2A (TM)

BULLET
MODEL PAPER

A 'MULTI QUESTION PAPER' WITH 'BULLET ANSWERS'

SAQ & LAQ SECTIONS

SAQ సెక్షన్ - B

Q11: సంకీర్ణ సంఖ్యలు:

- **ఆర్గాండ్ తలంలో 2+i, 4+3i, 2+5i, 3i అనే సంకీర్ణ సంఖ్యలు సూచించే బిందువులు ఒక చతురస్రమును ఏర్పర్చునని చూపుము.**

A: ఇచ్చిన బిందువులు A(2,1), B(4,3), C(2,5), D(0,3)

$AB=\sqrt{(2-4)^2+(1-3)^2}=\sqrt{8}$;

$BC=\sqrt{(4-2)^2+(3-5)^2}=\sqrt{8}$

$CD=\sqrt{(2-0)^2+(5-3)^2}=\sqrt{8}$;

$DA=\sqrt{(2-0)^2+(1-3)^2}=\sqrt{8}$

$AC=\sqrt{(2-2)^2+(1-5)^2}=\sqrt{16}=4$;

$BD=\sqrt{(4-0)^2+(3-3)^2}=\sqrt{16}=4$

కావున, AB, BC, CD, DA అనే నాలుగు భుజాలు సమానం.

AC, BD అనే రెండు కర్ణాలు సమానం.

$\therefore$ A,B,C,D లు ఒక చతురస్రమును ఏర్పర్చును.

- **$(x-iy)^{1/3}=a-ib$, అయిన $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=4(a^2-b^2)$ అని చూపండి.**

A: దత్తాంశం నుండి $(x-iy)^{1/3}=a-ib \Rightarrow x-iy=(a-ib)^3$

$\Rightarrow x-iy=a^3-3a^2bi+3ai^2b^2-i^3b^3$

$=a^3-3a^2bi-3ab^2+ib^3$

$=(a^3-3ab^2)-i(3a^2b-b^3)$

ఇరువైపులా వాస్తవ భాగాలను పోల్చగా,

$x=a^3-3ab^2=a(a^2-3b^2) \Rightarrow \frac{x}{a}=a^2-3b^2$

ఇరువైపులా కల్పిత భాగాలను పోల్చగా,

$y=3a^2b-b^3=b(3a^2-b^2) \Rightarrow \frac{y}{b}=3a^2-b^2$

$\therefore \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=(a^2-3b^2)+(3a^2-b^2)$

$=4a^2-4b^2=4(a^2-b^2)$

- **$\frac{z+1}{z+i}$ యొక్క వాస్తవ భాగం 1 అయితే z యొక్క బిందు పథ సమీకరణాన్ని కనుగొనుము.**

A: $\frac{z+1}{z+i}=\frac{(x+iy)+1}{(x+iy)+i}=\frac{[(x+1)+iy]}{[x+i(y+1)]}\cdot\frac{[x-i(y+1)]}{[x-i(y+1)]}$

$=\frac{[x(x+1)+y(y+1)]+i[xy-(x+1)(y+1)]}{x^2+(y+1)^2}$

$=\frac{(x^2+y^2+x+y)}{x^2+(y+1)^2}+i\frac{[xy-(x+1)(y+1)]}{x^2+(y+1)^2}$

కాని వాస్తవభాగం 1 కావున $\Rightarrow \frac{x^2+y^2+x+y}{x^2+(y+1)^2}=1$

$\Rightarrow x^2+y^2+x+y=x^2+(y+1)^2$

$\Rightarrow x^2+y^2+x+y=x^2+(y^2+2y+1) \Rightarrow x-y=1$

$\therefore$ z యొక్క బిందు పథం $x-y=1$

Q12: వర్గ సమాసాలు:

- **$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ యొక్క వ్యాప్తిని కనుగొనుము.**

A: $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

$\Rightarrow y(x^2-x+1)=x^2+x+1$

$\Rightarrow yx^2-yx+y=x^2+x+1$

$\Rightarrow yx^2-x^2-yx-x+y-1=0$

$\Rightarrow x^2(y-1)-x(y+1)+(y-1)=0$

$\Rightarrow (y-1)x^2-(y+1)x+(y-1)=0$ ....(1)

(1) x లో వర్గసమీకరణం మరియు దాని మూలాలు వాస్తవం.

$\therefore \Delta=b^2-4ac\geq 0$

$\Rightarrow (y+1)^2-4(y-1)^2\geq 0 \Rightarrow (y+1)^2-(2y-2)^2\geq 0$

$\Rightarrow (y+1+2y-2)(y+1)-(2y-2)\geq 0$

$[\because a^2-b^2=(a+b)(a-b)]$

$\Rightarrow (3y-1)(3-y)\geq 0 \Rightarrow (3y-1)(y-3)\leq 0$

$\Rightarrow y\in\left[\frac{1}{3},3\right]$ $\therefore$ వ్యాప్తి$=\left[\frac{1}{3},3\right]$

- **x వాస్తవమైన $\frac{x}{x^2-5x+9}$ సమాసము 1 మరియు $\frac{-1}{11}$ మధ్య ఉండునని చూపుము.**

A: దత్త సమాసపు విలువ $y=\frac{x}{x^2-5x+9}$ అనుకొనుము.

$\Rightarrow y(x^2-5x+9)=x$

$\Rightarrow yx^2-5yx+9y-x=0$

$\Rightarrow yx^2-(5y+1)x+9y=0$ .... (1)

(1) x లో వర్గసమీకరణం మరియు దాని మూలాలు వాస్తవం.

$\therefore \Delta=b^2-4ac\geq 0$

$\Rightarrow (5y+1)^2-4(y)(9y)\geq 0$

$\Rightarrow (25y^2+10y+1)-36y^2\geq 0$

$\Rightarrow -11y^2+10y+1\geq 0$

$\Rightarrow 11y^2-10y-1\leq 0$

$\Rightarrow 11y^2-11y+y-1\leq 0 \Rightarrow 11y(y-1)+(y-1)\leq 0$

$\Rightarrow (11y+1)(y-1)\leq 0$

$\Rightarrow y\in\left[-\frac{1}{11},1\right] \Rightarrow \frac{-1}{11}\leq y\leq 1$

$\therefore$ ఇచ్చిన సమాసము $\frac{-1}{11}$ మరియు 1 ల మధ్య ఉండును.

- x వాస్తవ సంఖ్య అయితే $\frac{1}{3x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(3x+1)(x+1)}$ విలువ 1,4 ల మధ్య ఉండదని నిరూపించండి.

A: $GE=\frac{1}{3x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(3x+1)(x+1)}$

$=\frac{x+1+3x+1-1}{(3x+1)(x+1)}=\frac{4x+1}{3x^2+4x+1}$

$y=\frac{4x+1}{3x^2+4x+1}$

$\Rightarrow y(3x^2+4x+1)=4x+1$

$\Rightarrow 3yx^2+4yx+y=4x+1$

$\Rightarrow 3yx^2+(4y-4)x+(y-1)=0$............(1)

(1) x లో వర్గసమీకరణం మరియు దాని మూలాలు వాస్తవం.

$\therefore \Delta=b^2-4ac\geq 0$

$(4y-4)^2-4(3y)(y-1)\geq 0$

$\Rightarrow 16y^2+16-32y-12y^2+12y\geq 0 \Rightarrow 4y^2-20y+16\geq 0$

$\Rightarrow 4y^2-20y+16\geq 0 \Rightarrow 4(y^2-5y+4)\geq 0$

$\Rightarrow y^2-5y+4\geq 0 \Rightarrow (y-1)(y-4)\geq 0 \Rightarrow y\leq 1$ or $y\geq 4$

$\Rightarrow$ ఇచ్చిన సమాసము విలువలు 1మరియు 4 ల మధ్య ఉండవు.

- $x\in R$నకు $\frac{x-p}{x^2-3x+2}$ సమాసం వాస్తవమైతే, అప్పుడు p అవధులను కనుక్కోండి.

A: $y=\frac{x-p}{x^2-3x+2}$

$\Rightarrow y(x^2-3x+2)=x-p$

$\Rightarrow yx^2-3yx+2y=x-p$

$\Rightarrow yx^2+(-3y-1)x+(2y+p)=0$ ...... (1)

(1) x లో వర్గసమీకరణం మరియు దాని మూలాలు వాస్తవం.

$\therefore \Delta=b^2-4ac\geq 0$

$\Rightarrow (-3y-1)^2-4y(2y+p)\geq 0$

$\Rightarrow 9y^2+6y+1-8y^2-4py\geq 0$

$\Rightarrow y^2+(6-4p)y+1\geq 0$ ..... (2)

కానీ y వాస్తవము మరియు y^2 గుణకం ధనాత్మకం.

$\therefore$ (2) నిజమగుటకు $y^2+(6-4p)y+1=0$ మూలాలు కల్పితాలు లేదా వాస్తవ సమానాలు అవ్వాలి.

$\Rightarrow \Delta=b^2-4ac\leq 0 \Rightarrow (6-4p)^2-4\leq 0$

$\Rightarrow 36+16p^2-48p-4\leq 0$

$\Rightarrow 16p^2-48p+32\leq 0 \Rightarrow 16(p^2-3p+2)\leq 0$

$\Rightarrow p^2-3p+2\leq 0 \Rightarrow (p-1)(p-2)\leq 0 \Rightarrow 1\leq p\leq 2$

కాని p=1 లేదా 2 సాధ్యం కాదు. $\therefore 1<p<2$

Q13&Q14: ప్రస్తారాలు-సంయోగాలు:

- ${}^{34}C_5+\sum_{r=0}^{4}{}^{(38-r)}C_4$ సూక్ష్మీకరించండి.

A: $\sum_{r=0}^{4}{}^{(38-r)}C_4+{}^{34}C_5$

$=\left[{}^{38}C_4+{}^{37}C_4+{}^{36}C_4+{}^{35}C_4+{}^{34}C_4\right]+{}^{34}C_5$

$=\left[{}^{38}C_4+{}^{37}C_4+{}^{36}C_4+{}^{35}C_4\right]+\left[{}^{34}C_4+{}^{34}C_5\right]$

$=\left[{}^{38}C_4+{}^{37}C_4+{}^{36}C_4\right]+\overline{{}^{35}C_4+{}^{35}C_5}$

$(\because {}^{n}C_{r-1}+{}^{n}C_r={}^{n+1}C_r)$

$=\left[{}^{38}C_4+{}^{37}C_4\right]+\overline{{}^{36}C_4+{}^{36}C_5}$

$=\left[{}^{38}C_4\right]+\overline{{}^{37}C_4+{}^{37}C_5}={}^{38}C_4+{}^{38}C_5={}^{39}C_5$

- ఏడుమంది బాట్స్‌మెన్, ఆరుగురు బౌలర్లనుంచి కనీసం ఐదుగురు బౌలర్లు ఉన్న పదకొండు మంది క్రికెట్ టీమును ఎన్ని రకాలుగా ఏర్పరచవచ్చు?

A: కనీసం ఐదుగురు బౌలర్లు ఉన్న పదకొండు మంది క్రికెట్ టీమును క్రింద చూపిన విధాలుగా ఎంచుకోవచ్చు.

బౌలర్లు (6)	బ్యాట్స్‌మెన్ (7)	ఎంచుకునే విధానాలు
5	6	${}^6C_5\times{}^7C_6=6\times=42$
6	5	${}^6C_6\times{}^7C_5=1\times 21=21$

$\therefore$ ఎంచుకునే విధానాలు=42+21= 63

- ఆరుగురు భారతీయులు, 5గురు అమెరికా దేశస్థుల నుంచి 5 గురు సభ్యులున్న కమిటీని, ఆ కమిటీలో భారతీయుల సంఖ్య పెద్దదిగా ఉండేలా ఎన్ని రకాలుగా ఎంచుకోవచ్చు?

A: ఆరుగురు భారతీయులు, 5గురు అమెరికా దేశస్థుల నుంచి 5 గురు సభ్యులున్న కమిటీని, ఆ కమిటీలో భారతీయుల సంఖ్య పెద్దదిగా ఉండేలా ఎంచుకునే విధానాలు:

భారతీయులు (6)	అమెరికన్లు (5)	ఎంచుకునే విధానాలు
5	0	${}^6C_5\times{}^5C_0=6\times 1=6$
4	1	${}^6C_4\times{}^5C_1=15\times 5=75$
3	2	${}^6C_3\times{}^5C_2=20\times 10=200$

$\therefore$ మొత్తం విధానాల సంఖ్య

=6+75+200=281

- **MASTER అనే పదంలోని అక్షరాలతో ఏర్పడే పదాలన్నింటినీ నిఘంటువులోని క్రమంలో అమరిస్తే, MASTER పదం కోటిని కనుక్కోండి.**

A: MASTERఅనే పదములోని అక్షరాల నిఘంటువు యొక్క క్రమం **A,E,M,R,S,T**

A తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య

$- - - - - = 5! = 120$

E తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య

$- - - - - = 5! = 120$

MAE తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య

$- - - = 3! = 6$

MAR తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య

$- - - = 3! = 6$

MASE తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య

$- - = 2! = 2$

MASR తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య

$- - = 2! = 2$

తర్వాత పదం MASTER $= 1! = 1$

$\therefore$ MASTER అనే పదం యొక్క కోటి

$= 2(120) + 2(6) + 2(2) + 1$

$= 240 + 12 + 4 + 1 = 257$

- **EAMCETపదంలోని అక్షరాలతో ఏర్పడే పదాలన్నింటినీ నిఘంటువులోని క్రమంలో అమరిస్తే, ఆ క్రమంలో EAMCET పదం కోటిని కనుక్కోండి.**

A: EAMCETఅనే పదములోని అక్షరాల నిఘంటువు యొక్క క్రమం **A,C,E,E,M,T**

A తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య

$- - - - - \rightarrow 5!/2! = 60$

C తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య

$- - - - - \rightarrow 5!/2! = 60$

EAC తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య

$- - - \rightarrow 3! = 6$

EAE తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య

$- - - \rightarrow 3! = 6$

తర్వాత పదం EAMCET $\rightarrow 1$

EAMCET అనే పదం కోటి $60 + 60 + 6 + 6 + 1 = 133$

Q15: పాక్షిక భిన్నాలు

- $\dfrac{x+4}{(x^2-4)(x+1)}$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.

Sol: $G.E = \dfrac{x+4}{(x^2-4)(x+1)} = \dfrac{x+4}{(x+2)(x-2)(x+1)}$

$$\frac{x+4}{(x+2)(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$$= \frac{A(x-2)(x+1) + B(x+2)(x+1) + C(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)(x+1)}$$

$\therefore A(x-2)(x+1) + B(x+2)(x+1) + C(x^2-4) = x+4 \ldots.(1)$

సమీకరణం (1) లో $x = -2$ వ్రాయగా

$A(-2-2)(-2+1) + B(0) + C(0) = -2+4$

$\Rightarrow 4A = 2 \Rightarrow A = 1/2$

సమీకరణం (1) లో $x=2$ వ్రాయగా

$A(0) + B(2+2)(2+1) + C(0) = 2+4 \Rightarrow 12B = 6 \Rightarrow B = 1/2$

సమీకరణం (1) లో $x=-1$ వ్రాయగా

$A(0) + B(0) + C(1-4) = -1+4 \Rightarrow -3C = 3 \Rightarrow C = -1$

$$\therefore \frac{x+4}{(x^2-4)(x+1)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+1)}$$

$$= \frac{1}{2(x+2)} + \frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{(x+1)}$$

- $\dfrac{2x^2+3x+4}{(x-1)(x^2+2)}$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.

A: $\dfrac{2x^2+3x+4}{(x-1)(x^2+2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2}$

$$= \frac{A(x^2+2) + (Bx+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+2)}$$

$\therefore A(x^2+2) + (Bx+C)(x-1) = 2x^2 + 3x + 4 \ldots\ldots.(1)$

సమీకరణం (1) లో $x=1$ వ్రాయగా

$A(1^2+2) + (Bx+C)(0) = 2(1^2) + 3(1) + 4$

$\Rightarrow 3A = 9 \Rightarrow A = 3$

సమీకరణం (1) లో $x=0$ వ్రాయగా

$A(0+2) + (0+C)(0-1) = 4 \Rightarrow 2A - C = 4$

$\Rightarrow C = 2A - 4 = 2(3) - 4 = 2$

సమీకరణం (1) లోని x^2 గుణకాలను పోల్చగా

$A + B = 2 \Rightarrow 3 + B = 2 \Rightarrow B = -1$

$$\therefore \frac{2x^2+3x+4}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{3}{x-1} + \frac{(-1)x+2}{x^2+2} = \frac{3}{x-1} + \frac{2-x}{x^2+2}$$

Q16&17: సంభావ్యత:

- **A, B లు స్వతంత్ర ఘటనలు మరియు $P(A)=0.6, P(B)=0.7$ (i) $P(A\cap B)$ (ii) $P(A\cup B)$ (iii) $P(B/A)$ (iv) $P(A^C\cap B^C)$ కనుగొనుము.**

A: A,B లు స్వతంత్ర ఘటనలు కాబట్టి

(i) $P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.6\times 0.7=0.42$

(ii) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=0.6+0.7-0.42=1.3-0.42=0.88$

(iii) $P(B/A)=P(B)=0.7$

(iv) $P(A^C\cap B^C)=P(A^C).P(B^C)=[1-P(A)][1-P(B)]$

$=0.4\times 0.3=0.12$

- **A, B అనే రెండు ఘటనలు $P(A\cup B)=0.65$ మరియు $P(A\cap B)=0.15$, అయిన $P(A^C)+P(B^C)$.ను కనుక్కోండి.**

A: సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతం ప్రకారం

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)$

$=0.65+0.15=0.8$

$\therefore P(A^C)+P(B^C)=[1-P(A)]+[1-P(B)]$

$=2-[P(A)+P(B)]=2-0.8=1.2$

- **కలనగణితంలోని ఒక సమస్యను ఇద్దరు విద్యార్థులు A, B లకు ఇస్తే వారు సమస్యను సాధించే సంభావ్యతలు వరుసగా 1/3,1/4. వారిద్దరూ స్వతంత్రంగా సమస్యను సాధించటానికి ప్రయత్నిస్తే, ఆ సమస్యను సాధింపబడే సంభావ్యత ఎంత?**

A: A, B లతో సమస్య సాధింపబడే ఘటనలు వరుసగా A, B లు అనుకుందాం.

$\Rightarrow P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{1}{4}$

$\therefore P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3};$

$P(\bar{B})=1-P(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$\therefore P(A\cup B)=1-P(\bar{A}\cap\bar{B})=1-P(\bar{A}).P(\bar{B})$

$=1-\left(\frac{2}{\cancel{3}}\right)\left(\frac{\cancel{3}}{4}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

- **75% సందర్భాల్లో A నిజం మాట్లాడతాడు, B, 80% సందర్భాల్లో నిజం మాట్లాడతాడు. ఒక సంఘటన గురించి వారు చెప్పే విషయం పరస్పరం విభేదించడానికి సంభావ్యత ఎంత?**

A: A,B లు నిజం చెప్పే ఘటనలు వరసగా A,B లు అనుకుందాం.

$P(A)=\frac{75}{100}=\frac{3}{4};\ P(B)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$

$\therefore P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4};$

$P(\bar{B})=1-P(B)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

A,B లు పరస్పరము విభేదించే ఘటన E అనుకొనుము.

$\Rightarrow P(E)=P\left[(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)\right]$

$=P(A\cap\bar{B})+P(\bar{A}\cap B)$

$=P(A)P(\bar{B})+P(\bar{A})P(B)$ [$\because$ A,B లు స్వతంత్రాలు]

$=\frac{3}{4}.\frac{1}{5}+\frac{1}{4}.\frac{4}{5}=\frac{7}{20}$

- **ఒక నగరము నుండి A,B,C అనే మూడు వార్తపత్రికలు వెలువడును. 20% ప్రజలు A పత్రికను,16% ప్రజలు B పత్రికను, 14% ప్రజలు C పత్రికను, 8% ప్రజలు A మరియు B లను, 5% ప్రజలు A మరియు C లను, 4% ప్రజలు B మరియు C లను, 2% ప్రజలు మూడు పత్రికలను చదువుతారు. అయితే కనీసము ఒక వార్తపత్రికను చదివే జనశాతం మరియు A అనే పత్రికను మాత్రమే చదివే జనశాతాన్ని కనుగొనుము.**

A: దత్తాంశము నుండి $P(A)=\frac{20}{100}=0.2$,

$P(B)=\frac{16}{100}=0.16$, $P(C)=\frac{14}{100}=0.14$

$P(A\cap B)=\frac{8}{100}=0.08$, $P(B\cap C)=\frac{4}{100}=0.04$,

$P(A\cap C)=\frac{5}{100}=0.05$,

$P(A\cap B\cap C)=\frac{2}{100}=0.02$

$\therefore P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)$
$-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$

$=0.2+0.16+0.14-0.08-0.04-0.05+0.02$

$=0.52-0.17=0.35$

P (కేవలం A) =

$P(A)-[P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)]$

$=0.2-[0.08+0.05-0.02]=0.09$

$\therefore$ A అనే వార్తాపత్రిక మాత్రమే చదివేవారు$=0.09\times 100=9$.

కావున, 35 % ప్రజలు కనీసం ఒక వార్తాపత్రిక మరియు 9% ప్రజలు A వార్తాపత్రిక మాత్రమే చదువుతున్నారు.

LAQ సెక్షన్ - C

Q 18 :డీమోయర్ సిద్ధాంతం:

- **n ధనపూర్ణాంకం అయితే, $(1+i)^{2n}+(1-i)^{2n}=2^{(n+1)}\cos(n\pi/2)$ అని చూపండి.**

A: మొదట 1+i యొక్క మాప-ఆయామ రూపమును కనుగొందాం.

$x+iy=1+i \Rightarrow x=1, y=1$

$$\therefore\ r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2};$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{1}{1}=1=\tan\frac{\pi}{4}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore 1+i=r(\cos\theta+i\sin\theta)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow (1+i)^{2n}=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2n}$$

$$=(\sqrt{2})^{2n}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2n}$$

$$=2^n\left(\cos(2n)\frac{\pi}{4}+i\sin(2n)\frac{\pi}{4}\right)$$

[డీమోయర్ సిద్ధాంతం నుండి]

$$=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\right)\ \ldots..(1)$$

అదేవిధంగా, $(1-i)^{2n}=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{2}-i\sin\frac{n\pi}{2}\right)\ \ldots..(2)$

(1) & (2) లను కలుపగా $(1+i)^{2n}+(1-i)^{2n}$

$$=2^n\left(\left(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}\right)+\left(\cos\frac{n\pi}{2}-i\sin\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

$$=2^n\left(2\cos\frac{n\pi}{2}\right)=2^{n+1}.\cos\frac{n\pi}{2}$$

- **$(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n=2^{n+1}\cos^n(\theta/2)\cos(n\theta/2)$ అని నిరూపించండి.**

A: మొదట $1+\cos\theta+i\sin\theta$ యొక్క మాప-ఆయామ రూపమును కనుగొందాం.

$$1+\cos\theta+i\sin\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}+i2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)\right)^n$$

$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos n\frac{\theta}{2}+i\sin n\frac{\theta}{2}\right)\ \ldots.(1)$$

అదేవిధంగా, $(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n$

$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos n\frac{\theta}{2}-i\sin n\frac{\theta}{2}\right)\ \ldots.(2)$$

(1) & (2), లను కలుపగా

$$(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n$$

$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\left(\cos n\frac{\theta}{2}+i\sin n\frac{\theta}{2}\right)+\left(\cos n\frac{\theta}{2}-i\sin n\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(2\cos\frac{n\theta}{2}\right)=2^{n+1}\cos^n\frac{\theta}{2}.\cos\frac{n\theta}{2}$$

- **$x^2-2x+4=0$ యొక్క మూలాలు α,β అయిన $\alpha^n+\beta^n=2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ అని చూపండి.**

Sol: దత్తాంశం $x^2-2x+4=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-4(1)(4)}}{2(1)}$

$$=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{2}=\frac{2\pm2i\sqrt{3}}{2}=1\pm i\sqrt{3}$$

$1+i\sqrt{3}$ యొక్క మాప-ఆయామ రూపమును కనుగొందాం.

Let $x+iy=1+i\sqrt{3}\Rightarrow x=1, y=\sqrt{3}$

$$\therefore\ r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2.$$

మరియు, $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\tan\frac{\pi}{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$

$$\therefore 1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow(1+i\sqrt{3})^n=\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^n$$

$$=(2)^n\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n$$

$$=2^n\left(\cos n\frac{\pi}{3}+i\sin n\frac{\pi}{3}\right)\ \ldots..(1)$$

[డీమోయర్ సిద్ధాంతం నుండి]

అదేవిధంగా, $(1-i\sqrt{3})^n=2^n\left(\cos n\frac{\pi}{3}-i\sin n\frac{\pi}{3}\right)\ \ldots..(2)$

(1) & (2) లను కలుపగా

$$\alpha^n+\beta^n=(1+i\sqrt{3})^n+(1-i\sqrt{3})^n$$

$$=2^n\left(\left(\cos n\frac{\pi}{3}+i\sin n\frac{\pi}{3}\right)+\left(\cos n\frac{\pi}{3}-i\sin n\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$=2^n\left(2\cos\frac{n\pi}{3}\right)=2^{n+1}.\cos\frac{n\pi}{3}$$

Q 19 : సమీకరణ వాదం

- **$x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0$. ను సాధించుము.**

A: ఇచ్చిన సమీకరణం యొక్క తరగతి n=4, సరిసంఖ్య మరియు $a_k=a_{n-k}\ \forall\ k=0,1,2,3,4$

కావున దత్త సమీకరణం వ్యుత్క్రమ సమీకరణ ప్రామాణికరూపంలో కలదు.

ఇప్పుడు సమీకరణాన్ని x^2 చే భాగించగా

$$x^2-10x+26-\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\Rightarrow\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0\ ....(1)$$

$$x+\frac{1}{x}=y\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

$$\therefore\ (1)\Rightarrow(y^2-2)-10y+26=0\Rightarrow y^2-10y+24=0$$

$$\Rightarrow y^2-6y-4y+24=0\Rightarrow y(y-6)-4(y-6)=0$$

$$\Rightarrow(y-4)(y-6)=0$$

$$\Rightarrow y-4=0\ (or)\ y-6=0\Rightarrow y=4\ (or)\ y=6$$

y=4 అయిన

$$x+\frac{1}{x}=4\Rightarrow x^2+1=4x\Rightarrow x^2-4x+1=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(4)^2-4.1.1}}{2.1}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}$$

$$=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$$

y=6 అయిన $x+\frac{1}{x}=6\Rightarrow\frac{x^2+1}{x}=6$

$$\Rightarrow x^2+1=6x\Rightarrow x^2-6x+1=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-4}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{32}}{2}$$

$$=\frac{6\pm4\sqrt{2}}{2}=3\pm2\sqrt{2}$$

$\therefore$ దత్త సమీకరణం మూలాలు $2\pm\sqrt{3},3\pm2\sqrt{2}$

- **$2x^5+x^4-12x^3-12x^2+x+2=0$ ను సాధించుము.**

A: ఇచ్చిన సమీకరణం తరగతి n=5 బేసి సంఖ్య మరియు

$a_k=a_{n-k}\ \forall\ k=0,1,2,3,4,5$

కావున ఇచ్చిన సమీకరణం ఒకటో కోవకు చెందిన బేసి తరగతి వ్యుత్క్రమ సమీకరణం

కావున ఇచ్చిన సమీకరణానికి ఒక మూలం -1 అగును.

ఇచ్చిన సమీకరణాన్ని $(x+1)$తో భాగించగా

−1	2	1	−12	−12	1	2
	0	−2	1	11	1	2
	2	−1	−11	−1	2	0

ఇప్పుడు $2x^4-x^3-11x^2-x+2=0$ అనే వ్యుత్క్రమ సమీకరణంను సాధించవలెను.

పై సమీకరణాన్ని x^2 తో భాగించగా

$$2x^2-x-11-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

$$\Rightarrow2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)-11=0\ ....(1)$$

$$x+\frac{1}{x}=y\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

$$\therefore(1)\Rightarrow2(y^2-2)-y-11=0\Rightarrow2y^2-4-y-11=0$$

$$\Rightarrow2y^2-y-15=0\Rightarrow2y^2-6y+5y-15=0$$

$$\Rightarrow2y(y-3)+5(y-3)=0\Rightarrow(y-3)(2y+5)=0$$

$$\Rightarrow y-3=0\ (or)\ 2y+5=0\Rightarrow y=3\ (or)\ y=\frac{-5}{2}$$

y=3 అయిన

$$x+\frac{1}{x}=3\Rightarrow x^2+1=3x\Rightarrow x^2-3x+1=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4.1.1}}{2(1)}=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$y=-\frac{5}{2}$ అయిన $x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}=-2\frac{1}{2}=-2-\frac{1}{2}$

$$\therefore x=-2\ \text{or}\ x=-\frac{1}{2}$$

$\therefore$ దత్త సమీకరణం మూలాలు $-1,-2,-\frac{1}{2},\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

- **$8x^3-36x^2-18x+81=0$ యొక్క మూలాలు అంకశ్రేఢిలో ఉంటే వాటిని కనుగొనుము.**

A: $8x^3-36x^2-18x+81=0$ యొక్క మూలాలను a−d, a, a+d అనుకొనుము.

ఇప్పుడు, $S_1=(a-d)+a+(a+d)=\frac{36}{8}=\frac{9}{2}$

$$\Rightarrow3a=\frac{9}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

$$S_3=(a-d)a(a+d)=\frac{-81}{8}\Rightarrow a(a^2-d^2)=\frac{-81}{8}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{2}\left(\frac{9}{4}-d^2\right)=\frac{-81}{8}\Rightarrow\left(\frac{9}{4}-d^2\right)=\frac{-81}{8}\times\frac{2}{3}=\frac{-27}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{9}{4}-d^2=-\frac{27}{4}\Rightarrow d^2=\frac{9}{4}+\frac{27}{4}=\frac{36}{4}=9$$

$$\Rightarrow d=\pm3$$

$\therefore$ దత్త సమీకరణం మూలాలు a−d, a,a+d

$$\Rightarrow\frac{3}{2}-3,\frac{3}{2},\frac{3}{2}+3\Rightarrow-\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{9}{2}$$

Q 20 & 21: ద్విపద సిద్ధాంతం:

- **$(1+x)^n$ ద్విపద విస్తరణలో 4 వరుస పదాల గుణకాలు వరుసగా a_1,a_2,a_3,a_4 అయితే $\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{2a_2}{a_2+a_3}$ అని చూపండి.**

A: $(1+x)^n$ విస్తరణలో 4 వరుస పదాల గుణకాలు:

$a_1={}^nC_r,\ a_2={}^nC_{r+1},\ a_3={}^nC_{r+2},\ a_4={}^nC_{r+3}$.

$$L.H.S=\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}$$

$$=\frac{{}^nC_r}{{}^nC_r+{}^nC_{r+1}}+\frac{{}^nC_{r+2}}{{}^nC_{r+2}+{}^nC_{r+3}}$$

$$=\frac{{}^nC_r}{{}^{(n+1)}C_{r+1}}+\frac{{}^nC_{r+2}}{{}^{n+1}C_{r+3}}\quad\left(\because {}^nC_r+{}^nC_{r+1}={}^{(n+1)}C_{r+1}\right)$$

$$=\frac{{}^nC_r}{\left(\frac{n+1}{r+1}\right).{}^nC_r}+\frac{{}^nC_{r+2}}{\left(\frac{n+1}{r+3}\right).{}^nC_{r+2}}$$

$$\left(\because {}^nC_r=\left(\frac{n}{r}\right){}^{n-1}C_{r-1}\right)$$

$$=\frac{r+1}{n+1}+\frac{r+3}{n+1}=\frac{r+1+r+3}{n+1}=\frac{2r+4}{n+1}=\frac{2(r+2)}{n+1}\ ....(1)$$

$$R.H.S=\frac{2a_2}{a_2+a_3}=\frac{2({}^nC_{r+1})}{{}^nC_{r+1}+{}^nC_{r+2}}=\frac{2({}^nC_{r+1})}{{}^{(n+1)}C_{r+2}}$$

$$=\frac{2({}^nC_{r+1})}{\left(\frac{n+1}{r+2}\right)({}^nC_{r+1})}=\frac{2}{\frac{n+1}{r+2}}=\frac{2(r+2)}{n+1}\ ...(2)$$

(1) & (2),ల నుండి L.H.S=R.H.S

- **$0\le r\le n$ నకు $C_0.C_r+C_1.C_{r+1}+C_2.C_{r+2}+....+C_{n-r}.C_n={}^{2n}C_{(n+r)}$ అని చూపి తద్వారా (i) $C_0^2+C_1^2+C_2^2+......+C_n^2={}^{2n}C_n$ (ii) $C_0C_1+C_1C_2+C_2C_3+.....+C_{n-1}.C_n={}^{2n}C_{n+1}$ అని చూపండి.**

A: $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+.......$

$+C_rx^r+C_{r+1}x^{r+1}+C_{r+2}x^{r+2}+.......+C_nx^n\ .....(1)$

$\Rightarrow (x+1)^n=C_0x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+.......$

$+C_{n-r}x^{n-r}+......+C_n\ \ .....(2)$

(2) మరియు (1)లను గుణకారం చేయగా,

$[C_0x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+....$

$+C_{n-r}x^{n-r}+C_n][C_0+C_1x+C_2x^2+......$

$+C_rx^r+C_{r+1}x^{r+1}+C_{r+2}x^{r+2}+....+C_nx^n]$

$=(x+1)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$

ఇరువైపులా x^{n+r} గుణకంతో పోల్చగా

$$C_0C_r+C_1C_{r+1}+C_2C_{r+2}+....+C_{n-r}C_n={}^{2n}C_{n+r}$$

(i) r=0 , వ్రాయగా

$C_0^2+C_1^2+C_2^2+......+C_n^2={}^{2n}C_n$

(ii) r=1, వ్రాయగా

$C_0C_1+C_1C_2+C_2C_3+.....+C_{n-1}.C_n={}^{2n}C_{n+1}$

- **n ఒక ధనపూర్ణ సంఖ్య మరియు x ఒక శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్య అయితే $C_0+C_1\frac{x}{2}+C_2\frac{x^2}{3}+C_3\frac{x^3}{4}+......+C_n\frac{x^n}{n+1}=\frac{(1+x)^{n+1}-1}{(n+1)x}$ అని నిరూపించండి.**

A: $S=C_0+C_1.\frac{x}{2}+C_2.\frac{x^2}{3}+....+C_n.\frac{x^n}{n+1}$

$={}^nC_0+{}^nC_1\frac{x}{2}+{}^nC_2\frac{x^2}{3}+......+{}^nC_n.\frac{x^n}{n+1}$

$\Rightarrow xS={}^nC_0.x+{}^nC_1\frac{x^2}{2}+{}^nC_2.\frac{x^3}{3}+....+{}^nC_n.\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\Rightarrow (n+1)xS=\frac{n+1}{1}\cdot{}^nC_0.x+\frac{n+1}{2}.{}^nC_1.x^2$

$+\frac{n+1}{3}.{}^nC_2x^3+....+\frac{n+1}{n+1}{}^nC_n.x^{n+1}$

$={}^{n+1}C_1.x+{}^{n+1}C_2x^2+{}^{n+1}C_3x^3+....+{}^{n+1}C_{n+1}.x^{n+1}$

$$\left(\because \left(\frac{n+1}{r+1}\right).{}^nC_r={}^{(n+1)}C_{r+1}\right)$$

$\Rightarrow (n+1)xS=(1+x)^{n+1}-1$

$(\because {}^nC_1x+{}^nC_2x^2+.....+{}^nC_nx^n=(1+x)^n-1)$

$$\therefore S=\frac{(1+x)^{n+1}-1}{(n+1).x}$$

• $x = \frac{1}{5}+\frac{1.3}{5.10}+\frac{1.3.5}{5.10.15}+...\infty$, అయిన $3x^2+6x$ ను కనుగొనుము.

A: దత్తాంశము నుండి $x=\frac{1}{5}+\frac{1.3}{5.10}+\frac{1.3.5}{5.10.15}+...\infty$

ఇరు వైపులా 1 ను కలుపగా

$$1+x=1+\frac{1}{5}+\frac{1.3}{5.10}+\frac{1.3.5}{5.10.15}+...\infty$$

$$=1+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{1.3}{2!}\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{1}{5}\right)^3+...\infty$$

పై శ్రేణిని ఈ క్రింది సూత్రముతో పోల్చగా,

$$1+\frac{p}{1!}\left(\frac{y}{q}\right)+\frac{p(p+q)}{2!}\left(\frac{y}{q}\right)^2+.......=(1-y)^{-p/q}$$

$p=1, p+q=3 \Rightarrow q=2$ మరియు

$$\frac{y}{q}=\frac{1}{5}\Rightarrow y=\frac{q}{5}=\frac{2}{5}$$

$$\therefore 1+x=(1-y)^{\frac{-p}{q}}=\left(1-\frac{2}{5}\right)^{\frac{-1}{2}}=\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{-1}{2}}=\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow(1+x)^2=\frac{5}{3}\Rightarrow 1+2x+x^2=\frac{5}{3}\Rightarrow 3+6x+3x^2=5$$

$\Rightarrow 3x^2+6x=2.$

• $x=\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\frac{1.3.5.7}{3.6.9.12}+......$ $9x^2+24x=11$ అని నిరూపించండి.

A: దత్తాంశము నుండి $x=\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\frac{1.3.5.7}{3.6.9.12}+.....$

$$=\frac{1.3}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1.3.5.7}{4!}\left(\frac{1}{3}\right)^4+..$$

రెండు వైపులా $1+\frac{1}{3}$ ని కలుపగా

$$1+\frac{1}{3}+x=1+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1.3}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3+......$$

పై శ్రేణిని ఈ క్రింది దానితో పోల్చగా,

$$1+\frac{p}{1!}\left(\frac{y}{q}\right)+\frac{p(p+q)}{2!}\left(\frac{y}{q}\right)^2+.....=(1-y)^{-p/q}$$

$$p=1, p+q=3\Rightarrow 1+q=3\Rightarrow q=2$$

$$\frac{y}{q}=\frac{1}{3}\Rightarrow y=\frac{q}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore 1+\frac{1}{3}+x=(1-y)^{-p/q}=\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-1/2}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2}=(3)^{1/2}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\frac{4}{3}+x=\sqrt{3}\Rightarrow x=\sqrt{3}-\frac{4}{3}=\frac{3\sqrt{3}-4}{3}=\frac{3\sqrt{3}-4}{3}$$

$$\Rightarrow 3x=3\sqrt{3}-4\Rightarrow 3x+4=3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow(3x+4)^2=(3\sqrt{3})^2\Rightarrow 9x^2+24x+16=27$$

$$\Rightarrow 9x^2+24x=11$$

• $\frac{7}{5}\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1.3}{1.2}.\frac{1}{10^4}+\frac{1.3.5}{1.2.3}.\frac{1}{10^6}+....\right)$ శ్రేణి మొత్తాన్ని కనుగొనుము.

Sol: $S=1+\frac{1}{10^2}+\frac{1.3}{1.2}.\frac{1}{10^4}+\frac{1.3.5}{1.2.3}.\frac{1}{10^6}+...$

$$=1+\frac{1}{1!}\frac{1}{100}+\frac{1.3}{2!}\left(\frac{1}{100}\right)^2+\frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{1}{100}\right)^3+......$$

పై శ్రేణిని ఈ క్రింది దానితో పోల్చగా,

$$1+\frac{p}{1!}\left(\frac{x}{q}\right)+\frac{p(p+q)}{2!}\left(\frac{x}{q}\right)^2+....=(1-x)^{-p/q}$$

$$p=1, p+q=3\Rightarrow 1+q=3\Rightarrow q=2$$

$$\frac{x}{q}=\frac{1}{100}\Rightarrow x=\frac{q}{100}=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$$

$$\therefore S=(1-x)^{-p/q}=\left(1-\frac{1}{50}\right)^{-1/2}=\left(\frac{49}{50}\right)^{-1/2}$$

$$=\left(\frac{50}{49}\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{50}{49}}=\frac{5\sqrt{2}}{7}$$

$\therefore$ దత్త శ్రేణి $\frac{7}{5}(S)=\frac{7}{5}\left(\frac{5\sqrt{2}}{7}\right)=\sqrt{2}$

Q 22: విస్తరణ కొలతలు:

- క్రింది దత్తాంశానికి మధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుగొనుము.

మార్కులు	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
విద్యార్థులు	5	8	15	16	6

A: ఊహాత్మక అంకమధ్యమం $A=25$. ఇక్కడ, $C=10$.

కావున ఈ క్రింది పట్టికను తయారు చేయవచ్చును.

తరగతి	f_i	x_i	d_i	f_id_i	$\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	$f_i\lvert x_i-\bar{x}\rvert$
0-10	5	5	–2	–10	22	110
10-20	8	15	–1	–8	12	96
20-30	15	25A	0	0	2	30
30-40	16	35	1	16	8	128
40-50	6	45	2	12	18	108
మొత్తం	50			10		472

ఇక్కడ, $N=50$, $\Sigma f_id_i=10$, $\Sigma f_i\lvert x_i-\bar{x}\rvert=472$

మధ్యమం $\bar{x}=A+C\left(\frac{\Sigma f_id_i}{N}\right)=25+10\left(\frac{10}{50}\right)=25+2=27$.

$\therefore$ $M.D=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{5}f_i\lvert x_i-\bar{x}\rvert=\frac{1}{50}(472)=9.44$

- క్రింది పౌనఃపున్య విభాజనానికి మధ్యగతం నుంచి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

x_i	6	9	3	12	15	13	21	22
f_i	4	5	3	2	5	4	4	3

A: ఇచ్చిన దత్తాంశం పట్టిక నుంచి ఈ క్రింది పట్టికను తయారు చేయవచ్చు.

x_i	f_i	c.f	$\lvert x_i-M\rvert$	$f_i\lvert x_i-M\rvert$
3	3	3	10	30
6	4	7	7	28
9	5	12	4	20
12	2	14	1	2
13	4	18	0	0
15	5	23	2	10
21	4	27	8	32
22	3	30	9	27
N=30				149

$\frac{N}{2}=\left(\frac{30}{2}\right)=15$. కావున మధ్యగతం $M=13$

$\therefore$ $M.D=\frac{\Sigma f_i\lvert x_i-M\rvert}{N}=\frac{149}{30}=4.97$

Q 23: సంభావ్యత:

- సంభావ్యతమీద సంకలన సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించుము

A: ప్రవచనం: E_1, E_2 లు శాంపుల్ ఆవరణము S లోని రెండు ఘటనలు అయిన $P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\cap E_2)$

నిరూపితాంశం: **Case (i):** $E_1\cap E_2=\phi$ అయినప్పుడు

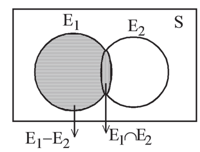
$E_1\cap E_2=\phi \Rightarrow P(E_1\cap E_2)=0$

$\therefore$ $P(E_1\cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)$ [సమ్మేళనపు స్వీకృతము నుండి]

$=P(E_1)+P(E_2)-0=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\cap E_2)$

Case (ii) : $E_1\cap E_2\neq\phi$ అయినప్పుడు

$E_1\cup E_2$ ను $(E_1-E_2), E_2$ అనే పరస్పర వివర్జిత ఘటనల సమ్మేళనముగా వ్యక్తపరచ వచ్చును.



$\therefore$ $P(E_1\cup E_2)=P[(E_1-E_2)\cup E_2]$

$=P(E_1-E_2)+P(E_2)$ ....(1)

మరియు, E ను (E_1-E_2), $(E_1\cap E_2)$. అనే పరస్పర వివర్జిత ఘటనల సమ్మేళనముగా వ్యక్తపరచ వచ్చును.

$\therefore$ $P(E_1)=P[(E_1-E_2)\cup(E_1\cap E_2)]$

$=P(E_1-E_2)+P(E_1\cap E_2)$

$\Rightarrow P(E_1-E_2)=P(E_1)-P(E_1\cap E_2)$

$\therefore$ (1), నుండి $P(E_1\cup E_2)=[P(E_1)-P(E_1\cap E_2)]+P(E_2)$

$=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\cap E_2)$.

కావున నిరూపించబడినది.

- బేయీ సిద్ధాంతం ప్రవచించి, నిరూపించండి.

A: ప్రవచనం: శాంపుల్ ఆవరణ S లో $E_1, E_2 ... E_n$ లు రస్పర వివర్జిత, పూర్ణ ఘటనలు. వాటిలో ఏదైనా ఘటన A మరియు $P(A)\neq 0$ లు అనుకుంటే అప్పుడు $P(E_k\,|\,A)=\frac{P(E_k)P(A/E_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(Ei).P(A/E_i)}$

నిరూపితాంశం: నియతసంభావ్యత నిర్వచనం ప్రకారం

$P(E_k\,|\,A)=\frac{P(E_k\cap A)}{P(A)}=\frac{P(E_k).P(A\,|\,E_k)}{P(A)}$ ...(1)

దత్తాంశం ప్రకారం $E_1, E_2 ....E_n$ లు పరస్పర వివర్జిత, పూర్ణ ఘటనలు కాబట్టి

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$ మరియు

$A \cap E_1, A \cap E_2, ...A \cap E_n$ లుపరస్పర వియుక్తాలు

$\Rightarrow A \cap E_i = \phi$

ఇప్పుడు,

$$P(A) = P(S \cap A) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cap A\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (E_i \cap A)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(E_i \cap A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) P(A \mid E_i)$$

$\therefore$ (1),నుండి $P(E_k \mid A) = \dfrac{P(E_k)P(A \mid E_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A \mid E_i)}$

- **ఒక పాత్ర B_1 లో 2 తెల్లటి, 3 నల్లటి బంతులున్నాయి. మరో పాత్ర B_2 లో 3 తెల్లటి, 4 నల్లటి బంతులున్నాయి. ఈ రెండింటిలో ఒక పెట్టెను యాదృచ్ఛికంగా ఎంచుకొని అందులోనుంచి ఒక బంతిని యాదృచ్ఛికంగా తీశారు. అట్లా తీసిన బంతి నల్లటిది అయితే, ఎన్నుకొన్న పెట్టె B_1 అయ్యే సంభావ్యతను కనుక్కోండాం.**

Sol: B_1, B_2 పాత్రలను ఎన్నుకొనే ఘటనలను వరసగా E_1, E_2లు అనుకొందాం. ఎంచుకొన్న పెట్టె నుంచి తీసిన బంతి నల్లటిదయ్యే ఘటన B అనుకొందాం.

$P(E_1) = P(E_2) = \dfrac{1}{2}$ మరియు

$P(B \mid E_1) = \dfrac{3}{5}; P(B \mid E_2) = \dfrac{4}{7}$

$\therefore$ బేయీ సిద్ధాంతం ప్రకారం కావలసిన సంభావ్యత

$$P(E_1 \mid B) = \frac{P(E_1)P(B \mid E_1)}{P(E_1).P(B \mid E_1) + P(E_2)P(B \mid E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}}{\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{7}\right)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{10} + \frac{2}{7}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{21+20}{70}}$$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{70}{41} = \frac{21}{41}$$

- **అంకెలను కలిగిన మూడు పెట్టెలలో క్రింది విధంగా బంతులు ఉన్నాయి.**

	తెల్లనివి	నల్లనివి	ఎర్రనివి
I	1	2	3
II	2	1	1
III	4	5	3

ఒక పెట్టెను యాదృచ్ఛికంగా ఎంపిక చేసి, దాని నుంచి ఒక బంతిని తీశారు. అది ఎర్రనిది అయితే,అది పెట్టె II నుంచి తీయగల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

A: బాక్సులు B_1, B_2, B_3లను ఎంపిక చేసే ఘటనలను వరుసగా B_1, B_2, B_3 మరియు ఎర్రని బంతిని ఎంపిక చేసే ఘటన R అనుకొందాం.

$\therefore \therefore P(B_1) = \dfrac{1}{3}, P(B_2) = \dfrac{1}{3}, P(B_3) = \dfrac{1}{3}$ మరియు

$$P\left(\frac{R}{B_1}\right) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P\left(\frac{R}{B_2}\right) = \frac{1}{4}, P\left(\frac{R}{B_3}\right) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

కావున బేయీ సిద్ధాంతం ప్రకారం కావలసిన సంభావ్యత

$$P\left(\frac{B_2}{R}\right) = \frac{P(B_2)P\left(\frac{R}{B_2}\right)}{P(B_1)P\left(\frac{R}{B_1}\right) + P(B_2)P\left(\frac{R}{B_2}\right) + P(B_3)P\left(\frac{R}{B_3}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{4}{4}\right)} = \frac{1}{4}$$

Q 24: యాదృచ్ఛిక చలరాశులు:

- ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి X సంభావ్యతా విభాజనాన్ని క్రింది ఇచ్చాం.

$X=x_i$	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	k	2k	3k	4k	5k

అయిన k విలువను, X సగటు, విస్తృతులను కనుగొనుము.

A: $\sum P(X=x_i)=1$ అని తెలుసు

$\Rightarrow k+2k+3k+4k+5k=1 \Rightarrow 15k=1$

$\Rightarrow k=1/15$

X సగటు $\mu=\sum_{i=1}^{5} x_i.P(X=x_i)$

$=1(k)+2(2k)+3(3k)+4(4k)+5(5k)$

$=k(1+4+9+16+25)=k(55)=\frac{1}{15}(55)=\frac{55}{15}=\frac{11}{3}$

X విస్తృతి $\sigma^2=\Sigma x_i^2.P(X=x_i)-\mu^2$

$=1(k)+4(2k)+9(3k)+16(4k)+25(5k)-\left(\frac{11}{3}\right)^2$

$=k(1+8+27+64+125)-\left(\frac{11}{3}\right)^2$

$=\frac{1}{15}(225)-\left(\frac{11}{3}\right)^2=15-\frac{121}{9}=\frac{14}{9}$

- ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి X వ్యాప్తి {1,2,3,....},

$P(X=k)=\frac{c^k}{k!}$ k=1,2,3,.... అయితే c విలువను $P(0<X<3)$ లను కనుగొనుము.

A: దత్తాంశమను నుండి $P(X=k)=\frac{c^k}{k!}, (k=1,2,3,......)$

సంభావ్యతల మొత్తం

$\frac{c^1}{1!}+\frac{c^2}{2!}+\frac{c^3}{3!}+....=1$

$\Rightarrow 1+\frac{c}{1!}+\frac{c^2}{2!}+\frac{c^3}{3!}+....=1+1$

$\Rightarrow e^c=2 \Rightarrow c=\log_e 2$

మరియు, $P(0<X<3)=P(X=1)+P(X=2)$

$=\frac{c^1}{1!}+\frac{c^2}{2!}=c+\frac{c^2}{2}=\log_e 2+\frac{(\log_e 2)^2}{2}$

- ఒక పాచికను దొర్లించగా, ఆ పాచిక పై ముఖముపై వచ్చిన సంఖ్యకు మధ్యమము, విస్తృతులను కనుగొనుము.

A: యాదృచ్ఛిక చలరాశి X అనేది పాచికపై ముఖంపై వచ్చే అంకెను సూచిస్తే X యొక్క వ్యాప్తి = {1,2,3.....6}

P(X) యొక్క సంభావ్యతా విభాజనం క్రింది విధంగా ఉంది

$X=x_i$	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

X యొక్క సగటు $\mu=\sum_{i=1}^{6} X_i.P(X=x_i)$

$=1.\frac{1}{6}+2.\frac{1}{6}+3.\frac{1}{6}+4.\frac{1}{6}+5.\frac{1}{6}+6.\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$

X యొక్క విస్తృతి $\sigma^2=\sum_{i=1}^{6} x_i^2.P(X=x_i)-\mu^2$

$=1^2.\frac{1}{6}+2^2.\frac{1}{6}+3^2.\frac{1}{6}+4^2.\frac{1}{6}+5^2.\frac{1}{6}+6^2.\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2$

$=\frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36)-\frac{49}{4}$

$=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{182-147}{12}=\frac{35}{12}$