JR MATHS-1A (TM)

Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH-2020 (AP)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2020(AP)

ime : 3 Hours **గణితశాస్త్రం - 1A** Max.Marks : 75

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: **$10 \times 2 = 20$**

1. $\forall x \in R$ నకు $f(x) = 2x - 1$, అయిన $(gof)(x)$ ను కనుగొనుము.
2. $f = \{(1,2),(2,-3),(3,-1)\}$ అయిన (i) $2f$ (ii) f^2 లను కనుగొనుము.
3. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ యొక్క జాడ కనుగొనుము. **4.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ యొక్క కోటిని కనుగొనుము.
5. $\bar{a} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k}, \bar{b} = 4\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k}$ లు సరేఖీయ సదిశలైన m,n లను కనుగొనుము.
6. (0,0,0), (0,5,0) , (2,0,1) అనే బిందువుల గుండా పోయే తలం యొక్క సదిశా సమీకరణం కనుగొనుము.
7. $\bar{r}.(2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}) = 3$, $\bar{r}.(3\bar{i} + 6\bar{j} + \bar{k}) = 4$ తలముల మధ్య కోణము కనుగొనుము.
8. $\tan 20^\circ = \lambda$ అయిన $\dfrac{\tan 160^\circ - \tan 110^\circ}{1 + \tan 160^\circ . \tan 110^\circ} = \dfrac{1-\lambda^2}{2\lambda}$ అని చూపండి.
9. $7\cos x - 24\sin x + 5$ యొక్క వ్యాప్తి కనుగొనుము **10.** $(\cosh x - \sinh x)^n = \cosh(nx) - \sinh(nx)$ అని నిరూపించండి.

సెక్షన్-బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. **$5 \times 4 = 20$**

11. $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, t, అయిన $AA' = A'A = I$ అని చూపండి.
12. $3\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}, 2\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}, -\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}, 4\bar{i} + 5\bar{j} + \lambda\bar{k}$ లు స్థానసదిశలుగా గల బిందువులు సతలీయములైతే $\lambda = -\dfrac{146}{17}$ అని చూపండి.
13. $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}, \bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$ లు ఆసన్న భుజాలుగా గల సమాంతర చతుర్భుజ సదిశా వైశాల్యం మరియు వైశాల్యాలను కనుగొనుము.
14. $\sin^4\dfrac{\pi}{8} + \sin^4\dfrac{3\pi}{8} + \sin^4\dfrac{5\pi}{8} + \sin^4\dfrac{7\pi}{8} = \dfrac{3}{2}$ అని చూపండి. **15.** $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$ ను సాధించండి.
16. $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2} + \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{5} + \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$ అని నిరూపించండి.
17. $\cot\dfrac{A}{2}, \cot\dfrac{B}{2}, \cot\dfrac{C}{2}$ లు అంకశ్రేఢిలో ఉంటే a,b,c లు కూడా అంకశ్రేఢిలోఉండునని చూపండి.

సెక్షన్-సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. **$5 \times 7 = 35$**

18. (a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x \neq 1$ అయిన $(fof)(x)$ ను కనుగొనుము
    (b) $f:A \to B$, $g:B \to C$ మరియు $h:C \to D$ లు మూడు ప్రమేయాలు అయిన $ho(gof)=(hog)of$ అని నిరూపించుము.
19. పరిమిత గణితాను గమన సిద్ధాంతనుపయోగించి n యొక్క అన్ని ధన పూర్ణాంక విలువలకు $49^n+16n-1$ ను 64 భాగిస్తుందని చూపండి.
20. $\begin{vmatrix} a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ 2a+1 & a+2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^3$ అని చూపండి.
21. క్రామర్ పద్ధతినుపయోగించి $x+y+z=1$, $2x+2y+3z=6$, $x+4y+9z=3$ సమీకరణాలను సాధించండి.
22. ఈ క్రింది అతలీయ రేఖల మధ్య కనిష్ఠ దూరము కనుగొనుము.
    $\bar{r} = (6\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}) + t(\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k})$ and $\bar{r} = (-4\bar{i} - \bar{k}) + s(3\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k})$
23. $A+B+C=\dfrac{\pi}{2}$ అయిన $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 1 + 4\sin A \sin B \sin C$ అని నిరూపించండి.
24. $r+r_3+r_1-r_2 = 4R\cos B$ అని చూపండి.

IPE AP MARCH-2020

SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. $x \in R$, $f(x)=2x-1$, $g(x)=\frac{x+1}{2}$ అయితే (i) (gof)(x) (ii) (fog)(x)లను కనుక్కోండి.

A: (i) $(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x-1) = \frac{(2x-1)+1}{2} = \frac{2x}{2} = x$

(ii) $(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) = \cancel{2}\left(\frac{x+1}{\cancel{2}}\right) - 1 = x+1-1 = x$

---

2. $f = \{(1,2),(2,-3),(3,-1)\}$ అయిన (i) 2f (ii) f^2 లను కనుగొనుము.

A: దత్తాంశం నుండి $f = \{(1, 2), (2, -3), (3, -1)\}$

(i) $2f = \{(1,2(2)),(2,2(-3)),(3,2(-1)\} = \{(1,4),(2,-6),(3,-2)\}$

(ii) $f^2 = \{(1,2^2),(2,3^2),(3,1^2)\} = \{(1,4),(2,9),(3,1)\}$

---

3. మాత్రికా జాడను నిర్వచించండి. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ యొక్క జాడను కనుగొనుము.

Sol: మాత్రికా జాడ: A అనే ఒక చతురస్ర మాత్రిక యొక్క ప్రధాన వికర్ణంలోని మూలకాల మొత్తాన్ని, A యొక్క జాడ అంటారు. దీనిని Tr(A) తో సూచిస్తారు.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Tr}(A) = 1+(-1)+1=1$$

---

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ యొక్క జాడను కనుగొనుము.

A: $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0(2-5) -1\,(1-9) +2\,(2-6)$

$= 0 - 1(-8) + 2\,(-4) \quad = 8 - 8 \qquad \therefore |A|=0.$

2×2 లఘు నిర్ధారకం, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2-6 = -4 \neq 0$

$\therefore$ కోటి(A)=2..

5. $\bar{a} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = 4\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k}$ లు సరేఖీయ సదిశలైన m,n లను కనుగొనుము.

A: దత్త సదిశలు $\bar{a} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = 4\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k}$ లు సరేఖీయాలు.

$$\therefore \frac{\cancel{2}}{\cancel{4}} = \frac{5}{m} = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{m} \Rightarrow m = 2 \times 5 = 10 \text{ and } \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow n = 2$$

$\therefore$ m=10, n=2

---

6. (0,0,0), (0,5,0) , (2,0,1)అనే బిందువుల గుండా పోయే తలం యొక్క సదిశా సమీకరణం కనుగొనుము.

Sol: దత్త బిందువులు $A(\bar{a}) = \bar{0}$, $B(\bar{b}) = 5\bar{j}$, $C(\bar{c}) = 2\bar{i} + \bar{k}$

తలం యొక్క సదిశా సమీకరణం $\bar{r} = (1 - s - t)\bar{a} + s\bar{b} + t\bar{c}$, s, t$\in$R

$\bar{r} = (1 - s - t)\bar{0} + s(5\bar{j}) + t(2\bar{i} + \bar{k})$

$\therefore \bar{r} = (5\bar{j})s + t(2\bar{i} + \bar{k}), s, t \in R$

---

7. $\bar{r}.(2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}) = 3$, $\bar{r}.(3\bar{i} + 6\bar{j} + \bar{k}) = 4$ తలముల మధ్య కోణం కనుగొనుము.

Sol: $\bar{r}.(2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}) = 3$, $\bar{r}.(3\bar{i} + 6\bar{j} + \bar{k}) = 4$ తలములు $\bar{r}.\bar{n}_1 = p_1$, $\bar{r}.\bar{n}_2 = p_2$ రూపంలో ఉన్నట్లైతే

$\bar{n}_1 = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{n}_2 = 3\bar{i} + 6\bar{j} + \bar{k}$

$$\boxed{\therefore \cos\theta = \frac{\bar{n}_1.\bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|}}$$

$$= \frac{(2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}).(3\bar{i} + 6\bar{j} + \bar{k})}{\sqrt{4+1+4}.\sqrt{9+36+1}}$$

$$= \frac{2(3) - 1(6) + 2(1)}{\sqrt{9}.\sqrt{46}} = \frac{6-6+2}{\sqrt{9}.\sqrt{46}} = \frac{2}{3\sqrt{46}}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{2}{3\sqrt{46}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{2}{3\sqrt{46}}$$

8. **$\tan 20^\circ = \lambda$ అయిన $\dfrac{\tan 160^\circ - \tan 110^\circ}{1+\tan 160^\circ.\tan 110^\circ} = \dfrac{1-\lambda^2}{2\lambda}$ అని చూపండి.**

A: $\tan 160^\circ = \tan(180^\circ - 20^\circ) = -\tan 20^\circ = -\lambda;$

$\tan 110^\circ = \tan(90^\circ + 20^\circ) = -\cot 20^\circ = -\dfrac{1}{\tan 20^\circ} = \dfrac{-1}{\lambda}$

$$\therefore \text{L.H.S} = \frac{\tan 160^\circ - \tan 110^\circ}{1+\tan 160^\circ \tan 110^\circ} = \frac{-\lambda - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)}{1+(-\lambda)\left(-\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{\frac{1}{\lambda} - \lambda}{1+1} = \frac{1-\lambda^2}{\lambda(2)} = \frac{1-\lambda^2}{2\lambda} = \text{R.H.S}$$

---

9. **$7\cos x - 24\sin x + 5$ యొక్క వ్యాప్తి కనుగొనుము.**

A: $7\cos x - 24\sin x + 5$ ను $a\cos x + b\sin x + c$ తో పోల్చగా $a = 7, b = -24, c = 5$

గరిష్ట విలువ $= (\sqrt{a^2+b^2}) + c = (\sqrt{7^2+24^2}) + 5 = (\sqrt{49+576}) + 5 = \sqrt{625} + 5 = 25 + 5 = 30$

కనిష్ట విలువ $= (-\sqrt{a^2+b^2}) + c = (-\sqrt{7^2+24^2}) + 5 = (-\sqrt{49+576}) + 5 = -\sqrt{625} + 5 = -25 + 5 = -20$

$\therefore$ వ్యాప్తి = [కనిష్ట విలువ , గరిష్ట విలువ]= [–20, 30]

---

10. **$(\cosh x - \sinh x)^n = \cosh(nx) - \sinh(nx)$ అని నిరూపించండి.**

A: $\text{L.H.S} = (\cosh x - \sinh x)^n = \left[\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - \dfrac{(e^x - e^{-x})}{2}\right]^n$

$$= \left(\frac{\cancel{e^x} + e^{-x} \cancel{-e^x} + e^{-x}}{2}\right)^n = \left(\frac{\cancel{2}e^{-x}}{\cancel{2}}\right)^n = e^{-nx} \text{ ....(1)}$$

$\text{R.H.S} = \cosh nx - \sinh nx$

$$= \left(\frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2}\right) - \left(\frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2}\right) = \frac{\cancel{e^{nx}} + e^{-nx} \cancel{-e^{nx}} + e^{-nx}}{2} = \frac{\cancel{2}e^{-nx}}{\cancel{2}} = e^{-nx} \text{ ....(2)}$$

(1) & (2) నుండి L.H.S.=R.H.S.

కావున నిరూపించబడినది.

సెక్షన్-బి

11. $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ **అయిన AA'=A'A అని చూపండి.**

A: $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$$AA' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha+\sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha+\cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{......(1)}$$

$$A'A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha+\sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha+\cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{......(2)}$$

(1), (2) నుండి AA' = A'A

---

12. $3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k}, 2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k}, -\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}, 4\bar{i}+5\bar{j}+\lambda\bar{k}$ **లు స్థానసదిశలుగా గల బిందువులు సతలీయములైతే** $\lambda = -146/17$ **అని చూపండి.**

A: O అనునది ఆదిబిందువు మరియు $\overline{OP} = 3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k}, \overline{OQ} = 2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k}$,

$\overline{OR} = -\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}, \overline{OS} = 4\bar{i}+5\bar{j}+\lambda\bar{k}$

$\therefore \overline{PQ} = \overline{OQ}-\overline{OP} = (2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k})-(3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k}) = -\bar{i}+5\bar{j}-3\bar{k}$

$\overline{PR} = \overline{OR}-\overline{OP} = (-\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k})-(3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k}) = -4\bar{i}+3\bar{j}+3\bar{k}$

$\overline{PS} = \overline{OS}-\overline{OP} = (4\bar{i}+5\bar{j}+\lambda\bar{k})-(3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k}) = \bar{i}+7\bar{j}+(\lambda+1)\bar{k}$

కాని $[\overline{PQ}\ \overline{PR}\ \overline{PS}] = 0$ [P,Q,R,S అనే నాలుగు బిందువుల సతలీయములు కావున]

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ -4 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-1)\,[3(\lambda+1)-21] - 5\,[-4(\lambda+1)-3] - 3[(-28)-3] = 0$$

$\Rightarrow -1(3\lambda-18) - 5(-4\lambda-7) - 3(-31) = 0$

$\Rightarrow -3\lambda + 18 + 20\lambda + 35 + 93 = 0$

$\Rightarrow -3\lambda + 20\lambda + 35 + 93 + 18 = 0$

$\Rightarrow 17\lambda + 146 = 0$

$\Rightarrow 17\lambda = -146$

$\Rightarrow \lambda = -146/17$

13. $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$ **లు ఆసన్న భుజాలుగా గల సమాంతర చతుర్భుజం సదిశా వైశాల్యాన్ని, వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.**

Sol: దత్తాంశం నుండి t $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k},\ \bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$

$$\therefore \bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=\bar{i}(4-1)-\bar{j}(2+2)+\bar{k}(-1-4)=3\bar{i}-4\bar{j}-5\bar{k}$$

(i) $\bar{a},\bar{b}$ ఆసన్న భుజాలుగా గల సమాంతర చతుర్భుజం సదిశా వైశాల్యం $\bar{a}\times\bar{b}=3\bar{i}-4\bar{j}-5\bar{k}$

(ii) మరియు $|\bar{a}\times\bar{b}|=|3\bar{i}-4\bar{j}-5\bar{k}|=\sqrt{9+16+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

$\therefore$ సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం $|\bar{a}\times\bar{b}|=5\sqrt{2}$ sq.units

---

14. $\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$ **అని చూపండి.**

A: $\sin\frac{3\pi}{8}=\sin\left(\frac{4\pi-\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{8}$

$\sin\frac{5\pi}{8}=\sin\left(\frac{4\pi+\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{8}$

$\sin\frac{7\pi}{8}=\sin\left(\frac{8\pi-\pi}{8}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{\pi}{8}$

$$\text{L.H.S}=\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}$$

$$=\sin^4\frac{\pi}{8}+\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^4+\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^4+\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^4$$

$$=\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8}=2\left[\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8}\right]$$

$$=2\left[\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2-2\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}\right],\qquad [\because a^2+b^2=(a+b)^2-2ab]$$

$$=2\left[1-2\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}\right]=2-4\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}$$

$$=2-\left[2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\right]^2=2-\left[\sin\frac{2\pi}{8}\right]^2$$

$$=2-\left[\sin\frac{\pi}{4}\right]^2=2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\text{R.H.S}$$

15. **$7\sin^2\theta+3\cos^2\theta=4$ ను సాధించండి.**

A: దత్త సమీకరణం $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$

$\Rightarrow 7\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta) = 4$

$\Rightarrow 7\sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta = 4$

$\Rightarrow 4\sin^2\theta = 1$

$\Rightarrow \sin^2\theta = (1/2)^2 = \sin^2(\pi/6)$

దీని ప్రధాన విలువ $\alpha = \pi/6$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $\theta = n\pi \pm \dfrac{\pi}{6}, n \in Z$

---

16. **$\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2} + \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{5} + \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$ అని నిరూపించండి.**

A: $\mathrm{Tan}^{-1}x + \mathrm{Tan}^{-1}y = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$ అని మనకు తెలుసు.

$$\therefore \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2} + \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5} = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}\right) = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\frac{5+2}{\cancel{10}}}{\frac{10-1}{\cancel{10}}}\right) = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{7}{9}$$

$$\therefore \text{L.H.S} = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{7}{9} + \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{8}$$

$$= \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{8}}\right) = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\frac{56+9}{\cancel{72}}}{\frac{72-7}{\cancel{72}}}\right) = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{65}{65}\right) = \mathrm{Tan}^{-1}1 = \frac{\pi}{4} = \text{R.H.S}$$

---

17. **$\cot\dfrac{A}{2}, \cot\dfrac{B}{2}, \cot\dfrac{C}{2}$ లు అంకశ్రేఢిలో ఉంటే a,b,c లు కూడా అంకశ్రేఢిలో ఉండునని చూపండి.**

Sol: $\cot\dfrac{A}{2}, \cot\dfrac{B}{2}, \cot\dfrac{C}{2}$ లు అంకశ్రేఢిలో ఉంటే

$\Rightarrow \dfrac{(s)(s-a)}{\Delta}, \dfrac{(s)(s-b)}{\Delta}, \dfrac{(s)(s-c)}{\Delta}$ లు అంకశ్రేఢిలో ఉండును

a,b,c లు అంకశ్రేఢిలో ఉంటే
$\Leftrightarrow$ ka, kb,kc లు అంకశ్రేఢిలోఉండును
$\Leftrightarrow a \pm k, b \pm k, c \pm k$ లు అంకశ్రేఢిలోఉండును

$\Rightarrow$ s–a, s–b, s–c లు అంకశ్రేఢిలో ఉండును $\Rightarrow$ –a, –b, –c లు అంకశ్రేఢిలో ఉండును

$\Rightarrow$ a, b, c లు అంకశ్రేఢిలో ఉండును

సెక్షన్-సి

18. (a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $x\neq 1$ అయిన (fofof)(x)ను కనుగొనుము.

(b) f:A→B, g:B→C మరియు h:C→D లు మూడు ప్రమేయాలు అయిన ho(gof)=(hog)of అని నిరూపించుము.

A: (a) $$(fof)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-1}=\frac{\frac{x+1+x-1}{\cancel{x-1}}}{\frac{x+1-(x-1)}{\cancel{x-1}}}=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=x$$

$$\therefore (fofof)(x)=f[fof(x)]=f(x)$$

(b) Proof: ***Part–1***: దత్తాంశం నుండి f:A→B మరియు g:B→C ⇒ gof:A→C

ఇప్పుడు, gof:A→C మరియు h:C→D ⇒ ho(gof):A→D

మరియు, g:B→C మరియు h:C→D ⇒ hog : B→D

ఇప్పుడు, f : A→B మరియు hog:B→D ⇒ (hog)of:A→D

కావున, ho(gof) మరియు (hog)of లకు ఒకే ప్రదేశము A కలదు.

Part–2: a∈A అనుకొనుము.

ఇప్పుడు, [ho(gof)](a)=h[(gof)(a)]=h[g(f(a))]=(hog)[f(a)]=[(hog)of](a)

కావున, Part–1, Part–2 ల నుండి ho(gof)=(hog)of

---

19. పరిమిత గణితాను గమన సిద్ధాంతంనుపయోగించి ప్రతి n∈N కు $49^n+16n-1$ను 64 భాగిస్తుందని చూపండి.

Sol: $S(n): 49^n+16n-1=64q,\ q\in Z$

Step 1: S(1) యొక్క L.H.S$=49^{(1)}+16(1)-1=49+16-1=64=64(1)$

⇒ 64 ను 64 భాగిస్తుంది.

∴ S(1) సత్యం

Step 2: k∈N కు S(k) సత్యం అనుకొనుము

$S(k): 49^k+16k-1=64q$ ....(1)

Step 3: ఇప్పుడు S(k+1) సత్యమని చూపవలెను

(1) నుండి (k+1) వ పదమును వ్రాయగా

$L.H.S=49^{k+1}+16(k+1)-1=49^k.49+16k+16-1$

$=(64q-16k+1).49+16k+15$ (from (1))

$=64q.49-16k.49+1.49+16k+15=64q.49-16k.(49-1)+(49+15)$

$=64q.49-16k.(48)+64=64q.49-16k.(4.12)+64$

$=64q.49-64k(12)+64=64(49q-12k+1)=64($ఒక పూర్ణసంఖ్య$)$

కావున, S(k) సత్యమైన S(k+1) కూడా సత్యమగును.

కావున పరిమిత గణితానుగమన సిద్ధాంతం నుంచి ప్రతి n∈N కి దత్త ప్రవచనం S(n) సత్యం

20. $\begin{vmatrix} a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ 2a+1 & a+2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^3$ **అని చూపండి.**

A: $$\text{L.H.S} = \begin{vmatrix} a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ 2a+1 & a+2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-1 & a-1 & 0 \\ 2a-2 & a-1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \to R_1 - R_2 \\ R_2 \to R_2 - R_3 \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} (a-1)(a+1) & a-1 & 0 \\ 2(a-1) & a-1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)(a-1)\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2[0(6-3)-0[3(a+1)-3]+1(a+1-2)]$$

$= (a–1)^2 (a–1) = (a–1)^3 = \text{R.H.S}$

---

21. **x+y+z=1, 2x+2y+3z=6, x+4y+9z=3 రేఖీయ సమీకరణాలను క్రామర్ పద్ధతిన సాధించండి.**

A: ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థను మాత్రిక సమీకరణ రూపంలో వ్రాయగా $AX = D$, ఇక్కడ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ఇప్పుడు, $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$

$= 1(18-12)-1(18-3)+1(8-2) = 1(6) –1(15) + 1(6) = 6 – 15 + 6 = –3$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$= 1(18 – 12) –1 (54 – 9) + 1(24 – 6)= 1(6) –1 (45) + 1(18) = 6 – 45 + 18 = –21$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$= 1(54 – 9)–1(18 – 3)+1(6 – 6) \quad = 1 (45) – 1(15) + 1(0) = 45 – 15 + 0 = 30$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 1(6 – 24) – 1(6–6) + 1(8 – 2)= 1(–18) –1 (0) + 1(6)= –18 – 0 + 6 = –12$

$\therefore$ క్రామర్ పద్ధతి ప్రకారం, $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\cancel{-21}}{\cancel{3}} = 7;\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\cancel{30}}{\cancel{-3}} = 10\,; z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\cancel{-12}}{\cancel{-3}} = 4$

$\therefore$ సాధన x=7, y=–10, z=4

22. **ఈ క్రింది అతలీయ రేఖల మధ్య కనిష్ట దూరము కనుగొనుము.**

$$\bar{r}=(6\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k})+t(\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}) \text{ మరియు } \bar{r}=(-4\bar{i}-\bar{k})+s(3\bar{i}-2\bar{j}-2\bar{k})$$

Sol: దత్త అతలీయ రేఖలు $\bar{r}=(6\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k})+t(\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k})$; $\bar{r}=(-4\bar{i}-\bar{k})+s(3\bar{i}-2\bar{j}-2\bar{k})$

సూత్రం: $\bar{r}=\bar{a}+t\bar{b}$, $\bar{r}=\bar{c}+s\bar{d}$ రేఖల మధ్య కనిష్ట దూరము(SD)= $\dfrac{|(\bar{a}-\bar{c}).(\bar{b}x\bar{d})|}{|\bar{b}x\bar{d}|}$

దత్త రేఖలను $\bar{r}=\bar{a}+t\bar{b}$, $\bar{r}=\bar{c}+s\bar{d}$ తో పోల్చగా

$\bar{a}=6\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$ and $\bar{b}=\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$

$\bar{c}=-4\bar{i}-\bar{k}$ and $\bar{d}=3\bar{i}-2\bar{j}-2\bar{k}$

కావున, $\bar{a}-\bar{c}=(6\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k})-(-4\bar{i}-\bar{k})=10\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$

$$\bar{b}\times\bar{d}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -2 & 2\\ 3 & -2 & -2\end{vmatrix}=\bar{i}(4+4)-\bar{j}(-2-6)+\bar{k}(-2+6)=8\bar{i}+8\bar{j}+4\bar{k}$$

$\therefore(\bar{a}-\bar{c}).(\bar{b}\times\bar{d})=(10\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}).(8\bar{i}+8\bar{j}+4\bar{k})=80+16+12=108$

మరియు $|\bar{b}\times\bar{d}|=\sqrt{8^2+8^2+4^2}=\sqrt{64+64+16}=\sqrt{144}=12$

$\therefore$ కనిష్ట దూరం(SD) = $\dfrac{|(\bar{a}-\bar{c}).(\bar{b}\times\bar{d})|}{|\bar{b}\times\bar{d}|}=\dfrac{\cancel{108}}{\cancel{12}}=9$

---

23. **A+B+C=$\frac{\pi}{2}$ అయిన cos2A+cos2B+cos2C=1+4sinAsinBsinC అని నిరూపించండి.**

A: L.H.S = cos2A+cos2B+cos2C $=2\cos\left(\dfrac{2A+2B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{2A-2B}{2}\right)+\cos 2C$

$= 2\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos 2C = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-C\right)\cos(A-B)+\cos 2C$

$= 2\sin C\cos(A-B)+(1-2\sin^2 C)$ $[\because \cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta]$

$= 1+2\sin C[\cos(A-B)-\sin C] = 1+2\sin C[\cos(A-B)-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-(A+B)\right)]$

$= 1+2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)] = 1+2\sin C[2\sin A\sin B]$

$= 1+4\sin A\sin B\sin C$ = R.H.S

24. **$r + r_3 + r_1 - r_2 = 4R\cos B$ అని చూపండి.**

A: L.H.S$=r+r_3+r_1-r_2=(r_3+r_1)+(r-r_2)$

$$=\left(4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)+\left(4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$=4R\left(\cos\frac{B}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\right)-\sin\frac{B}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\right)$$

$$=4R\left(\cos\frac{B}{2}\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)-\sin\frac{B}{2}\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)\right)=4R\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$=4R\left[\cos^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right]=4R\cos B=\text{R.H.S}\qquad\left[\because\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\cos\theta\right]$$