BULLET
MODEL PAPER

A 'MULTI QUESTION PAPER' WITH 'BULLET ANSWERS'

SAQ & LAQ SECTIONS

SAQ సెక్షన్ - B

Q11. మాత్రికలు

• **A ఒక సాధారణ మాత్రిక అయిన $A^{-1}=\dfrac{\text{Adj }A}{\det A}$ అని నిరూపించండి.**

A: $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ అనుకొనుము.

$a_1,b_1,c_1,$ .....ల సహగుణావయవాలను వరుసగా A_1,B_1,C_1 ......అనుకొందాం

$$\therefore \text{Adj }A=\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}^T \Rightarrow \text{Adj}A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$$

$$A.(\text{Adj}A)=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1 & a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2 & a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3 \\ a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1 & a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2 & a_2A_3+b_2B_3+c_2C_3 \\ a_3A_1+b_3B_1+c_3C_1 & a_3A_2+b_3B_2+c_3C_2 & a_3A_3+b_3B_3+c_3C_3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix}=(\det A)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=(\det A).I$$

$\therefore A(\text{Adj }A)=(\det A)\,I$;

ఇదే విధంగా $(\text{Adj }A)A=(\det A)\,I$ అని నిరూపించవచ్చు.

$\therefore A\left(\dfrac{\text{Adj }A}{\det A}\right)=I$ ($\because \det A\neq 0$ A సాధారణ మాత్రిక)

$\therefore\ A^{-1}=\dfrac{\text{Adj }A}{\det A}$ [$\because AB=I \Rightarrow A^{-1}=B$]

• **$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ అయిన $A^2-4A-5I=O$ అని చూపండి.**

A: $A^2=A.A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 1+4+4 & 2+2+4 & 2+4+2 \\ 2+2+4 & 4+1+4 & 4+2+2 \\ 2+4+2 & 4+2+2 & 4+4+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$4A=4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$5I=5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2-4A-5I=\begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}=O$$

• **$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ అనునది సాధారణ మాత్రిక అని నిరూపించి A^{-1} ను కనుగొనుము.**

A: $\det A=1(4-3)-2(6-3)+1(3-2)=1-6+1=-4\neq 0$

$\therefore$ A సాధారణ మాత్రిక

$$\text{Adj }A=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}^T$$

$$\therefore \text{Adj }A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{\det A}(\text{Adj }A)=\frac{1}{-4}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1/4 & 3/4 & -1 \\ 3/4 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 1 \end{bmatrix}$$

• **$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $(aI+bE)^3=a^3I+3a^2bE$ అని చూపండి.**

A: $aI+bE=a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$

$$L.H.S=(aI+bE)^3=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^2+0 & ab+ab \\ 0+0 & 0+a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}\quad ....(1)$$

$$R.H.S=a^3I+3a^2bE=a^3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+3a^2b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 3a^2b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}......(2)$$

$\therefore$ (1), (2) నుండి L.H.S= R.H.S.కావున నిరూపించబడింది.

• **$\theta-\phi=\pi/2$, అయిన $\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos^2\phi & \cos\phi\sin\phi \\ \cos\phi\sin\phi & \sin^2\phi \end{bmatrix}=O$ అని చూపండి.**

A: దత్తాంశం నుండి $\theta-\phi=\pi/2 \Rightarrow \theta=(\pi/2)+\phi$

$\cos\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\phi\right)=-\sin\phi$; $\sin\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\phi\right)=\cos\phi$

$$\therefore \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos^2\phi & \cos\phi\sin\phi \\ \cos\phi\sin\phi & \sin^2\phi \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sin^2\phi & -\sin\phi\cos\phi \\ -\sin\phi\cos\phi & \cos^2\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos^2\phi & \cos\phi\sin\phi \\ \cos\phi\sin\phi & \sin^2\phi \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cancel{\sin^2\phi\cos^2\phi}-\cancel{\sin^2\phi\cos^2\phi} & \cancel{\sin^3\phi\cos\phi}-\cancel{\sin^3\phi\cos\phi} \\ \cancel{-\sin\phi\cos^3\phi}+\cancel{\sin\phi\cos^3\phi} & \cancel{-\sin^2\phi\cos^2\phi}+\cancel{\sin^2\phi\cos^2\phi} \end{bmatrix}=O$$

Q12. సదిశా సంకలనం

• $-\bar{a}+4\bar{b}-3\bar{c}, 3\bar{a}+2\bar{b}-5\bar{c}, -3\bar{a}+8\bar{b}-5\bar{c}, -3\bar{a}+2\bar{b}+\bar{c}$ లు సతలీయములని చూపుము

A: 'O' ఆది బిందువు అయిన

$\overline{OP}=-\bar{a}+4\bar{b}-3\bar{c}, \overline{OQ}=3\bar{a}+2\bar{b}-5\bar{c},$

$\overline{OR}=-3\bar{a}+8\bar{b}-5\bar{c}, \overline{OS}=-3\bar{a}+2\bar{b}+\bar{c}$

$\overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP}=(3\bar{a}+2\bar{b}-5\bar{c})-(-\bar{a}+4\bar{b}-3\bar{c})=4\bar{a}-2\bar{b}-2\bar{c}$

$\overline{PR}=\overline{OR}-\overline{OP}=(-3\bar{a}+8\bar{b}-5\bar{c})-(-\bar{a}+4\bar{b}-3\bar{c})=-2\bar{a}+4\bar{b}-2\bar{c}$

$\overline{PS}=\overline{OS}-\overline{OP}=(-3\bar{a}+2\bar{b}+\bar{c})-(-\bar{a}+4\bar{b}-3\bar{c})=-2\bar{a}-2\bar{b}+4\bar{c}$

$$[\overline{PQ}\ \overline{PR}\ \overline{PS}]=\begin{vmatrix}4 & -2 & -2\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{vmatrix}[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$$

$=[4(16-4)+2(-8-4)-2(4+8)][\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$

$=[4(12)+2(-12)-2(12)][\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$

$=[48-24-24][\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]=0[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]=0$

కావున, $\overline{PQ}, \overline{PR}, \overline{PS}$ లు సతలీయములు.

P,Q,R,S అనే బిందువులు సతలీయములు.

• $3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k}, 2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k}, -\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}, 4\bar{i}+5\bar{j}+\lambda\bar{k}$ లు స్థానసదిశలుగా గల బిందువులు సతలీయములైతే $\lambda=-146/17$ అని చూపండి.

A: $\overline{OP}=3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k}, \overline{OQ}=2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k},$

$\overline{OR}=-\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}, \overline{OS}=4\bar{i}+5\bar{j}+\lambda\bar{k}$

$\overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP}=(2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k})-(3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k})=-\bar{i}+5\bar{j}-3\bar{k}$

$\overline{PR}=\overline{OR}-\overline{OP}=(-\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k})-(3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k})=-4\bar{i}+3\bar{j}+3\bar{k}$

$\overline{PS}=\overline{OS}-\overline{OP}=(4\bar{i}+5\bar{j}+\lambda\bar{k})-(3\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k})=\bar{i}+7\bar{j}+(\lambda+1)\bar{k}$

కాని $[\overline{PQ}\ \overline{PR}\ \overline{PS}]=0$ [P,Q,R,S లు సతలీయములు కావున]

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}-1 & 5 & -3\\ -4 & 3 & 3\\ 1 & 7 & \lambda+1\end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow(-1)[3(\lambda+1)-21]-5[-4(\lambda+1)-3]-3[(-28)-3]=0$

$\Rightarrow-1(3\lambda-18)-5(-4\lambda-7)-3(-31)=0$

$\Rightarrow-3\lambda+18+20\lambda+35+93=0\Rightarrow-3\lambda+20\lambda+35+93+18=0$

$\Rightarrow 17\lambda+146=0\Rightarrow 17\lambda=-146\Rightarrow\lambda=-146/17$

• ABCDEF అనునది O కేంద్రంగా గల క్రమషడ్భుజి అయిన $\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}+\overline{AE}+\overline{AF}=3\overline{AD}=6\overline{AO}$ అని చూపండి.

A: 'O' కేంద్రంగా గల ABCDEF అనే క్రమషడ్భుజిలో

$\therefore(\overline{AB}+\overline{AC})+(\overline{AD})+(\overline{AE}+\overline{AF})$

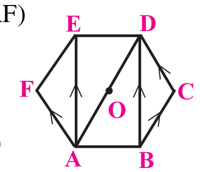
$=(\overline{AB}+\overline{AC})+(\overline{AD})+(\overline{BD}+\overline{CD})$

$[\because \overline{AE}=\overline{BD}, \overline{AF}=\overline{CD}]$

$=(\overline{AB}+\overline{BD})+\overline{AD}+(\overline{AC}+\overline{CD})$

$=(\overline{AD})+(\overline{AD})+\overline{AD}=3\overline{AD}$

$=3(2\overline{AO})\ [\because \overline{AD}=2\overline{AO}]=6\overline{AO}$



Q13. సదిశల లబ్ధాలు

• A(1,2,3), B(2,3,1), C(3,1,2) అనే బిందువులతో ఏర్పడే త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కోండి.

A: $\overline{OA}=\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}, \overline{OB}=2\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}, \overline{OC}=3\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k},$

$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=(2\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k})-(\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k})=\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$

$\overline{AC}=\overline{OC}-\overline{OA}=(3\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k})-(\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k})=2\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=\bar{i}(-1-2)-\bar{j}(-1+4)+\bar{k}(-1-2)$$

$=-3\bar{i}-3\bar{j}-3\bar{k}$

$|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+(-3)^2}$

$=\sqrt{9+9+9}=\sqrt{27}=\sqrt{9\times3}=3\sqrt{3}$

ΔABC వైశాల్యం $=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ చ.యూ

• (1,2,3), (2,-1,1),(1,2,-4) అనే బిందువుల గుండా పోవు తలమునకు లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశను కనుగొనుము.

A: $\overline{OA}=\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}, \overline{OB}=2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}, \overline{OC}=\bar{i}+2\bar{j}-4\bar{k}$

ఇక్కడ 'O' ఆది బిందువు

ఇప్పుడు $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=(2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k})-(\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k})=\bar{i}-3\bar{j}-2\bar{k}$

$\overline{AC}=\overline{OC}-\overline{OA}=(\bar{i}+2\bar{j}-4\bar{k})-(\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k})=-7\bar{k}$

$$\Rightarrow\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -3 & -2\\ 0 & 0 & -7\end{vmatrix}$$

$=\bar{i}[(-3)(-7)-0(-2)]-\bar{j}[1(-7)-(0)(-2)]+\bar{k}[1(0)-(0)(-3)]$

$=\bar{i}(21)-j(-7)=21\bar{i}+7\bar{j}=7(3\bar{i}+\bar{j})$

$|\overline{AB}\times\overline{AC}|=7\sqrt{3^2+1^2}=7\sqrt{9+1}=7\sqrt{10}$

యూనిట్ సదిశ $=\pm\frac{\overline{AB}\times\overline{AC}}{|\overline{AB}\times\overline{AC}|}=\pm\frac{\cancel{7}(3\bar{i}+\bar{j})}{\cancel{7}\sqrt{10}}=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(3\bar{i}+\bar{j})$

Q14. త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు

• $\tan\theta=\frac{b}{a}$ అయిన $a\cos2\theta+b\sin2\theta=a$ అని చూపండి.

A: దత్తాంశం నుండి $\tan\theta=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{b}{a}\Rightarrow b\cos\theta=a\sin\theta$

$\therefore$ L.H.S$=a\cos2\theta+b\sin2\theta=a\cos2\theta+b(2\sin\theta\cos\theta)$

$=a\cos2\theta+2\sin\theta(b\cos\theta)=a\cos2\theta+2\sin\theta\,(a\sin\theta)$

$=a(1-2\sin^2\theta)+2a.\sin^2\theta.$

$=a\ \cancel{-2a\sin^2\theta}\ \cancel{+2a\sin^2\theta}\ =a=$ R.H.S.

• $\frac{1}{\sin10^o}-\frac{\sqrt{3}}{\cos10^o}=4$ అని చూపండి.

A: L.H.S $=\frac{1}{\sin10^o}-\frac{\sqrt{3}}{\cos10^o}=\frac{\cos10^o-\sqrt{3}\sin10^o}{\sin10^o\cos10^o}$

$=\frac{2(\frac{1}{2}\cos10^o-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin10^o)}{\sin10^o\cos10^o}=\frac{2(\sin30^o\cos10^o-\cos30^o\sin10^o)}{\sin10^o\cos10^o}$

$=\frac{2(\sin(30^o-10^o)}{\sin10^o\cos10^o}=\frac{2\sin20^o}{\sin10^o\cos10^o}$

$=\frac{2.2\sin10^o\cos10^o}{\sin10^o\cos10^o}=2.2=4=$ R.H.S

Q15. త్రికోణమితీయ సమీకరణాలు

- $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$ ను సాధించండి.

A: దత్త సమీకరణము $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$

దీనిని $\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$, తో భాగించగా

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\cos\theta\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow\sin\theta\cos 30^\circ-\cos\theta\sin 30^\circ=\sin 45^\circ$

$\Rightarrow\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{4}\Rightarrow\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$.

దీని ప్రధాన విలువ $\alpha=\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $\theta=n\pi+(-1)^n\alpha,\ n\in Z$

$\Rightarrow\theta-\frac{\pi}{6}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}\Rightarrow\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6},\ n\in Z$

- $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\sqrt{3}$ ను సాధించండి.

A: దత్త సమీకరణము $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\sqrt{3}$

$\Rightarrow\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}$

దీనిని $\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$, తో భాగించగా

$\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\sin x+\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow\cos x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\sin x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow\cos x\cos 45^\circ+\sin x\sin 45^\circ=\cos 30^\circ$

$\Rightarrow\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{6}$. దీని ప్రధాన విలువ $\alpha=\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $\theta=2n\pi\pm\alpha,\ n\in Z$

$\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=2n\pi\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4},\ n\in Z$

- $2\cos^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta+1=0$ ను సాధించండి.

A: దత్త సమీకరణము $2\cos^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta+1=0$

$\Rightarrow 2(1-\sin^2\theta)-\sqrt{3}\sin\theta+1=0$

$\Rightarrow 2-2\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta+1=0$

$\Rightarrow 2\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta-3=0$

$\Rightarrow 2\sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta-\sqrt{3}\sin\theta-(\sqrt{3})^2=0$

$\Rightarrow 2\sin\theta(\sin\theta+\sqrt{3})-\sqrt{3}(\sin\theta+\sqrt{3})=0$

$\Rightarrow(2\sin\theta-\sqrt{3})(\sin\theta+\sqrt{3})=0$

$\Rightarrow(2\sin\theta-\sqrt{3})=0$ (or) $(\sin\theta+\sqrt{3})=0$

$2\sin\theta=\sqrt{3}$ (or) $\sin\theta=-\sqrt{3}$ (దీనికి సాధన లేదు)

ఇప్పుడు, $2\sin\theta=\sqrt{3}\Rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$, దీని ప్రధాన విలువ $\alpha=\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $\theta=n\pi+(-1)^n\alpha,\ n\in Z$

$\Rightarrow\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3},\ n\in Z$

- $1+\sin^2\theta=3\sin\theta\cos\theta$ ను సాధించండి.

A: దత్త సమీకరణమును $\cos^2\theta$తో భాగించగా,

$\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{3\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}\Rightarrow\sec^2\theta+\tan^2\theta=3\tan\theta$

$\Rightarrow(1+\tan^2\theta)+\tan^2\theta=3\tan\theta\Rightarrow 2\tan^2\theta-3\tan\theta+1=0$

$\Rightarrow(2\tan\theta-1)(\tan\theta-1)=0\Rightarrow\tan\theta=1$ (or) $\tan\theta=1/2$

ఇప్పుడు, $\tan\theta=1=\tan\pi/4$. దీని ప్రధాన విలువ $\alpha=\pi/4$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $\theta=n\pi+\frac{\pi}{4},\ n\in Z$

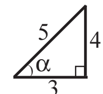
$\tan\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2}$ $\therefore$ ప్రధాన విలువ $\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2}$

$\therefore$ సాధారణ సాధన $\theta=n\pi+\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2},\ n\in Z$

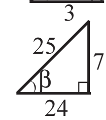
Q16. విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు

- $\mathrm{Sin}^{-1}\frac{4}{5}+\mathrm{Sin}^{-1}\frac{7}{25}=\mathrm{Sin}^{-1}\frac{117}{125}$ అని నిరూపించండి.

Sol: $\mathrm{Sin}^{-1}\frac{4}{5}=\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\frac{4}{5}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{3}{5}$



$\mathrm{Sin}^{-1}\frac{7}{25}=\beta\Rightarrow\sin\beta=\frac{7}{25}\Rightarrow\cos\beta=\frac{24}{25}$

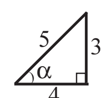


$\therefore\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

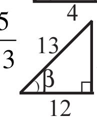
$=\frac{4}{5}\times\frac{24}{25}+\frac{3}{5}\times\frac{7}{25}=\frac{96+21}{125}=\frac{117}{125}$.

- $\mathrm{Sin}^{-1}\frac{3}{5}+\mathrm{Cos}^{-1}\frac{12}{13}=\mathrm{Cos}^{-1}\frac{33}{65}$ అని నిరూపించండి.

A: $\mathrm{Sin}^{-1}\frac{3}{5}=\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{4}{5}$



$\mathrm{Cos}^{-1}\frac{12}{13}=\beta\Rightarrow\sin\beta=\frac{12}{13}\Rightarrow\sin\beta=\frac{5}{13}$



$\therefore\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{48-15}{65}=\frac{33}{65}$.

- $\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2}+\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5}+\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$ అని నిరూపించండి.

A: సూత్రం: $\mathrm{Tan}^{-1}x+\mathrm{Tan}^{-1}y=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

$\therefore\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2}+\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5}=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}\right)=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\frac{5+2}{\cancel{10}}}{\frac{10-1}{\cancel{10}}}\right)=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{7}{9}$

$\therefore\text{L.H.S}=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{7}{9}+\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{8}=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{8}}\right)=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\frac{56+9}{\cancel{72}}}{\frac{72-7}{\cancel{72}}}\right)$

$=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{65}{65}\right)=\mathrm{Tan}^{-1}1=\frac{\pi}{4}=\text{R.H.S}$

Q17. త్రిభుజ ధర్మాలు

• $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{s^2}{\Delta}$ అని నిరూపించండి.

A: L.H.S= $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$

$$=\frac{s(s-a)}{\Delta}+\frac{s(s-b)}{\Delta}+\frac{s(s-c)}{\Delta}$$

$$=\frac{s(s-a)+s(s-b)+s(s-c)}{\Delta}$$

$$=\frac{s[(s-a)+(s-b)+(s-c)]}{\Delta}$$

$$=\frac{s[3s-(a+b+c)]}{\Delta}=\frac{s[3s-2s]}{\Delta}$$

$$=\frac{s[s]}{\Delta}=\frac{s^2}{\Delta}=\text{R.H.S}$$

• $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$ అని నిరూపించండి.

A: $\text{L.H.S}=\cot A+\cot B+\cot C=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos C}{\sin C}$

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc(\sin A)}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca(\sin B)}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab(\sin C)}$$

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{4(\frac{1}{2}bc\sin A)}+\frac{c^2+a^2-b^2}{4(\frac{1}{2}ca\sin B)}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4(\frac{1}{2}ab\sin C)}$$

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{4\Delta}+\frac{c^2+a^2-b^2}{4\Delta}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4\Delta}$$

$$=\frac{b^2+c^2\cancel{-a^2}\cancel{+c^2}\cancel{+a^2}\cancel{-b^2}+a^2\cancel{+b^2}\cancel{-c^2}}{4\Delta}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}=\text{RHS}$$

• $\cot\frac{A}{2}:\cot\frac{B}{2}:\cot\frac{C}{2}=3:5:7$, అయిన a:b:c=6:5:4 అని చూపండి.

A: దత్తాంశం నుండి $\cot\frac{A}{2}:\cot\frac{B}{2}:\cot\frac{C}{2}=3:5:7$

$$\Rightarrow\frac{s(s-a)}{\Delta}:\frac{s(s-b)}{\Delta}:\frac{s(s-c)}{\Delta}=3:5:7$$

$\Rightarrow (s-a):(s-b):(s-c)=3:5:7$

s–a=3k ....(1), s–b=5k ....(2), s–c=7k .....(3)అనుకొనుము

ఇప్పుడు, (1)+(2)+(3) $\Rightarrow$ 3s–(a+b+c)=15k

$\Rightarrow$ 3s–2s=15k $\Rightarrow$ s=15k

(1) నుండి, s–a=3k $\Rightarrow$ 15k–a=3k $\Rightarrow$ a=15k–3k=12k

(2) నుండి, s–b=5k $\Rightarrow$ 15k–b=5k $\Rightarrow$ b=15k–5k=10k

(3) నుండి, s–c=7k $\Rightarrow$ 15k–c=7k $\Rightarrow$ c=15k–7k=8k

$\therefore$ a : b : c = 12k : 10k : 8k = 12 : 10 : 8 =6 : 5 : 4

• $\sin\theta=\frac{a}{(b+c)}$ అయిన $\cos\theta=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cos\left(\frac{A}{2}\right)$ అని చూపండి.

A: దత్తాంశం నుండి $\sin\theta=\frac{a}{b+c}\Rightarrow\sin^2\theta=\frac{a^2}{(b+c)^2}$

$\therefore\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ $\quad[\because\sin^2\theta+\cos^2\theta=1]$

$$=1-\frac{a^2}{(b+c)^2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}=\frac{(b^2+c^2+2bc)-a^2}{(b+c)^2}$$

$$=\frac{2bc+(b^2+c^2-a^2)}{(b+c)^2}=\frac{2bc+2bc\cos A}{(b+c)^2}$$

$$\left(\because\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos A\right)$$

$$=\frac{2bc(1+\cos A)}{(b+c)^2}=\frac{2bc.2\cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}=\frac{4bc\cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}$$

$$\therefore\cos\theta=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cos\left(\frac{A}{2}\right)$$

• a=(b–c)secθ అయిన $\tan\theta=\frac{2\sqrt{bc}}{b-c}\sin\left(\frac{A}{2}\right)$ అని నిరూపించండి.

A: దత్తాంశం నుండి

$a=(b-c)\sec\theta\Rightarrow\sec\theta=\frac{a}{b-c}\Rightarrow\sec^2\theta=\frac{a^2}{(b-c)^2}$

$\therefore\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$ $\quad[\because\sec^2\theta-\tan^2\theta=1]$

$$=\frac{a^2}{(b-c)^2}-1=\frac{a^2-(b-c)^2}{(b-c)^2}$$

$$=\frac{a^2-(b^2+c^2-2bc)}{(b-c)^2}=\frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{(b-c)^2}$$

$$=\frac{2bc-(b^2+c^2-a^2)}{(b-c)^2}=\frac{2bc-(2bc\cos A)}{(b-c)^2}$$

$$=\frac{2bc(1-\cos A)}{(b-c)^2}=\frac{2bc.\left(2\sin^2\frac{A}{2}\right)}{(b-c)^2}=\frac{4bc.\sin^2\frac{A}{2}}{(b-c)^2}$$

$$\therefore\tan\theta=\frac{2\sqrt{bc}}{b-c}\sin\left(\frac{A}{2}\right)$$

LAQ సెక్షన్ - C

Q18. ప్రమేయాలు:

- **$f:A\to B$, $g:B\to C$ లు ద్విగుణ ప్రమేయాలు అయిన అప్పుడు $gof:A\to C$ ద్విగుణ ప్రమేయం అని నిరూపించండి.**

Sol: f,g లు రెండు ద్విగుణ ప్రమేయాలు. కావున f,g లు రెండు అన్వేకం మరియు సంగ్రస్తము

(i) $gof:A\to C$ **అన్వేకం అని చూపుట:**

ఇప్పుడు $(gof)(a_1)=(gof)(a_2)$, [$a_1, a_2\in A$ నకు]

$\Rightarrow g[f(a_1)]=g[f(a_2)]$

$\Rightarrow f(a_1)=f(a_2)$ ($\because$ g ఒక అన్వేక ప్రమేయం)

$\Rightarrow a_1=a_2$ ($\because$ f ఒక అన్వేక ప్రమేయం)

$\therefore$ gof: $A\to C$ ఒక అన్వేక ప్రమేయం

(ii) $gof:A\to C$ **సంగ్రస్తము అని చూపుట:**

$f:A\to B$ సంగ్రస్తము కావున $f(a)=b$....(1),

[$\because$ ప్రతి $b\in B$నకు $a\in A$అనే మూలకం $f(a)=b$ అగునట్లు ఉంటుంది]

$g:B\to C$ సంగ్రస్తము కావున $g(b)=c$....(2),

[$\because$ ప్రతి $c\in C$ నకు$b\in B$ అనే మూలకం$g(b)=c$అగునట్లు ఉంటుంది]

ఇప్పుడు $(gof)(a)=g[f(a)]=g(b)=c$, [(1), (2)ల నుండి]

$\therefore$ gof: $A\to C$ సంగ్రస్తము

[$\because$ ప్రతి $c\in C$ నకు $a\in A$ అనే మూలకం $gof(a)=c$ అగునట్లు ఉంటుంది]

$gof:A\to C$ అన్వేకము మరియు సంగ్రస్తము అయినది. కావున ఇది ద్విగుణ ప్రమేయమైనది.

- **$f:A\to B$, $g:B\to C$ లు ద్విగుణ ప్రమేయాలు అయిన $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ అని నిరూపించండి.**

Sol: Part -1: $f:A\to B$, $g:B\to C$ లు రెండు ద్విగుణ ప్రమేయాలు

(i) $gof:A\to C$ ద్విగుణ ప్రమేయం. కావున $(gof)^{-1}: C\to A$ కూడా ద్విగుణ ప్రమేయమగును.

(ii) $f^{-1}:B\to A$, $g^{-1}:C\to B$ లు రెండు ద్విగుణ ప్రమేయాలు

$\Rightarrow (f^{-1}og^{-1})$: $C\to A$ కూడా ద్విగుణ ప్రమేయం

కావున $(gof)^{-1}$ మరియు $f^{-1}og^{-1}$ లకు ఒకే ప్రదేశం 'C' కలదు.

Part–2: $f:A\to B$ ద్విగుణ ప్రమేయం

కావున $f(a)=b\Rightarrow a=f^{-1}(b)$........(1), [ఇక్కడ $a\in A$, $b\in B$]

$g:B\to C$ ద్విగుణ ప్రమేయం

కావున $g(b)=c\Rightarrow b=g^{-1}(c)$........(2), [ఇక్కడ $b\in B$, $c\in C$]

$gof:A\to C$ ద్విగుణ ప్రమేయం

కావున $gof(a)=c\Rightarrow a=(gof)^{-1}(c)$.........(3)

ఇప్పుడు, $(f^{-1}og^{-1})(c)=f^{-1}[g^{-1}(c)]=f^{-1}(b)=a$ ....(4), [(1) & (2) ల నుండి]

$\therefore (gof)^{-1}(c)=(f^{-1}og^{-1})(c)$, $\forall c\in C$, [(3) & (4) ల నుండి]

కావున $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ అని నిరూపించబడినది.

- **$f:A\to B$ ఒక ప్రమేయం I_A, I_B లు A, B ల మీద తత్సమ ప్రమేయాలైతే $foI_A=f=I_Bof$ అని నిరూపించండి.**

A: (i) **$foI_A=f$ అని నిరూపించుట**

Part–1: $f:A\to B$ ఒక ప్రమేయము.

$I_A:A\to A$ అని మనకు తెలుసు

$\therefore foI_A:A\to B$

foI_A మరియు f ప్రమేయాలకు ఒకే ప్రదేశము A కలదు.

Part–2: $a\in A$,నకు $(foI_A)(a)=f[I_A(a)]$

$=f(a)$ [$\because$ $a\in A$ నకు $I_A(a)=a$]

కావున $foI_A=f$ అని నిరూపించబడినది.

(ii) **$I_Bof=f$ అని నిరూపించుట**

Part–1: $f:A\to B$ ఒక ప్రమేయము.

$I_B:B\to B$ అని మనకు తెలుసు

$\therefore I_Bof:A\to B$

I_B మరియు f ప్రమేయాలకు ఒకే ప్రదేశము A కలదు.

Part–2: $a\in A$నకు $(I_Bof)(a)=I_B[f(a)]$

$=f(a)$ [$\because$ $I_B(b)=b\ \forall\ b\in B$]

కావున $I_Bof=f$అని నిరూపించబడినది.

- **$f:A\to B$ ద్విగుణ ప్రమేయం అయిన (i) $fof^{-1}=I_B$ (ii) $f^{-1}of=I_A$అని నిరూపించండి.**

A: (i) **$fof^{-1}=I_B$ అని నిరూపించుట**

Part-1: $f:A\to B$ ద్విగుణ ప్రమేయం.

కావున $f^{-1}: B\to A$ కూడా ద్విగుణ ప్రమేయం అగును.

$\therefore fof^{-1}: B\to B$

$I_B: B\to B$ అని మనకు తెలుసు

కావున fof^{-1}మరియుI_B, అనే ప్రమేయాలకు ఒకే ప్రదేశం B కలదు.

Part-2: $b\in B$, నకు $(fof^{-1})(b)=f[f^{-1}(b)]$

$=f(a)$ [$\because$ $f:A\to B$ ద్విగుణ ప్రమేయం $\Rightarrow f(a)=b\Rightarrow f^{-1}(b)=a$, $a\in A$నకు]

$=b=I_B(b)$ [$\because$ $b\in B$ నకు $I_B(b)=b$]

కావున $fof^{-1}=I_B$ అని నిరూపించబడినది.

(ii) **$f^{-1}of=I_A$ అని నిరూపించుట**

Part-1: $f:A\to B$ ద్విగుణ ప్రమేయం.

కావున $f^{-1}:B\to A$ కూడా ద్విగుణ ప్రమేయం అగును.

$\therefore f^{-1}of: A\to A$

$I_A: A\to A$అని మనకు తెలుసు.

f^{-1}మరియు I_A అనే ప్రమేయాలకు ఒకే ప్రదేశం A కలదు.

Part-2: $a\in A$,నకు $(f^{-1}of)(a)=f^{-1}[f(a)]$

$=f^{-1}(b)=a$ [$\because$ $f:A\to B$i ద్విగుణ ప్రమేయం $\Rightarrow f(a)=b\Rightarrow f^{-1}(b)=a$]

$=I_A(a)$ [$\because$ $a\in A$ నకు $I_A(a)=a$]

కావున $f^{-1}of=I_A$ అని నిరూపించబడినది

Q19. గణితానుగమనం

- **పరిమిత గణితానుగమన సిద్ధాంతంను ఉపయోగించి $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + n$ పదాల వరకు $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}, \forall n \in N$ అని రుజువు చేయండి.**

A: n వ పదము $T_n = n(n+1)(n+2)$.

$S(n) : 1.2.3 + 2.3.4 + ...+ n(n+1)(n+2)$ పదాలు $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Step 1: S(1) యొక్క L.H.S = 1.2.3=6

S(1)యొక్క $R.H.S = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = \frac{2.3.4}{4} = 6$

∴ L.H.S = R.H.S. కావున, S(1) సత్యం.

Step 2: $k \in N$కు S(k) సత్యం అనుకొనుము.

$S(k) : 1.2.3. + 2.3.4 + ... + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$ ......(1)

Step 3: ఇప్పుడు S(k+1)సత్యమని చూపవలెను

(1)కు ఇరువైపులా (k+1)(k+2)(k+3)ను కలపగా,

$L.H.S = [1.2.3. + 2.3.4 + ... + k(k+1)(k+2)] + (k+1)(k+2)(k+3)$

$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3)$

$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$

$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$ =R.H.S

∴ L.H.S=R.H.S. కావున, S(k+1) సత్యం.

కావున పరిమిత గణితానుగమన సిద్ధాంతం నుంచి ప్రతి $n \in N$ కి దత్త ప్రవచనం S(n) సత్యం

- **$\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + ... +$ n పదాల వరకు $= \frac{n}{3n+1}$ అని చూపండి**

A: n వ పదము $T_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$S(n) : \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + ... + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$

Step 1: S(1) యొక్క $L.H.S = \frac{1}{1.4} = \frac{1}{4}$;

S(1) యొక్క $R.H.S = \frac{1}{3.1+1} = \frac{1}{4}$

∴ L.H.S = R.H.S. కావున, S(1) సత్యం.

Step 2: $k \in N$కు S(k) సత్యం అనుకొనుము.

$S(k) : \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + ... + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{k}{3k+1}$ .....(1)

Step 3: ఇప్పుడు S(k+1)సత్యమని చూపవలెను

(1)కు ఇరువైపులా (k+1) పదాన్ని కలుపగా

$L.H.S = \left[\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + ... + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}\right] + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$

$= \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$

$= \frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)}$

$= \frac{(k+1)\cancel{(3k+1)}}{\cancel{(3k+1)}(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4} = \frac{k+1}{3k+3+1} = \frac{k+1}{3(k+1)+1} = R.H.S$

∴ L.H.S =R.H.S. కావున, S(k+1) సత్యం.

కావున పరిమిత గణితానుగమన సిద్ధాంతం నుంచి ప్రతి $n \in N$ కి దత్త ప్రవచనం S(n) సత్యం

- **పరిమిత గణితానుగమన సిద్ధాంతంను ఉపయోగించి $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+....+n$ పదాల వరకు $= \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}, \forall n \in N$ అని రుజువు చేయండి.**

A: n వ పదము $T_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$S(n) : 1^2 + (1^2 + 2^2) + ... + \frac{n(n+1)(2n+1)^6}{6}$

$= \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$

Step 1: S(1) యొక్క L.H.S= 1^2=1

S(1) యొక్క $R.H.S = \frac{1(1+1)^2(1+2)}{12} = \frac{1(2^2)3}{12} = \frac{1(4)3}{12} = \frac{12}{12} = 1$

∴ L.H.S = R.H.S. కావున, S(1) సత్యం.

Step 2: $k \in N$కు S(k) సత్యం అనుకొనుము.

$S(k) : 1^2 + (1^2 + 2^2) + ... + \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$= \frac{k(k+1)^2(k+2)}{12}$ .....(1)

Step 3: ఇప్పుడు S(k+1)సత్యమని చూపవలెను

$(k+1)^{th}$ పదం $= \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$

$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

(1)కు ఇరువైపులా (k+1) పదాన్ని కలుపగా

$L.H.S = \left[1^2 + (1^2+2^2) + ... + \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\right] + \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

$= \frac{k(k+1)^2(k+2)}{12} + \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

$= \frac{k(k+1)^2(k+2) + 2(k+1)(k+2).(2k+3)}{12}$

$= \frac{(k+1)(k+2)[k(k+1)+2(2k+3)]}{12}$

$= \frac{(k+1)(k+2)(k^2+5k+6)}{12}$

$= \frac{(k+1)(k+2)(k+2)(k+3)}{12} = \frac{(k+1)(k+2)^2(k+3)}{12} = R.H.S$

∴L.H.S =R.H.S. కావున, S(k+1) సత్యం.

కావున పరిమిత గణితానుగమన సిద్ధాంతం నుంచి ప్రతి $n \in N$ కి దత్త ప్రవచనం S(n) సత్యంB

- **పరిమిత గణితానుగమన సిద్ధాంతంను ఉపయోగించి ప్రతి $n \in N$ కు $49^n + 16^n - 1$ను 64 భాగిస్తుందని చూపండి.**

A: $S(n) : 49^n + 16n - 1 = 64q, q \in Z$

Step 1: L.H.S of $S(1) = 49^{(1)} + 16(1) - 1$

$= 49 + 16 - 1 = 64 = 64(1)$

కావున, S(1) సత్యం.

Step 2: $k \in N$కు S(k) సత్యం అనుకొనుము.

$S(k): 49^k + 16k - 1 = 64q$ ....(1)

Step 3: ఇప్పుడు S(k+1)సత్యమని చూపవలెను

(1)నుండి $(k+1)^{th}$ పదమును వ్రాయగా

$L.H.S = 49^{k+1} + 16(k+1) - 1 = 49^k.49 + 16k + 16 - 1$

$= (64q - 16k + 1).49 + 16k + 15$ ((1)నుండి)

$= 64q.49 - 16k.49 + 1.49 + 16k + 15$

$= 64q.49 - 16k.(49-1) + (49+15)$

$= 64q.49 - 16k.(48) + 64 = 64q.49 - 16k.(4.12) + 64$

$= 64q.49 - 64k(12) + 64$

$= 64(49q - 12k + 1) = 64($ ఒక పూర్ణసంఖ్య$)$

కావున, S(k) సత్యమైన S(k+1) కూడా సత్యమగును.

కావున పరిమిత గణితానుగమన సిద్ధాంతం నుంచి ప్రతి $n \in N$ కి దత్త ప్రవచనం S(n) సత్యం

Q20 & 21. మాత్రికలు

12. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)(c-a)$ అని చూపండి.

A: $$\text{L.H.S} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \quad (\because C_2 \to C_2 - C_1,\ C_3 \to C_3 - C_1)$$

$$= (abc)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$= (abc)(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (abc)(b-a)(c-a)[(c+\cancel{a})1-(b+\cancel{a})1]$$

$$= (abc)(b-a)(c-a)[(c-b)]$$

$$= (abc)(a-b)(b-c)(c-a) = \text{R.H.S}$$

• $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$ అని చూపండి.

A: $$\text{L.H.S} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 0 & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c^2-a^2 & c^3-a^3 \end{vmatrix} \quad (\because R_2 \to R_2 - R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 0 & (b-a)(b+a) & (b-a)(b^2+ba+a^2) \\ 0 & (c-a)(c+a) & (c-a)(c^2+ca+a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 0 & a+b & a^2+ab+b^2 \\ 0 & a+c & a^2+ac+c^2 \end{vmatrix}$$

$$= [(b-a)(c-a)]\left[(a+b)(a^2+ac+c^2)-(a+c)(a^2+ab+b^2)\right]$$

$$= [(b-a)(c-a)]\Big[\left[(\cancel{a^3}+\cancel{a^2c}+ac^2)+(\cancel{ba^2}+\cancel{abc}+bc^2)\right] - \left[(\cancel{a^3}+\cancel{a^2b}+ab^2)+(\cancel{ca^2}+\cancel{abc}+cb^2)\right]\Big]$$

$$= [(b-a)(c-a)]\left[ac^2+bc^2-ab^2-cb^2\right]$$

$$= [(b-a)(c-a)]\left[a(c^2-b^2)+bc(c-b)\right]$$

$$= [(b-a)(c-a)][a(c-b)(c+b)+bc(c-b)]$$

$$= [(b-a)(c-a)]\left[[c-b]\left(a(c+b)+bc\right)\right]$$

$$= [(b-a)(c-a)]\left[[c-b](ac+ab+bc)\right]$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) = \text{R.H.S}$$

• $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$ అ.చూ.

A: $$\text{L.H.S} = \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2a+2b+2c & a & b \\ 2a+2b+2c & b+c+2a & b \\ 2a+2b+2c & a & c+a+2b \end{vmatrix} \quad (\because C_1 \to C_1 + C_2 + C_3)$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix} \quad (\because R_2 \to R_2 - R_1,\ R_3 \to R_3 - R_1)$$

$$= 2(a+b+c)1[(a+b+c)^2-0] = 2(a+b+c)^3 = \text{R.H.S}$$

• $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = (a^3+b^3+c^3-3abc)^2$ అ.చూ.

Sol: Let $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = a(bc-a^2)-b(b^2-ac)+c(ab-c^2)$

$$= abc-a^3-b^3+abc+abc-c^3 = -(a^3+b^3+c^3-3abc)$$

$$\Rightarrow \Delta^2 = (a^3+b^3+c^3-3abc)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ఇప్పుడు, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

మొదటి నిర్ధారకం మీద C_{23}ను అనువర్తించగా,

$$= -\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & c & b \\ -b & a & c \\ -c & b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -a^2+cb+bc & -ab+c^2+ab & -ac+ac+b^2 \\ -ab+ab+c^2 & -b^2+ac+a & -bc+a^2+cb \\ -ca+b^2+ac & -cb+bc+a^2 & -c^2+ba+ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1), (2) ల నుండి ఇచ్చిన ఫలితము నిరూపించబడినది.

- **2x – y + 3z =9,x+y+z =6, x–y+z =2 రేఖీయ సమీకరణాలను క్రామర్స్ పద్ధతిన సాధించుము.**

A: ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థ మాత్రికా సమీకరణ రూపం: $AX = D$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(1+1)+1(1-1)+3(-1-1)$$

$$=2(2)+1(0)+3(-2)=4+0-6= -2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9(1+1)\ +1(6-2)+3(-6-2)$$

$$= 9(2)+1(4)+3(-8) = 18+4-24 = -2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(6-2)-9(1-1)+3(2-6)$$

$$= 2(4)-9(0)+3(-4) = 8-0-12 = -4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2+6)+1(2-6)+9(-1-1)$$

$$= 2(8)+1(-4)+9(-2) = 16-4-18 = -6$$

క్రామర్ పద్ధతి ప్రకారం,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\cancel{-2}}{\cancel{-2}} = 1;\ \ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\cancel{-4}}{\cancel{-2}} = 2 \text{ and } z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\cancel{-6}}{\cancel{-2}} = 3$$

$\therefore$ సాధన x=1,y=2,z=3 .

- **3x+4y+5z=18, 2x–y+8z=13, 5x–2y+7z=20 సమీకరణాలను మాత్రిక విలోమ పద్ధతిన సాధించుము.**

A: ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థ మాత్రికా సమీకరణ రూపం: $AX = D$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 8 \\ 5 & -2 & 7 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 18 \\ 13 \\ 20 \end{bmatrix}$$

మాత్రిక విలోమ పద్ధతిలో సాధన $X=A^{-1}D$

ఇప్పుడు A^{-1}ను కనుగొందాం:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 8 \\ 5 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 3(-7+16)-4(14-40)+5(-4+5)$$

$$= 3(9)-4(-26)+5(1) = 27+104+5 = 136$$

$$\text{Adj}A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -7+16 & -(14-40) & -4+5 \\ -(28+10) & (21-25) & -(-6-20) \\ (32+5) & -(24-10) & (-3-8) \end{bmatrix}^T = \begin{vmatrix} 9 & 26 & 1 \\ -38 & -4 & 26 \\ 37 & -14 & -11 \end{vmatrix}^T$$

$$\Rightarrow \text{Adj}A = \begin{bmatrix} 9 & -38 & 37 \\ 26 & -4 & -14 \\ 1 & 26 & -11 \end{bmatrix};\ A^{-1} = \frac{\text{Adj}A}{|A|} = \frac{1}{136}\begin{bmatrix} 9 & -38 & 37 \\ 26 & -4 & -14 \\ 1 & 26 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}D = \frac{1}{136}\begin{bmatrix} 9 & -38 & 37 \\ 26 & -4 & -14 \\ 1 & 26 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 18 \\ 13 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{136}\begin{bmatrix} 9\times18-38\times13+37\times20 \\ 26\times18-4\times13-14\times20 \\ 1\times18+26\times13-11\times20 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{136}\begin{bmatrix} 162-494+740 \\ 468-52-280 \\ 18+338-220 \end{bmatrix} = \frac{1}{136}\begin{bmatrix} 408 \\ 136 \\ 136 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cancel{408}}{\cancel{136}} \\ \frac{\cancel{136}}{\cancel{136}} \\ \frac{\cancel{136}}{\cancel{136}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ సాధన x=3, y=1, z=1

- **2x-y+3z=9, x+y+z=6, x - y + z = 2 సమీకరణాలను గాస్-జోర్డాన్ పద్ధతిలో సాధించుము.**

A: ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థ మాత్రికా సమీకరణ రూపం: $AX = D$

ఇక్కడ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

సర్వమాత్రిక $[AD] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} (R_1 \to R_{12})$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} (R_2 \to R_2 - 2R_1) \\ (R_3 \to R_3 - R_1) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} (R_2 - R_3) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} (R_3 - 2R_2)$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} (R_3 \to R_3\left(-\tfrac{1}{2}\right))$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (R_1 \to R_1 - R_3) \\ (R_2 \to R_1 - R_2) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} (R_1 \to R_1 + R_2)$$

$\therefore\ x = 1, y = 2, z = 3$

Q22 . సదిశల లబ్ధాలు

- $\bar{a}=\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k}, \bar{b}=2\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}, \bar{c}=\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$ అయిన $|(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}|, |\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})|$ లను కనుగొనుము.

A: దత్తాంశం నుండి $\bar{a}=\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k}, \bar{b}=2\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}, \bar{c}=\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$

1) $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$, ను కనుగొనుటకు మొదటగా బ్రాకెట్ పదము $\bar{a}\times\bar{b}$ ను కనుగొనాలి.

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\bar{i}(-2-3)-\bar{j}(1-6)+\bar{k}(1+4)$$
$$=-5\bar{i}+5\bar{j}+5\bar{k}$$

$$\therefore(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -5 & 5 & 5\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\bar{i}(10-5)-\bar{j}(-10-5)+\bar{k}(-5-5)$$
$$=5\bar{i}+15\bar{j}-10\bar{k}=5(\bar{i}+3\bar{j}-2\bar{k})$$
$$\therefore|(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}|=5|\bar{i}+3\bar{j}-2\bar{k}|$$
$$=5\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=5\sqrt{1+9+4}=5\sqrt{14}$$

2) $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ ను కనుగొనుటకు మొదటగా బ్రాకెట్ పదము $\bar{b}\times\bar{c}$ ను కనుగొనాలి.

$$\bar{b}\times\bar{c}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\bar{i}(2-1)-\bar{j}(4-1)+\bar{k}(2-1)=\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}$$

$$\therefore\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\bar{i}(-2+9)-\bar{j}(1-3)+\bar{k}(-3+2)$$
$$=7\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$$
$$\therefore|\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})|=|7\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}|$$
$$=\sqrt{7^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{49+4+1}=\sqrt{54}=\sqrt{9\times6}=3\sqrt{6}$$

- ఈ క్రింది అతలీయ రేఖల మధ్య కనిష్ట దూరము కనుగొనుము.
$\bar{r}=(6\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k})+t(\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k})$,
$\bar{r}=(-4\bar{i}-\bar{k})+s(3\bar{i}-2\bar{j}-2\bar{k})$

A: ఇచ్చిన అతలీయ రేఖలు $\bar{r}=(6\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k})+t(\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k})$;
$\bar{r}=(-4\bar{i}-\bar{k})+s(3\bar{i}-2\bar{j}-2\bar{k})$

సూత్రం: $\bar{r}=\bar{a}+t\bar{b}, \bar{r}=\bar{c}+s\bar{d}$ రేఖల మధ్య

$$\text{కనిష్ట దూరము(SD)}=\frac{|(\bar{a}-\bar{c}).(\bar{b}\times\bar{d})|}{|\bar{b}\times\bar{d}|}$$

ఇచ్చిన అతలీయ రేఖలను $\bar{r}=\bar{a}+t\bar{b}, \bar{r}=\bar{c}+s\bar{d}$ తో పోల్చగా
$\bar{a}=6\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}, \quad \bar{b}=\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$ మరియు
$\bar{c}=-4\bar{i}-\bar{k}, \ \bar{d}=3\bar{i}-2\bar{j}-2\bar{k}$

కాబట్టి,
$\bar{a}-\bar{c}=(6\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k})-(-4\bar{i}-\bar{k})=10\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$

$$\bar{b}\times\bar{d}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -2 & 2\\ 3 & -2 & -2\end{vmatrix}=\bar{i}(4+4)-\bar{j}(-2-6)+\bar{k}(-2+6)=8\bar{i}+8\bar{j}+4\bar{k}$$

$\therefore(\bar{a}-\bar{c}).(\bar{b}\times\bar{d})=(10\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}).(8\bar{i}+8\bar{j}+4\bar{k})$
$=80+16+12=108$

కాబట్టి, $|\bar{b}\times\bar{d}|=\sqrt{8^2+8^2+4^2}=\sqrt{64+64+16}=\sqrt{144}=12$

$$\therefore \text{కనిష్ట దూరము(SD)}=\frac{|(\bar{a}-\bar{c}).(\bar{b}\times\bar{d})|}{|\bar{b}\times\bar{d}|}=\frac{\cancel{108}}{\cancel{12}}=9$$

- A=(1,–2,–1),B=(4,0,–3), C=(1,2,–1), D=(2,–4,–5) అయిన $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ ల మధ్య కనిష్ట దూరమును కనుగొనుము.

A: దత్తాంశ బిందువులు A=(1,–2,–1),B=(4,0,–3), C=(1,2,–1),D=(2,–4,–5)
$\overline{OA}=\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k}, \overline{OB}=4\bar{i}-3\bar{k}, \overline{OC}=\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}, \overline{OD}=2\bar{i}-4\bar{j}-5\bar{k}$

(i) $\overline{AB}$ అనే సరళరేఖ సదిశా సమీకరణం $\bar{r}=\bar{a}+t\bar{b}, t\in R$,
$\bar{a}=\overline{OA}=\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k}$ మరియు
$\bar{b}=\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=(4\bar{i}-3\bar{k})-(\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k})=3\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k}$

(ii) $\overline{CD}$ అనే సరళరేఖ సదిశా సమీకరణం $\bar{r}=\bar{c}+s\bar{d}, s\in R$,
$\bar{c}=\overline{OC}=\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$ మరియు
$\bar{d}=\overline{CD}=\overline{OD}-\overline{OC}=(2\bar{i}-4\bar{j}-5\bar{k})-(\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k})=\bar{i}-6\bar{j}-4\bar{k}$

కాబట్టి $\bar{a}-\bar{c}=(\bar{i}-2\bar{j}-\bar{k})-(\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k})=-4\bar{j}$

$$\bar{b}\times\bar{d}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 2 & -2\\ 1 & -6 & -4\end{vmatrix}=\bar{i}(-8-12)-\bar{j}(-12+2)+\bar{k}(-18-2)$$
$$=-20\bar{i}+10\bar{j}-20\bar{k}$$

ఇప్పుడు $(\bar{a}-\bar{c}).(\bar{b}\times\bar{d})=(-4\bar{j}).(-20\bar{i}+10\bar{j}-20\bar{k})=-4(10)=-40$

మరియు, $|\bar{b}\times\bar{d}|=\sqrt{(-20)^2+10^2+(-20)^2}$
$$=\sqrt{400+100+400}=\sqrt{900}=30$$

$$\therefore SD=\frac{|(\bar{a}-\bar{c}).(\bar{b}\times\bar{d})|}{|\bar{b}\times\bar{d}|}=\frac{|-40|}{30}=\frac{\cancel{40}}{\cancel{30}}=\frac{4}{3}\text{ units}$$

Q23 . పరివర్తనలు

- **A, B, C లు త్రిభుజ కోణాలైన $\cos A+\cos B-\cos C=-1+4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$ అని నిరూపించండి.**

A: L.H.S=(cosA+cosB)–cosC

$$=2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}-\left(1-2\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$\left[\because \cos C+\cos D=2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right);\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right]$$

$$=-1+2\cos\left(90^o-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}+2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=-1+2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2}+2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=-1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$=-1+2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}+\sin\left(90^o-\frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$=-1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$(\because \sin(90^o-\theta)=\cos\theta)$$

$$=-1+2\sin\frac{C}{2}\left(2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}\right)$$

$$(\because \cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B)$$

$$=-1+4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}=\text{R.H.S}$$

- **A, B, C లు త్రిభుజ కోణాలైన $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}=1-2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ అని నిరూపించండి.**

A: L.H.S= $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}$

$$=\sin^2\frac{A}{2}+\left(1-\cos^2\frac{B}{2}\right)-\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=1+(\sin^2\tfrac{A}{2}-\cos^2\tfrac{B}{2})-\sin^2\tfrac{C}{2}$$

$$=1+(-\cos\tfrac{A+B}{2}.\cos\tfrac{A-B}{2})-\sin^2\tfrac{C}{2}$$

$$[\because \sin^2A-\cos^2B=-\cos(A+B)\cos(A-B)]$$

$$=\left(1-\cos\left(\frac{180^o-C}{2}\right).\cos\tfrac{A-B}{2}\right)-\sin^2\tfrac{C}{2}$$

$$[\because (A+B)+C=180^o]$$

$$=\left(1-\cos(90^o-\tfrac{C}{2}).\cos\tfrac{A-B}{2}\right)-\sin^2\tfrac{C}{2}$$

$$=1-\sin\tfrac{C}{2}.\cos\tfrac{A-B}{2}-\sin^2\tfrac{C}{2}$$

$$=1-\sin\tfrac{C}{2}(\cos\tfrac{A-B}{2}+\sin\tfrac{C}{2})$$

$$=1-\sin\tfrac{C}{2}(\cos\tfrac{A-B}{2}+\sin\tfrac{180^o-(A+B)}{2})$$

$$=1-\sin\tfrac{C}{2}\left(\cos\tfrac{A-B}{2}+\sin\left(90^o-\tfrac{A+B}{2}\right)\right)$$

$$=1-\sin\tfrac{C}{2}(\cos\tfrac{A-B}{2}+\cos\tfrac{A+B}{2})$$

$$=1-\sin\tfrac{C}{2}(2\sin\tfrac{A}{2}\sin\tfrac{B}{2})$$

$$[\because \cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B]$$

$$=1-(2\sin\tfrac{A}{2}\sin\tfrac{B}{2}\sin\tfrac{C}{2})=\text{R.H.S}$$

- **A+B+C=π అయిన $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2(1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})$ అని నిరూపించండి.**

A: L.H.S $=\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}$

$$=\cos^2\frac{A}{2}+\left(1-\sin^2\frac{B}{2}\right)+\cos^2\frac{C}{2}$$

$$=1+\left(\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right)+\cos^2\frac{C}{2}$$

$$=1+\left(\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right)+\left(1-\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$\left[\because \cos^2A-\sin^2B=\cos(A+B)\cos(A-B)\right]$$

$$=2+\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=2+\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=2+\sin\frac{C}{2}\left(\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$=2+\sin\frac{C}{2}\left(\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)$$

$$\left[\because \sin\frac{C}{2}=\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$=2+\sin\frac{C}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$[\because \cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B]$$

$$=2+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$=2\left(1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=\text{R.H.S}$$

Q24 . త్రిభుజ ధర్మాలు

• **$r_1=2, r_2=3, r_3=6, r=1$ అయిన $a=3, b=4, c=5$ అని నిరూపించండి.**

A: దత్తాంశం నుండి $r_1=2, r_2=3, r_3=6$ మరియు $r=1$, అప్పుడు

$$\Delta=\sqrt{rr_1r_2r_3}=\sqrt{1\times2\times3\times6}=\sqrt{36}=6$$

$$r=\frac{\Delta}{s}\Rightarrow 1=\frac{6}{s}\quad \therefore s=6$$

$$\text{(i) } r_1=\frac{\Delta}{s-a}\Rightarrow s-a=\frac{\Delta}{r_1}=\frac{\cancel{6}}{\cancel{2}}=3$$

$$\therefore s-a=3\Rightarrow 6-a=3\Rightarrow a=6-3=3$$

$$\text{(ii) } r_2=\frac{\Delta}{s-b}\Rightarrow s-b=\frac{\Delta}{r_2}=\frac{\cancel{6}}{\cancel{3}}=2$$

$$\therefore s-b=2\Rightarrow 6-b=2\Rightarrow b=6-2=4$$

$$\text{(iii) } r_3=\frac{\Delta}{s-c}\Rightarrow s-c=\frac{\Delta}{r_3}=\frac{\cancel{6}}{\cancel{6}}=1$$

$$\therefore s-c=1\Rightarrow 6-c=1\Rightarrow c=6-1=5$$

• **ΔABC లో $r_1=8, r_2=12, r_3=24$ అయిన a,b,cలను కనుగొనుము.**

A: దత్తాంశం నుండి $r_1=8, r_2=12, r_3=24$,

అప్పుడు $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$

$$\Rightarrow\frac{1}{r}=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{3+2+1}{24}$$

$$=\frac{\cancel{6}}{\cancel{24}}=\frac{1}{4}\quad\therefore\frac{1}{r}=\frac{1}{4}\Rightarrow r=4$$

ఇప్పుడు $\Delta=\sqrt{rr_1r_2r_3}=\sqrt{4\times8\times12\times24}$

$$=\sqrt{4\times8\times(3\times4)\times(3\times8)}=\sqrt{3^2\times4^2\times8^2}=3\times4\times8=96$$

$$r=\frac{\Delta}{s}\Rightarrow s=\frac{\Delta}{r}=\frac{\cancel{96}}{\cancel{4}}=24\quad\therefore s=24$$

$$\text{(i) } r_1=\frac{\Delta}{s-a}\Rightarrow s-a=\frac{\Delta}{r_1}=\frac{\cancel{96}}{\cancel{8}}=12$$

$$\therefore s-a=12\Rightarrow 24-a=12\Rightarrow a=24-12=12$$

$$\text{(ii) } r_2=\frac{\Delta}{s-b}\Rightarrow s-b=\frac{\Delta}{r_2}=\frac{\cancel{96}}{\cancel{12}}=8$$

$$\therefore s-b=8\Rightarrow 24-b=8\Rightarrow b=24-8=16$$

$$\text{(iii) } r_3=\frac{\Delta}{s-c}\Rightarrow s-c=\frac{\Delta}{r_3}=\frac{\cancel{96}}{\cancel{24}}=4$$

$$\therefore s-c=4\Rightarrow 24-c=4\Rightarrow c=24-4=20$$

• **ΔABCలో $a=13, b=14, c=15$ అయిన $R=\frac{65}{8}, r=4, r_1=\frac{21}{2}, r_2=12, r_3=14$ అనిచూపండి.**

A: దత్తాంశం నుండి $a=13, b=14, c=15$, అప్పుడు

$$2s=a+b+c=13+14+15=42\Rightarrow\cancel{2}s=\cancel{42}\Rightarrow s=21$$

ఇప్పుడు $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$$

$$=\sqrt{21\times(8)(7)(6)}=\sqrt{(3\times7)(4\times2)(7)(3\times2)}$$

$$=\sqrt{3^2\times4^2\times7^2}=3\times4\times7=84$$

$$\text{(i) } R=\frac{abc}{4\Delta}=\frac{13\times14\times15}{4\times84}=\frac{65}{8}$$

$$\text{(ii) } r=\frac{\Delta}{s}=\frac{\cancel{84}}{\cancel{21}}=4;$$

$$\text{(iii) } r_1=\frac{\Delta}{s-a}=\frac{84}{21-13}=\frac{\cancel{84}}{\cancel{8}}=\frac{21}{2}$$

$$\text{(iv) } r_2=\frac{\Delta}{s-b}=\frac{84}{21-14}=\frac{\cancel{84}}{\cancel{7}}=12$$

$$\text{(v) } r_3=\frac{\Delta}{s-c}=\frac{84}{21-15}=\frac{\cancel{84}}{\cancel{6}}=14$$

• **$r+r_3+r_1-r_2=4R\cos B$ అని చూపండి.**

A: L.H.S$=r+r_3+r_1-r_2=(r_3+r_1)+(r-r_2)$

$$=\left(4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$+\left(4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$=4R\left(\cos\frac{B}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\sin\frac{B}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\right)$$

$$=4R\left(\cos\frac{B}{2}\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)-\sin\frac{B}{2}\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)\right)$$

$$=4R\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$=4R\left[\cos^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right]=4R\cos B=\text{R.H.S}$$