూల సిద్ధాంతమును ప్రవచించుము.

Sol: f(x)అనే ప్రమేయం (i) [a,b] మీద f అవిచ్ఛిన్నము

(ii) (a,b)లో f అవకలనీయము అయితే $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ అగునట్లుగా కనీసము ఒక $c\in(a,b)$ఉండును.

సెక్షన్-బి

11. (–5,0), (5,0) బిందువుల నుంచి దూరాల భేదం 8 యూనిట్లుగాగల బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

Sol : • A=(–5,0), B=(5,0) లు దత్త బిందువులు.

• P(x,y) బిందుపథ బిందువు.

★**దత్త నియమము నుండి:** |PA–PB|=8

★ $\Rightarrow PA - PB = \pm 8$

★ $\Rightarrow PA = \pm 8 + PB \;\; \Rightarrow PA^2 = (\pm 8 + PB)^2$

★ $\Rightarrow PA^2 = 64 + PB^2 \pm 16PB$

★ $\Rightarrow \pm 16PB = 64 + PB^2 - PA^2$

★ $\Rightarrow \pm 16PB = 64 + [(x-5)^2 \cancel{+(y-0)^2}]$

$-[(x+5)^2 + \cancel{(y-0)^2})]$

• $\Rightarrow \pm 16PB = 64 + (x-5)^2 - (x+5)^2$

• $\Rightarrow \pm 16PB = 64 - 4(x)(5)$ $\quad [\because (a-b)^2 - (a+b)^2 = -4ab]$

• $\Rightarrow \pm 16PB = 64 - 20x$

• $\Rightarrow \pm\cancel{16}PB = \cancel{4}(16-5x)$

• $\Rightarrow \pm 4PB = 16 - 5x$, ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

• $\Rightarrow 16PB^2 = (16-5x)^2$

• $\Rightarrow 16[(x-5)^2 + (y-0)^2] = 256 + 25x^2 - 160x$

★ $\Rightarrow 16(x^2 + 25 - 10x + y^2) = 256 - 160x + 25x^2$

• $\Rightarrow 16x^2 + 400 \cancel{-160x} + 16y^2.$

$= 256 \cancel{-160x} + 25x^2$

★ $\Rightarrow (25x^2 - 16x^2) - 16y^2 = 400 - 256$

• $\Rightarrow 9x^2 - 16y^2 = 144$

• కావున P యొక్క బిందుపథం $9x^2 - 16y^2 = 144.$

12. అక్షాలను α కోణంతో భ్రమణ పరివర్తన చేసినప్పుడు $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ రూపాంతర సమీకరణం కనుక్కోండి.

Sol: • దత్త మూల సమీకరణం $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$........(1)

• భ్రమణ పరివర్తన కోణం $\theta=\alpha$, అయిన

★ $x=X\cos\theta-Y\sin\theta \Rightarrow x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha$

$y=Y\cos\theta+X\sin\theta \Rightarrow y=Y\cos\alpha+X\sin\alpha$

• (1) నుండి, రూపాంతర సమీకరణం

• $(X\cos\alpha-Y\sin\alpha)\cos\alpha+(Y\cos\alpha+X\sin\alpha)\sin\alpha=p$

• $\Rightarrow X\cos^2\alpha \cancel{-Y\sin\alpha\cos\alpha} \cancel{+Y\cos\alpha\sin\alpha} +X\sin^2\alpha=p$

• $\Rightarrow X(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=p \Rightarrow X(1)=p \Rightarrow X=p$

కావున కావలసిన రూపాంతర సమీకరణం $X=p$

---

13. $4x-3y+12=0$ సమీకరణం (i) వాలు-అంతరఖండ రూపం

(ii) అంతరఖండరూపం కనుగొనుము.

Sol: ★ **(i) వాలు-అంతరఖండ రూపం $y=mx+c$**

• $\therefore 4x-3y+12=0 \Rightarrow 3y=4x+12$

★ $\Rightarrow y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{\cancel{12}}{\cancel{3}} \Rightarrow y=\dfrac{4}{3}x+4$

★(ii) **అంతరఖండరూపం** $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

• $\therefore 4x-3y+12=0 \Rightarrow 4x-3y=-12$

★ $\Rightarrow \dfrac{\cancel{4}x}{-\cancel{12}}-\dfrac{\cancel{3}y}{-\cancel{12}}=1$

• $\Rightarrow \dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{4}=1$

14. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3} & \text{if } 0<x<5, x\neq 3\\ 1.5 & \text{if } x=3\end{cases}$ అనే ప్రమేయం 3 వద్ద అవిచ్ఛిన్నమా?

Sol: (a) దత్తాంశం నుండి f(3)=1.5.........(1)

(b) $\underset{x\to 3}{\text{Lt}}\ f(x)=\underset{x\to 3}{\text{Lt}}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\underset{x\to 3}{\text{Lt}}\dfrac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x+1)}$

$=\underset{x\to 3}{\text{Lt}}\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{3+3}{3+1}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}=1.5$ ....(2)

$\therefore$ (1) & (2) ల నుండి $\underset{x\to 3}{\text{Lt}}\ f(x)=f(3)$ f(x) అనునది x=3 వద్ద 'అవిచ్ఛిన్నము' అని నిరూపించబడినది.

---

15. ప్రాథమిక సూత్రాన్ని ఉపయోగించి **sin2x** యొక్క అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: •f(x)=sin2x అనుకుంటే

★f(x+h)=sin2(x+h)=sin (2x+2h)

•ప్రాథమిక సూత్రం నుండి

★ $f'(x)=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

★ $=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{\sin(2x+2h)-\sin 2x}{h}$

★ $=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{1}{h}\left(2\cos\left(\dfrac{(2x+2h)+2x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{(\cancel{2x}+2h)-\cancel{2x}}{2}\right)\right)$ $\left[\because \sin C-\sin D=2\cos\left(\dfrac{C+D}{2}\right)\sin\left(\dfrac{C-D}{2}\right)\right]$

★ $=2\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{1}{h}\cos\left(\dfrac{4x+2h}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\cancel{2}h}{\cancel{2}}\right)$

★ $=2\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{1}{h}\cos\left(\dfrac{\cancel{2}(2x+h)}{\cancel{2}}\right)\sin(h)$

• $=2\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{1}{h}\cos(2x+h)\sin(h)$

★ $=2\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\cos(2x+h).\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{\sinh}{h}$

★ $=2\cos(2x+0)(1)=2\cos 2x$

16. **$y=x^3+4x^2$ అనే వక్రం మీద (–1,3) వద్ద స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబ రేఖ సమీకరణములను కనుగొనుము**

Sol: • $y=x^3+4x^2$ ను x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

• $\frac{dy}{dx}=3x^2+8x$

• $\therefore$ P(–1,3) వద్ద స్పర్శరేఖా వాలు

★ $m=3(-1)^2+8(-1)=3-8=-5$

(i) (–1,3) వద్ద, వాలు –5 గా గల

★ స్పర్శరేఖా సమీకరణం $y-y_1=m(x-x_1)$

•$\Rightarrow y-3=-5(x+1)=-5x-5 \Rightarrow 5x+y+2=0$

★(ii) అభిలంబరేఖ వాలు $\frac{-1}{m}=\frac{-1}{-5}=\frac{1}{5}$

•(–1,3) వద్ద, వాలు $\frac{1}{5}$ గా గల అభిలంబరేఖ ★సమీకరణం $y-y_1=-\frac{1}{m}(x-x_1)$

★ $\Rightarrow y-3=\frac{1}{5}(x+1)$

★ $\Rightarrow 5y-15=x+1 \Rightarrow x-5y+16=0$

---

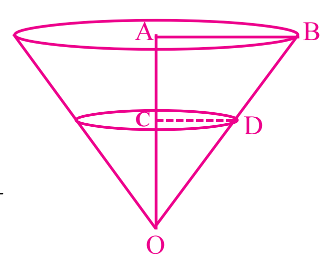
17. **తిరగేసిన శంకువు రూపంలో ఉన్న ఒక పాత్ర యొక్క ఎత్తు 8 సెం.మీ మరియు పైన వ్యాసార్థము 6 సెం.మీ. దానిని నీటితో 2 m^3/min చొప్పున నింపుతూ ఉంటే నీటి మట్టము 4మీ.ల వద్ద నీటి మట్టము పెరుగుదల రేటును కనుగొనుము.**

A: t సెకన్లు వద్ద నీటి మట్టము ఎత్తు OC .

OC=h, CD=r మరియు ఘనపరిమాణం=V. దత్తాంశం నుండ AB = 6, OA= 8 , $\frac{dV}{dt}=2$

OAB మరియు OCD త్రిభుజాలు సరూపాలు. $\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{OC}{OA} \Rightarrow \frac{r}{6}=\frac{h}{8} \Rightarrow r=\frac{3h}{4}$ ....(1)

శంకువు ఘనపరిమాణం $V=\frac{\pi r^2 h}{3}$ ....(2)



(1) నుండి $V=\frac{\pi}{3}\left(\frac{3h}{4}\right)^2 \times h=\frac{9\pi h^3}{48}$ ....(3)

(3) ను t పరంగా అవకలనం చేయగా $\frac{dV}{dt}=\frac{9\pi}{48}.3h^2\frac{dh}{dt}=\frac{9\pi}{16}h^2\frac{dh}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{16}{9\pi h^2}\frac{dV}{dt}=\frac{16}{9\pi 4^2}(2)=\frac{2}{9\pi}$

సెక్షన్-సి

18. $ax+by+c=0$ రేఖకు $P(x_1,y_1)$ నుంచి లంబపాదం $Q(h,k)$ అయిన $(h-x_1) : a=(k-y_1):b = -(ax_1+by_1+c) : (a^2+b^2)$ అని నిరూపించండి.

Sol: • దత్త బిందువులు $P=(x_1,y_1)$,$Q=(h,k)$

• $\overline{PQ}$ యొక్క వాలు

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{k - y_1}{h - x_1}$$

• దత్త సరళరేఖ $ax+by+c=0$ యొక్క వాలు $m_2 = -\frac{a}{b}$

• ఇప్పుడు $m_1m_2 = -1$ [$\because$ 2 రేఖలు పరస్పర లంబం]

$$\star \Rightarrow \left(\frac{k-y_1}{h-x_1}\right)\left(\cancel{-}\frac{a}{b}\right) = \cancel{-}1 \Rightarrow \left(\frac{k-y_1}{h-x_1}\right)\left(\frac{a}{b}\right) = 1$$

$$\bullet \Rightarrow \frac{k-y_1}{h-x_1} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{k-y_1}{b} = \frac{h-x_1}{a}$$

★ $\frac{h-x_1}{a} = \frac{k-y_1}{b} = r$ ....(1) అనుకొనుము

★ $\therefore \frac{h-x_1}{a} = r \Rightarrow h - x_1 = ar \Rightarrow h = x_1 + ar$

★ $\frac{k-y_1}{b} = r \Rightarrow k - y_1 = br \Rightarrow k = y_1 + br$

★ కాని $Q(h,k)$ బిందువు $ax+by+c=0$ రేఖపై ఉండును.

• $\Rightarrow ah+bk+c=0$

• $\Rightarrow a(x_1+ar)+b(y_1+br)+c=0$

• $\Rightarrow ax_1+a^2r+by_1+b^2r+c=0$

• $\Rightarrow a^2r+b^2r+ax_1+by_1+c=0$

★ $\Rightarrow r(a^2+b^2) = -(ax_1+by_1+c)$

★ $\Rightarrow r = \frac{-(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$ ....(2)

★(1) & (2) నుండి

$$\frac{h-x_1}{a} = \frac{k-y_1}{b} = \frac{-(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$$

(b) (4,1) నుండి 3x−4y+12=0 అనే రేఖకు గల లంబపాదాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: (4,1) నుంచి 3x-4y+12=0 రేఖ మీదికి లంబపాదం (h,k) అనుకొందాం.

ఇక్కడ $(x_1,y_1)=(4,1)$, a=3, b=−4, c=12.

$$\therefore \frac{h-x_1}{a}=\frac{k-y_1}{b}=\frac{-(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{h-4}{3}=\frac{k-1}{-4}=\frac{-[3(4)-4(1)+12]}{3^2+4^2}=\frac{-(12-4+12)}{9+16}=\frac{-20}{25}=\frac{-4}{5}$$

$$\frac{h-4}{3}=\frac{-4}{5}\Rightarrow 5h-20=-12\Rightarrow 5h=20-12=8\Rightarrow h=\frac{8}{5}$$

$$\frac{k-1}{-4}=\frac{-4}{5}\Rightarrow 5k-5=16\Rightarrow 5k=16+5=21\Rightarrow k=\frac{21}{5}$$

$$\therefore (h,k)=\left(\frac{8}{5},\frac{21}{5}\right)$$

---

19. $ax^2+2hxy+by^2=0$ అనే సరళరేఖాయుగ్మాల మధ్య కోణము θ అయిన $\cos\theta=\dfrac{a+b}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$ అని నిరూపించుము.

Sol: $ax^2+2hxy+by^2=0$ యొక్క విడి సమీకరణాలు $l_1x+m_1y=0$ .....(1) మరియు $l_2x+m_2y=0$ ......(2)

$\therefore ax^2+2hxy+by^2\equiv(l_1x+m_1y)(l_2x+m_2y)$

ఇరువైపులా పోల్చగా $l_1l_2=a,\ l_1m_2+l_2m_1=2h,\ m_1m_2=b$.

(1) మరియు (2) ల మధ్యకోణము θ అయిన

$$\cos\theta=\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{(l_1^2+m_1^2).(l_2^2+m_2^2)}}=\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2l_2^2+m_1^2m_2^2+l_1^2m_2^2+l_2^2m_1^2}}$$

$$=\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{(l_1l_2-m_1m_2)^2+2l_1l_2m_1m_2+(l_1m_2+l_2m_1)^2-2l_1l_2m_1m_2}}=\frac{a+b}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$$

(b) $x^2-7xy+12y^2=0$ సరళరేఖా యుగ్మపు మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.

A: దత్త సమీకరణమును $ax^2+2hxy+by^2=0$తో పోల్చగా a=1, 2h=−7, b=12

$$\therefore \cos\theta=\frac{a+b}{\sqrt{(a-b)^2+(2h)^2}}=\frac{1+12}{\sqrt{(1-12)^2+(-7)^2}}=\frac{13}{\sqrt{121+49}}=\frac{13}{\sqrt{170}}\Rightarrow\theta=\cos^{-1}\left(\frac{13}{\sqrt{170}}\right)$$

20. $x - y - \sqrt{2} = 0$ సరళరేఖ, $x^2-xy+y^2+3x+3y-2=0$ వక్రాన్ని ఖండించే బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపితే ఏర్పడిన రేఖలు పరస్పరం లంబాలని చూపండి.

Sol: • దత్త రేఖ $x - y = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \frac{x-y}{\sqrt{2}} = 1 \quad ...(1)$$

• దత్త వక్రం

$$x^2 - xy + y^2 + 3x + 3y - 2 = 0............(2)$$

• (1) & (2) ల నుండి సమఘాతీకరణ సమీకరణం

$$x^2 - xy + y^2 + 3x(1) + 3y(1) - 2(1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - xy + y^2 + 3x\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) + 3y\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) - \cancel{2}\frac{(x-y)^2}{\cancel{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}xy + \sqrt{2}y^2 + 3x(x-y) + 3y(x-y) - \sqrt{2}(x-y)^2}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}xy + \sqrt{2}y^2 + 3x^2 \cancel{-3xy} \cancel{+3yx} - 3y^2 - \sqrt{2}(x^2 + y^2 - 2xy) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}xy + \sqrt{2}y^2 + 3x^2 - 3y^2 - \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 + 2\sqrt{2}xy = 0$$

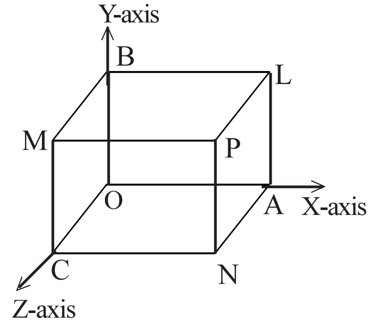
$$\Rightarrow 3x^2 - 3y^2 + \sqrt{2}xy = 0$$

• ఇక్కడ x^2 గుణకం $+ y^2$ గుణకం $= 3-3=0$

$\therefore$ రెండు సరళరేఖాయుగ్మాలు లంబాలు.

21. ఒక సమఘనము యొక్క రెండు కర్ణాల మధ్య కోణమును కనుగొనుము.

Sol: ★O,A,B,C,L,M,N,P శీర్షాలుగా గల సమఘనం యొక్క భుజం 'a' మరియు మూలబిందువు O=(0,0,0) అనుకొందాం.



★A,B,C లు వరుసగా X-అక్షం, Y-అక్షం, Z-అక్షం అయిన

A=(a,0,0), B=(0,a,0), C=(0,0,a)

★L,M,N లు వరుసగా XY-తలం, YZ-తలం, ZX-తలం అయిన

L=(a,a,0), M=(0,a,a), N=(a,0,a)

★ XYZ అంతరాళంలోని శీర్షము P అయితే P=(a,a,a)

★ $\overline{OP}$, $\overline{CL}$ లు రెండు కర్ణాలు అనుకొందాం.

• $\overline{OP}$ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు =(a–0, a–0, a–0) = (a,a,a)=(a_1,b_1,c_1)

• $\overline{CL}$ యొక్క దిక్ సంఖ్యలు =(a–0, a–0, 0–a)=(a,a,–a)=(a_2,b_2,c_2)

• కావున రెండు కర్ణాల మధ్య కోణం

$$\star\ \cos\theta=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}}$$

$$=\frac{|a(a)+\cancel{a(a)}+\cancel{a(-a)}|}{\sqrt{(a^2+a^2+a^2)(a^2+a^2+a^2)}}$$

$$=\frac{a^2}{\sqrt{(3a^2)(3a^2)}}=\frac{\cancel{a^2}}{3\cancel{a^2}}=\frac{1}{3}$$

$$\star\ \therefore \cos\theta=\frac{1}{3}\Rightarrow\theta=\text{Cos}^{-1}\frac{1}{3}$$

కావున సమఘనం యొక్క రెండు కర్ణాల మధ్య కోణం $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{3}$ అని నిరూపించబడినది.

Double Dhamaka!!

☺ Do you remember?
I was in
Vectors of Maths-1A
Almost Same 2 Same

☺ You know!
Angle between diagonals for
Square is 90°
Cube is $\text{Cos}^{-1}\frac{1}{3}$

22. $y = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right)$ అయిన $\dfrac{dy}{dx}$ ను కనుగొనుము.

Sol: • దత్తాంశం నుండి $y=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right)$

★ $x^2=\cos 2\theta$ అనుకొనిన

• $y=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+\cos 2\theta}+\sqrt{1-\cos 2\theta}}{\sqrt{1+\cos 2\theta}-\sqrt{1-\cos 2\theta}}\right)=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2\cos^2\theta}+\sqrt{2\sin^2\theta}}{\sqrt{2\cos^2\theta}-\sqrt{2\sin^2\theta}}\right)$

• $=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{\cancel{\sqrt{2}}[\cos\theta+\sin\theta]}{\cancel{\sqrt{2}}[\cos\theta-\sin\theta]}\right)=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right)$

★ $=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{\dfrac{\cancel{\cos\theta}}{\cancel{\cos\theta}}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cancel{\cos\theta}}{\cancel{\cos\theta}}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}\right) \quad =\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}\right)$

★ $=\mathrm{Tan}^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right]=\dfrac{\pi}{4}+\theta$

★ $\therefore y=\dfrac{\pi}{4}+\theta$

★ కానీ $\cos 2\theta = x^2 \Rightarrow 2\theta = \mathrm{Cos}^{-1}(x^2) \Rightarrow \theta=\dfrac{1}{2}\mathrm{Cos}^{-1}(x^2)$

★ కావున $y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\mathrm{Cos}^{-1}(x^2)$

★ x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

• $\dfrac{dy}{dx}=0+\dfrac{1}{\cancel{2}}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}(\cancel{2}x)\right),$ $\left[\because \dfrac{d}{dx}\mathrm{Cos}^{-1}f(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-(f(x))^2}}.\dfrac{d}{dx}f(x)\right]$

$\boxed{\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^4}}}$

23. $y^2=4x$ మరియు $x^2+y^2=5$. వక్రాల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: 1) ఖండన బిందువులను కనుగొనుట:

- దత్తాంశం నుండి $y^2=4x$ ....(1),
  $x^2+y^2=5$ ....(2)
  (1) & (2) ల నుండి
- $x^2+4x=5 \Rightarrow x^2+4x-5=0$

★ $\Rightarrow (x-1)(x+5)=0 \Rightarrow x=1$ or -5

- $x=1$ అయిన $y^2=4(1)=4=2^2 \Rightarrow y=\pm 2$ ★ $\therefore$ ఖండన బిందువులు $P=(1,2)$, $Q=(1,-2)$

2) అవకలనులను కనుగొనుట:

★ $y^2=4x \Rightarrow 2y\dfrac{dy}{dx}=4 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cancel{4}}{\cancel{2}y}=\dfrac{2}{y}$

- $x^2+y^2=5 \Rightarrow 2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$
- $\Rightarrow \cancel{2}y\dfrac{dy}{dx}=\cancel{-2}x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x}{y}$

3) P(1,2) వద్ద వాలులను కనుగొనుట:

★ $m_1=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(1,2)}=\dfrac{2}{y}=\dfrac{2}{2}=1$;

★ $m_2=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(1,2)}=\dfrac{-x}{y}=\dfrac{-1}{2}$

4) P వద్ద కోణమును కనుగొనుట: P వద్ద రెండు వక్రాల మధ్య కోణం θ అయిన

★ $\tan\theta=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(1\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}\right|=\left|\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right|=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3$ $\therefore \theta=\mathrm{Tan}^{-1}3$

5) Q(1,–2) వద్ద వాలులను కనుగొనుట:

- $m_1=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(1,-2)}=\dfrac{2}{y}=\dfrac{2}{-2}=-1$;
- $m_2=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(1,-2)}=\dfrac{-x}{y}=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$

6) Q వద్ద కోణమును కనుగొనుట: Q వద్ద రెండు వక్రాల మధ్య కోణం θ అయిన

★ $\tan\theta=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\dfrac{-1-\frac{1}{2}}{1+\left(-1\times\frac{1}{2}\right)}\right|=\left|\dfrac{\frac{-3}{2}}{\frac{1}{2}}\right|=|-3|=3$ $\therefore \theta=\mathrm{Tan}^{-1}3$

24. **ఒక కంపెనీ రోజుకు x వస్తువులు అమ్మగా వచ్చే లాభ ప్రమేయం $p(x)=(150-x)x-1600$. కంపెనీ గరిష్ఠ లాభం పొందడానికి ఆ కంపెనీ ఎన్ని వస్తువులను తయారు (ఉత్పత్తి) చేయాలో కనుక్కోండి. గరిష్ఠ లాభాన్ని కూడా కనుక్కోండి.**

Sol: దత్త లాభ ప్రమేయం $p(x) = (150-x)x-1600$

$p'(x) = (150-x)1+x(-1) = 150-2x$ మరియు $p''(x)= -2$

గరిష్ఠ లాభం నకు, $p'(x)=0 \Rightarrow 150-2x=0 \Rightarrow x = 75$

$\therefore$ $x = 75$ అయినప్పుడు $p(x)$ లాభం గరిష్ఠం అగును.

$\therefore$ గరిష్ఠ లాభం $=(150-75)75-1600=75(75)-1600 = 5625-1600 = 4025$ units.