2B (TM)

Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH-2019 (AP)

PREVIOUS PAPERS
IPE: MARCH-2019(AP)
గణితశాస్త్రం – 2B

Time : 3 Hours Max.Marks : 75

సెక్షన్–ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: **10 × 2 = 20**

1. (4,2), (1,5) లు వ్యాసాగ్రాలుగా కలిగిన వృత్త సమీకరణము కనుగొనుము.
2. $x^2+y^2-5x+8y+6=0$ అనే వృత్తం దృష్ట్యా (4,2), (k,–3) అనే బిందువులు సంయుగ్మాలైతే k విలువను కనుగొనుము.
3. $x^2+y^2+4x+6y-7=0$, $4(x^2+y^2)+8x+12y-9=0$ అనే వృత్తాల మూలాక్ష సమీకరణము కనుగొనుము.
4. $x^2-4x-8y+12=0$ పరావలయంపై $\left(4,\frac{3}{2}\right)$ వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరణం కనుగొనుము.
5. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ పై ఏ బిందువు నుంచైనా అనంత స్పర్శరేఖలకు గల లంబదూరాల లబ్ధం కనుక్కోండి.
6. $\int\frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}dx$ ను గణించండి
7. $\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ ను గణించండి
8. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$ ను గణించండి
9. $\int_0^{\pi/2}\sin^6x\cos^4x\,dx$ ను గణించండి
10. c యాదృచ్ఛిక చలరాశి అయినప్పుడు $y=cx-2c^2$ యొక్క అవకలన సమీకరణము కనుగొనుము.

సెక్షన్–బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. **5 × 4 = 20**

11. P అనే బిందువు నుండి $x^2+y^2-4x-6y-12=0$, $x^2+y^2+6x+18y+26=0$ అనే వృత్తాలకు గల స్పర్శరేఖల పొడవులు 2:3 నిష్పత్తిలో ఉంటే P యొక్క బిందుపథ సమీకరణము కనుగొనుము.
12. $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ మరియు $x^2+y^2-2x-15=0$ వృత్తాల ఖండన బిందువుల గుండా మరియు (1,2) బిందువు గుండా పోయే వృత్త సమీకరణము కనుగొనుము.
13. X,Y–అక్షాలు వరుసగా దీర్ఘాక్షం, హ్రస్వాక్షంగా కలిగి నాభి లంబం పొడవు 4, నాభుల మధ్య దూరం $4\sqrt{2}$ గా గల దీర్ఘవృత్త సమీకరణం కనుక్కోండి.
14. దీర్ఘవృత్తపు ఏదైనా స్పర్శరేఖపైకి నాభుల నుండి గీసిన లంబపాదాల బిందు పథం అనుబంధ (సహాయక) వృత్తం అని చూపండి.
15. $x+2y=0$ కు (i) సమాంతరంగా (ii) లంబంగా ఉంటూ అతిపరావలయం $x^2-4y^2=4$ ను స్పృశించే రేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.
16. $y=\sin x$, $y=\cos x$, X - అక్షంతో పరిబద్ధమైన ఒక వక్ర రేఖీయ త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కోండి.
17. $x(x-1)\frac{dy}{dx}-y=x^3(x-1)^3$ అవకలన సమీకరణాన్ని సాధించండి.

సెక్షన్–సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. **5 × 7 = 35**

18. (1,1), (–6,0), (–2,2), (–2,–8) బిందువులు చక్రీయాలు అని చూపి, ఈ బిందువుల గుండాపోయే వృత్త సమీకరణము కనుగొనుము.
19. $x^2+y^2-4x-10y+28=0$, $x^2+y^2+4x-6y+4=0$ వృత్తాల తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు కనుగొనుము.
20. నాభి S(3,5) మరియు శీర్షము A(1,3) గా గల పరావలయ సమీకరణము కనుక్కోండి.
21. $\int\frac{3\sin x+\cos x+7}{\sin x+\cos x+1}dx$ ను గణించండి
22. ధన పూర్ణాంకం $n\geq 2$, $I_n=\int\operatorname{cosec}^n x\,dx$ కు లఘూకరణ సూత్రాన్ని రాబట్టండి. దాని నుంచి $\int\operatorname{cosec}^5 x\,dx$ విలువ రాబట్టండి.
23. $\int_0^{\pi/4}\log(1+\tan x)\,dx$ ను గణించండి
24. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-2xy}{x^2-xy}$ ను సాధించండి.

BABY BULLET-Q

IPE AP MARCH-2019
SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. **(4,2), (1,5) లు వ్యాసాగ్రాలుగా కలిగిన వృత్త సమీకరణము కనుగొనుము.**

Sol: దత్త బిందువులు $A(x_1,y_1) = (4,2)$ మరియు $B(x_2,y_2) = (1,5)$

A(4,2), B(1,5)లు వ్యాసాగ్రాలుగా కలిగిన వృత్త సమీకరణము

$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2)=0 \Rightarrow (x-4)(x-1) + (y-2)(y-5) = 0$

$\Rightarrow x^2 - x - 4x + 4 + y^2 - 5y - 2y + 10 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 5x - 7y + 14 = 0$

---

2. **$x^2+y^2-5x+8y+6=0$ అనే వృత్తం దృష్ట్యా (4,2), (k,–3) అనే బిందువులు సంయుగ్మాలైతే k విలువను కనుగొనుము.**

Sol : దత్త బిందువులు $P(x_1,y_1)=(4,2)$, $Q(x_2,y_2)=(k,-3)$ మరియు వృత్తం $S= x^2+y^2-5x+8y+6=0$

$\Rightarrow g= -5/2,\ f=4,\ c=6$

S=0 దృష్ట్యా P,Q లు సంయుగ్మాలైన $S_{12}=0 \Rightarrow x_1x_2+y_1y_2+g(x_1+x_2)+f(y_1+y_2)+c=0$

$\Rightarrow 4(k)+2(-3)-\frac{5}{2}(4+k)+4(2-3)+6=0 \Rightarrow 4k-\not{6}-\frac{5}{2}(4+k)-4+\not{6}=0$

$\Rightarrow 4k-\frac{5}{2}(4+k)-4=0 \Rightarrow 8k-5(4+k)-8=0 \Rightarrow 8k-20-5k-8=0 \Rightarrow 3k=28 \Rightarrow k=\frac{28}{3}$

---

3. **$x^2+y^2+4x+6y-7=0$, $4(x^2+y^2)+8x+12y-9=0$ అనే వృత్తాల మూలాక్ష సమీకరణము కనుగొనుము.**

Sol: ఇచ్చిన వృత్తాల సాధారణ రూపం

$S \equiv x^2+y^2+4x+6y-7=0$ మరియు $S' \equiv x^2+y^2+2x+3y-\frac{9}{4}=0$

ఇచ్చిన వృత్తాల మూలాక్ష సమీకరణం $S-S' = 0$

$\Rightarrow (4-2)x+(6-3)y+\left(-7+\frac{9}{4}\right)=0 \Rightarrow 2x+3y-\frac{19}{4}=0 \Rightarrow 8x+12y-19=0$

BABY BULLET-Q

4. $x^2 - 4x - 8y + 12 = 0$ పరావలయంపై $\left(4, \frac{3}{2}\right)$ వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరణం కనుగొనుము.

Sol: $S = lx^2+mx+ny+c=0$ పరావలయంపై (x_1,y_1) వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$$S_1 = l(x_1x)+\frac{m}{2}(x+x_1)+\frac{n}{2}(y+y_1)+c=0$$

$\therefore$ $x^2 - 4x - 8y + 12 = 0$ పరావలయంనకు స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$$1(4x)-2(x+4)-4\left(y+\frac{3}{2}\right)+12=0 \Rightarrow 4x-2x-8-4\left(\frac{2y+3}{2}\right)+12=0$$

$$\Rightarrow 4x-2x-8-2(2y+3)+12=0 \Rightarrow 4x-2x-8-4y-6+12=0$$

$$\Rightarrow 2x-4y-2=0 \Rightarrow 2(x-2y-1)=0 \Rightarrow x-2y-1=0 \qquad \text{(or)}$$

[**Hint:** ఇచ్చిన సమీకరణమును x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా $\frac{dy}{dx}=\frac{x-2}{4}$

(4,3/2) వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు 1/2.]

---

5. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ పై ఏ బిందువు నుంచైనా అనంత స్పర్శరేఖలకు గల లంబదూరాల లబ్ధం కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చిన అతిపరావలయం $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow a^2 = 16, b^2 = 9$

అతిపరావలయంపై ఏ బిందువు నుంచైనా అనంత స్పర్శరేఖలకు గల

లంబదూరాల లబ్ధం $=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{16\times 9}{16+9}=\frac{144}{25}$

---

6. $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}dx$ ను గణించండి.

Sol: $xe^x = t \Rightarrow [xe^x+e^x(1)]dx=dt \Rightarrow e^x(1+x)dx=dt$

$$\therefore \int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}dx = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \sec^2 t\,dt = \tan t + c = \tan(xe^x)+c$$

---

7. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ ను గణించండి.

Sol: $$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}dx = \int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \log|x+1|-\log|x+2|+c$$

BABY BULLET-Q

8. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$ ను గణించండి.

Sol: $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}=\frac{-1}{2}\left[2\sqrt{3-2x}\right]_0^1=-\left[\sqrt{3-2x}\right]_0^1=-(\sqrt{3-2(1)}-\sqrt{3-2(0)})$

$=-(1-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1$

---

9. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\cos^4 x\,dx$ ను గణించండి.

Sol : $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\cos^4 x\,dx \quad =\frac{[(5)(3)(1)][(3)(1)]}{(10)(8)(6)(4)(2)}\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{512}$

☞ Note the factor $\frac{\pi}{2}$ ($\because$ m, n are even)

---

10. c యాదృచ్ఛిక చలరాశి అయినప్పుడు $y=cx-2c^2$ యొక్క అవకలన సమీకరణము కనుగొనుము.

Sol: దత్తాంశము నుండి $y=cx-2c^2$ .....(1)

x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా $y_1=c$

$\therefore (1) \Rightarrow y=y_1x-2y_1^2 \Rightarrow 2y_1^2-xy_1+y=0 \Rightarrow 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-x\left(\frac{dy}{dx}\right)+y=0$

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-బి

11. P అనే బిందువు నుండి $x^2+y^2-4x-6y-12=0$, $x^2+y^2+6x+18y+26=0$ అనే వృత్తాలకు గల స్పర్శరేఖల పొడవులు 2:3 నిష్పత్తిలో ఉంటే P యొక్క బిందుపథ సమీకరణము కనుగొనుము.

Sol : $P(x_1,y_1)$ అనునది బిందుపథము మీద ఏదైనా ఒక బిందువు అనుకొనుము.

PT_1 = P నుండి $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ అనే వృత్తానికి గల స్పర్శరేఖ పొడవు

మరియు PT_2 = P నుండి $x^2+y^2+6x+18y+26=0$ అనే వృత్తానికి గల స్పర్శరేఖ పొడవు

$PT_1 = \sqrt{S_{11}}$

$PT_2 = \sqrt{S'_{11}}$

దత్తాంశము నుండి $PT_1 : PT_2 = 2:3$

$$\Rightarrow \frac{PT_1}{PT_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3PT_1 = 2PT_2 \Rightarrow 9(PT_1)^2 = 4(PT_2)^2$$

$$\Rightarrow 9[x_1^2 + y_1^2 - 4x_1 - 6y_1 - 12] = 4[x_1^2 + y_1^2 + 6x_1 + 18y_1 + 26]$$

$$\Rightarrow 9x_1^2 + 9y_1^2 - 36x_1 - 54y_1 - 108 = 4x_1^2 + 4y_1^2 + 24x_1 + 72y_1 + 104$$

$$\Rightarrow 5x_1^2 + 5y_1^2 - 60x_1 - 126y_1 - 212 = 0$$

$\therefore$ $P(x_1,y_1)$ యొక్క బిందుపథ సమీకరణము $5x^2+5y^2-60x-126y-212 = 0$.

---

12. $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ మరియు $x^2+y^2-2x-15=0$ వృత్తాల ఖండన బిందువుల గుండా మరియు (1,2) బిందువు గుండా పోయే వృత్త సమీకరణము కనుగొనుము.

Sol: ఇచ్చిన వృత్తాలు $S=x^2+y^2-8x-6y+21=0$, $S'=x^2+y^2-2x-15=0$

వృత్తాల మూలాక్షం $L=S-S'=0$

$\Rightarrow -8x+2x-6y+21+15=0 \Rightarrow -6x-6y+36=0 \Rightarrow -6(x+y-6)=0 \Rightarrow x+y-6=0$

$S'=0$, $L=0$ ఖండన బిందువు గుండా పోవు సమీకరణం $S'+\lambda L=0$

$\Rightarrow (x^2+y^2-2x-15) + \lambda(x + y- 6) =0$ .....(1)

సమీకరణం (1), బిందువు (1,2) గుండా పోతే

$\Rightarrow (1+4-2-15)+\lambda(1+2-6)=0 \Rightarrow -12 + \lambda(-3)=0 \Rightarrow 3\lambda=-12 \Rightarrow \lambda= -4$

(1)లో విలువను $\lambda= -4$ ప్రతిక్షేపించగా $(x^2+y^2-2x-15) -4(x + y- 6) =0$

$\Rightarrow x^2+y^2-2x-15-4x +4y+24 =0 \Rightarrow x^2+y^2-6x-4y+9=0$

BABY BULLET-Q

13. **X,Y-అక్షాలు వరుసగా దీర్ఘాక్షం, హ్రస్వాక్షంగా కలిగి నాభి లంబం పొడవు 4, నాభుల మధ్య దూరం $4\sqrt{2}$ గా గల దీర్ఘవృత్త సమీకరణం కనుక్కోండి.**

Sol: దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ (a>b)$

నాభిలంబం పొడవు 4 $\Rightarrow \frac{2b^2}{a}=4 \Rightarrow b^2=2a$

నాభులు S=(ae,0) మరియు S'=(–ae,0) మధ్య దూరం $4\sqrt{2}$

$\Rightarrow 2ae=4\sqrt{2} \Rightarrow ae=2\sqrt{2} \Rightarrow (ae)^2=(2\sqrt{2})^2=8$

ఇప్పుడు $b^2=a^2(1-e^2) \Rightarrow 2a=a^2-(ae)^2=a^2-8$

$\Rightarrow a^2-2a-8=0 \Rightarrow (a-4)(a+2)=0 \Rightarrow a=4 \quad \therefore\ b^2=2a=2(4)=8$

$\therefore$ దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1 \Rightarrow x^2+2y^2=16$

---

14. **దీర్ఘవృత్తపు ఏదైనా స్పర్శరేఖపైకి నాభుల నుండి గీసిన లంబపాదాల బిందు పథం అనుబంధ (సహాయక) వృత్తం అని చూపండి.**

Sol: దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $S\equiv\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$

బిందుపథంపై ఒక బిందువు $P(x_1,y_1)$ అనుకొనుము

S=0 దీర్ఘవృత్తానికి m వాలు కలిగిన స్పర్శరేఖ సమీకరణం $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

$\Rightarrow y-mx=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ .....(1)

పై స్పర్శరేఖకు లంబముగా ఉండే సరళరేఖ వాలు –1/m.

ఇది (±ae,0) అనే నాభుల గుండా పోతే దాని సమీకరణం

$y-0=-\frac{1}{m}(x\pm ae) \Rightarrow my=-(x\pm ae) \Rightarrow my+x=\pm ae$......(2)

కాని $P(x_1,y_1)$ అనునది (1), (2) ల ఖండన బిందువు

$\Rightarrow y_1-mx_1=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ and $my_1+x_1=\pm ae$

పై రెండు సమీకరణాలను వర్గంచేసి కలుపగా

$\Rightarrow (y_1-mx_1)^2+(my_1+x_1)^2=(a^2m^2+b^2)+(ae)^2$

$\Rightarrow (y_1^2+m^2x_1^2-\cancel{2mx_1y_1})+(m^2y_1^2+x_1^2+\cancel{2mx_1y_1})=a^2m^2+b^2+a^2e^2$

$\Rightarrow x_1^2(1+m^2)+y_1^2(1+m^2)=a^2m^2+[a^2(1-e^2)]+a^2e^2.$

$\Rightarrow (x_1^2+y_1^2)(1+m^2)=a^2(m^2+1) \Rightarrow x_1^2+y_1^2=a^2$

$\therefore P(x_1,y_1)$ యొక్క బింధుపథం $x^2+y^2=a^2$.

దీనినే **సహాయక వృత్తము** అంటారు.

BABY BULLET-Q

15. **$x+2y=0$ కు (i) సమాంతరంగా (ii) లంబంగా ఉంటూ అతిపరావలయం $x^2-4y^2=4$ ను స్పృశించే రేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.**

Sol: ఇచ్చిన అతిపరావలయం $x^2-4y^2=4 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1 \Rightarrow a^2=4, b^2=1$

$x+2y=0$ అనే రేఖ వాలు $-1/2$ $\Rightarrow$ దీని లంబరేఖ వాలు 2

సూత్రం:

m వాలు కలిగిన స్పర్శరేఖ $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

(i) $m=\frac{-1}{2}$ కలిగిన సమాంతర స్పర్శరేఖ $\frac{-1}{2}$

$$y=-\frac{1}{2}x\pm\sqrt{4\left(\frac{1}{4}\right)-1} \quad \Rightarrow y=\frac{-x}{2}\Rightarrow x+2y=0$$

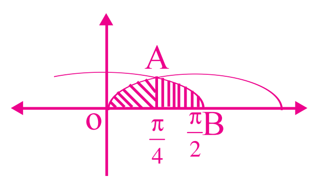
(ii)$m=2$ లంబ స్పర్శరేఖ $y=2x\pm\sqrt{4(2^2)-1} \Rightarrow y=2x\pm\sqrt{15}$

---

16. **$y=\sin x$, $y=\cos x$, X - అక్షంతో పరిబద్ధమైన ఒక వక్ర రేఖీయ త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కోండి.**

Sol: OAB అనునది $y=\sin x$, $y=\cos x$ మరియు X-అక్షంతో పరిబద్ధమైన ఒక వక్రరేఖీయ త్రిభుజం

$\cos x\geq\sin x$ for $x\in[0,\pi/4]$ మరియు $\cos x\leq\sin x$ for $x\in[\pi/4,\pi/2]$



$$\therefore A=\int_0^{\pi/4}\sin x\,dx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\pi/4}+\left[\sin x\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=(2-\sqrt{2})\text{ చ.యూ}$$

BABY BULLET-Q

17. $x(x-1)\frac{dy}{dx}-y=x^3(x-1)^3$ ను సాధించండి.

Sol: దత్త సమీకరణము $x(x-1)\frac{dy}{dx}-y=x^3(x-1)^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx}-\frac{y}{x(x-1)}=\frac{x^3(x-1)^3}{x(x-1)}=x^2(x-1)^2$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}+y\left(\frac{-1}{x(x-1)}\right)=x^2(x-1)^2$ ఇది **y** లో రేఖీయ అవకలన సమీకరణము.

ఇది $\frac{dy}{dx}+yP(x)=Q(x)$ రూపంలో కలదు. ఇక్కడ $P(x)=\frac{-1}{x(x-1)}$, $Q(x)=x^2(x-1)^2$

ఇక్కడ $P(x)=\frac{-1}{x(x-1)} \Rightarrow \int P(x)dx=-\int\frac{dx}{x(x-1)}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\log x-\log(x-1)=\log\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$I.F=e^{\int P(x)dx}=e^{\log\left(\frac{x}{x-1}\right)}=\frac{x}{x-1}$

$\therefore$ సాధన $y(I.F)=\int(I.F)Q(x)dx$

$\Rightarrow y\left(\frac{x}{x-1}\right)=\int\left(\frac{x}{x-1}\right)x^2(x-1)^2dx=\int x^3(x-1)dx=\int(x^4-x^3)dx=\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+c$

$\therefore$ సాధన $y\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+c$

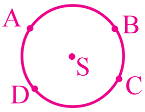
BABY BULLET-Q

సెక్షన్-సి

18. (1, 1), (–6, 0), (–2, 2), (–2, –8) బిందువులు చక్రీయాలని చూపండి.

Sol: A=(1,1), B=(−6,0), C=(−2,2), D=(−2,−8) అనుకోండి.

$S(x_1,y_1)$ వృత్త కేంద్రం అనుకొనుము $\Rightarrow$ SA=SB=SC



ఇప్పుడు, $SA = SB \Rightarrow SA^2 = SB^2 \Rightarrow (x_1-1)^2+(y_1-1)^2 = (x_1+6)^2+(y_1-0)^2$

$\Rightarrow (\cancel{x_1^2}-2x_1+1)+(\cancel{y_1^2}-2y_1+1) = (\cancel{x_1^2}+12x_1+36)+\cancel{y_1^2}$

$\Rightarrow 14x_1+2y_1+34=0 \Rightarrow 2(7x_1+y_1+17)=0 \Rightarrow 7x_1+y_1+17=0$ ....(1)

మరియు, $SB = SC \Rightarrow SB^2 = SC^2 \Rightarrow (x_1+6)^2+(y_1-0)^2 = (x_1+2)^2+(y_1-2)^2$

$\Rightarrow (\cancel{x_1^2}+12x_1+36)+\cancel{y_1^2} = (\cancel{x_1^2}+4x_1+4)+(\cancel{y_1^2}-4y_1+4)$

$\Rightarrow 8x_1+4y_1+28=0 \Rightarrow 4(2x_1+y_1+7)=0 \Rightarrow 2x_1+y_1+7=0$ ......(2)

(1) & (2) లను సాధిస్తే వృత్త కేంద్రం$S(x_1,y_1)$ వస్తుంది.

$(1)-(2) \Rightarrow 5x_1+10=0 \Rightarrow 5x_1=-10 \Rightarrow x_1=-2$

(1) నుండి, $7(-2)+y_1+17=0 \Rightarrow y_1+3=0 \Rightarrow y_1=-3$

$\therefore$వృత్త కేంద్రం $S(x_1,y_1)=(-2,-3)$

మరియు $A=(1,1) \Rightarrow r=SA \Rightarrow r^2=SA^2$

$\therefore r^2=(1+2)^2+(1+3)^2=9+16=25$

కావున కేంద్రం (−2,−3) మరియు $r^2=25$ గా గల వృత్త సమీకరణం

$(x+2)^2+(y+3)^2=25 \Rightarrow (x^2+4x+4)+(y^2+6y+9)=25$

$\Rightarrow x^2+y^2+4x+6y-12=0$

ఇప్పుడు D(−2,−8) ను పై సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$(-2)^2+(-8)^2+4(-2)+6(-8)-12=4+64-8-48-12=68-68=0$

$\therefore$ D(−2,−8) అనే బిందువు వృత్తం పై ఉండును. $\therefore$ ఇచ్చిన 4 బిందువులు చక్రీయాలు

BABY BULLET-Q

19. **$x^2+y^2-4x-10y+28=0$ మరియు $x^2+y^2+4x-6y+4=0$ వృత్తాలకు తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖాయుగ్మ సమీకరణము కనుగొనుము.**

Sol: $x^2+y^2-4x-10y+28=0$, వృత్తానికి కేంద్రం $C_1=(2,5)$, వ్యాసార్ధం $r_1=\sqrt{(-2)^2+(-5)^2-28}=\sqrt{1}=1$

$x^2+y^2+4x-6y+4=0$, వృత్తానికి కేంద్రం $C_2=(-2,3)$, వ్యాసార్ధం $r_2=\sqrt{2^2+(-3)^2-4}=\sqrt{9}=3$

సరూప అంతరకేంద్రము I అనేది C_1C_2 ను $r_1:r_2=1:3$ నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజించును.

$$\therefore I=\left(\frac{1(-2)+3(2)}{1+3},\frac{1(3)+3(5)}{1+3}\right)=\left(\frac{4}{4},\frac{18}{4}\right)=\left(1,\frac{9}{2}\right)$$

తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖాయుగ్మ సమీకరణము $S_1^2=S_{11}(S)$

$$\Rightarrow\left[x+\frac{9}{2}y-2(x+1)-5\left(y+\frac{9}{2}\right)+28\right]^2=\left(1+\frac{81}{4}-4-45+28\right)(x^2+y^2-4x-10y+28)$$

$$\Rightarrow\left(-x-\frac{y}{2}+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(x^2+y^2-4x-10y+28)\Rightarrow\frac{(-2x-y+7)^2}{\not{4}}=\frac{1}{\not{4}}(x^2+y^2-4x-10y+28)$$

$$\Rightarrow(2x+y-7)^2=x^2+y^2-4x-10y+28$$
$$\Rightarrow 4x^2+y^2+49+4xy-28x-14y=x^2+y^2-4x-10y+28\Rightarrow 3x^2+4xy-24x-4y+21=0$$

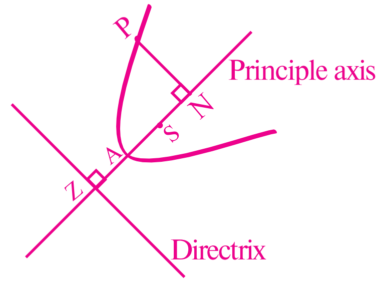
BABY BULLET-Q

20. నాభి S(3,5) మరియు శీర్షము A(1,3) గా గల పరావలయ సమీకరణము కనుక్కోండి.

Sol: నాభి $S = (3, 5)$ మరియు శీర్షము $A = (1,3)$

A,S లలో x-నిరూపకాలు లేదా y-నిరూపకాలు సమానముగా లేవు.

కావున ఆ పరావలయము ఒక ఏటవాలు పరావలయమగును.



నియతరేఖ లంబపాదము $Z = (\alpha, \beta)$ అనుకొనుము.

ZS మధ్యబిందువు = A

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+3}{2}, \frac{\beta+5}{2}\right) = (1,3) \Rightarrow \alpha+3 = 2 \Rightarrow \alpha = -1\ ;\ \beta+5 = 6 \Rightarrow \beta = 1$$

$\therefore Z = (-1,1)$

A (1,3), Z(–1,1) లను కలిపే అక్షము వాలు $m = \frac{3-1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$

నియతరేఖ అక్షమునకు లంబంగా ఉండును కావున, నియతరేఖ వాలు –1.

$\therefore$ Z(–1, 1) గుండా పోతూ వాలు –1 కలిగిన నియతరేఖ సమీకరణం

$y-1 = -1(x+1) \Rightarrow y-1 = -x-1 \Rightarrow x+y = 0$

$P(x_1,y_1)$ అనునది పరావలయం మీద ఒక బిందువు $\Rightarrow SP = PM$

$$\sqrt{(x_1-3)^2+(y_1-5)^2} = \frac{|x_1+y_1|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Rightarrow (x_1-3)^2+(y_1-5)^2 = \frac{(x_1+y_1)^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2[(x_1-3)^2+(y_1-5)^2] = (x_1+y_1)^2$$

$$\Rightarrow 2(x_1^2-6x_1+9+y_1^2-10y_1+25) = x_1^2+2x_1y_1+y_1^2$$

$$\Rightarrow 2(x_1^2+y_1^2-6x_1-10y_1+34) = x_1^2+2x_1y_1+y_1^2$$

$$\Rightarrow 2x_1^2+2y_1^2-12x_1-20y_1+68 = x_1^2+2x_1y_1+y_1^2$$

$$\Rightarrow x_1^2-2x_1y_1+y_1^2-12x_1-20y_1+68 = 0$$

$\therefore$ పరావలయ సమీకరణము $x^2-2xy+y^2-12x-20y+68=0$

BABY BULLET-Q

21. $\int \frac{\cos x + 3\sin x + 7}{\cos x + \sin x + 1} dx$ ను గణించండి.

Sol: $\cos x + 3\sin x + 7 = A\frac{d}{dx}(\cos x + \sin x + 1) + B(\cos x + \sin x + 1) + C$

$\Rightarrow \cos x + 3\sin x + 7 = A(-\sin x + \cos x) + B(\cos x + \sin x + 1) + C$ ....(I)

$\Rightarrow \cos x + 3\sin x + 7 = \cos x(A + B) + \sin x(-A + B) + (B + C)$

cosx యొక్క గుణకాలను పోల్చగా, A+B=1 ....(1)

sinx యొక్క గుణకాలను పోల్చగా, –A+B=3 ....(2)

స్థిర పదాలను పోల్చగా B+C=7 ....(3)

ఇప్పుడు (1) + (2) $\Rightarrow$ 2B=4 $\Rightarrow$ B=2

(1) నుండి , A=1–B =1–2= –1

(3) నుండి , , C=7–B =7–2= 5

A= –1, B=2, C= 5 విలువలను (I) లో వ్రాయగా లవం వచ్చును.

$\cos x + 3\sin x + 7 = -1(-\sin x + \cos x) + 2(\cos x + \sin x + 1) + 5$

$\therefore I = \int \frac{\cos x + 3\sin x + 7}{\cos x + \sin x + 1} dx = \int \frac{-1(-\sin x + \cos x) + 2(\cos x + \sin x + 1) + 5}{\cos x + \sin x + 1} dx$

$= -\int \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x + 1} dx + 2\int \frac{\cancel{\cos x + \sin x + 1}}{\cancel{\cos x + \sin x + 1}} dx + 5\int \frac{1}{\cos x + \sin x + 1} dx$

$= -\log|\cos x + \sin x + 1| + 2x + 5\int \frac{1}{\cos x + \sin x + 1} dx$ ......(II) $\left(\because \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c\right)$

ఇప్పుడు $I_1 = \int \frac{1}{\cos x + \sin x + 1} dx$ ను కనుగొందాం.

$\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ and $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$\therefore I_1 = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + 1}\left(\frac{2dt}{1+t^2}\right) = \int \frac{1}{\frac{1-t^2+2t+1+t^2}{\cancel{1+t^2}}} \cdot \frac{2dt}{\cancel{1+t^2}}$

$= \int \frac{2dt}{2+2t} = \int \frac{\cancel{2}dt}{\cancel{2}(1+t)} = \int \frac{dt}{1+t} = \log|1+t| + c = \log\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + c$

(II) నుండి $I = -\log|\cos x + \sin x + 1| + 2x + 5\log\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + c$

BABY BULLET-Q

22. $I_n = \int \csc^n x dx$ నకు లఘూకరణ సూత్రమును రాబట్టి దానినుండి $\int \csc^5 x dx$ ను గణించుము.

Sol: $I_n = \int \csc^n x dx = \int \csc^{n-2} x \csc^2 x dx$.

మొదటి ప్రమేయము $u=\csc^{n-2}x$ మరియు

రెండవ ప్రమేయము $v=\csc^2 x \Rightarrow \int v = -\cot x$

విభాగ సమాకలన సూత్రము ప్రకారము

$$I_n = \csc^{n-2}x(-\cot x) - \int (n-2)\csc^{n-3}x(-\csc x \cot x)(-\cot x)dx$$

$$= -\csc^{n-2}x \cot x \ -(n-2)\int \csc^{n-2}x \cot^2 x dx$$

$$= -\csc^{n-2}x \cot x \ -(n-2)\int \csc^{n-2}x (\csc^2 x - 1)dx$$

$$= -\csc^{n-2}x \cot x \ -(n-2)\int \csc^n x dx + (n-2)\int \csc^{n-2} x dx$$

$$I_n = -\csc^{n-2}x \cot x - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2}$$

$$\Rightarrow I_n + (n-2)I_n = \csc^{n-2}x \cot x + (n-2)I_{n-2}$$

$$\Rightarrow I_n(1+n-2) = -\csc^{n-2}x \cot x + (n-2)I_{n-2}$$

$$\Rightarrow I_n(n-1) = -\csc^{n-2}x \cot x + (n-2)I_{n-2}$$

$$\Rightarrow I_n = -\frac{\csc^{n-2}x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$$

n=5,3,1 విలువలను వరుసగా (1)లో ప్రతిక్షేపించగా, $I_5 = \int \csc^5 x dx = \frac{-\csc^3 x \cot x}{4} + \frac{3}{4} I_3$

$$= -\frac{\csc^3 x \cot x}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{-\csc x + \cot x}{2} + \frac{1}{2} I_1\right]$$

$$= -\frac{\csc^3 x \cot x}{4} - \frac{3\csc x \cot x}{8} + \frac{3}{8}\int \csc x dx$$

$$= -\frac{\csc^3 x \cot x}{4} - \frac{3\csc x \cot x}{8} \quad + \frac{3}{8}\log|\csc x - \cot x| + c$$

$$\therefore I_5 = \frac{\csc^3 x.\cot x}{4} - \frac{3}{8}\csc x \cot x \ + \frac{3}{8}\log|\tan\frac{x}{2}| + c$$

BABY BULLET-Q

23. $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)dx$ ను గణించండి.

Sol: $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ అని మనకు తెలుసు

$$\therefore I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)dx = \int_0^{\pi/4} \log\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left[1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right]dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{1+\cancel{\tan x}+1-\cancel{\tan x}}{1+\tan x}\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} [\log 2 - \log(1+\tan x)]dx$$

$$= \log 2\int_0^{\pi/4} 1dx - \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)dx$$

$$= \log 2[x]_0^{\pi/4} - I$$

$$\Rightarrow I + I = (\log 2)\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2I = \left(\frac{\pi}{4}\right)(\log 2)$$

$$\Rightarrow I = \left(\frac{\pi}{8}\right)(\log 2)$$

BABY BULLET-Q

24. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-2xy}{x^2-xy}$ ను సాధించండి.

Sol: $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-2xy}{x^2-xy}$ ....(1). ఇది ఒక సమఘాత అవకలన సమీకరణము.

$$y=vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

(1) నుండి $v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2x^2-2x(vx)}{x^2-x(vx)}=\frac{x^2(v^2-2v)}{x^2(1-v)}=\frac{(v^2-2v)}{(1-v)}$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-2v}{1-v}-v=\frac{v^2-2v-v+v^2}{1-v}=\frac{2v^2-3v}{1-v}$$

$$\therefore x\frac{dv}{dx}=\frac{2v^2-3v}{1-v}\Rightarrow\frac{(1-v)dv}{2v^2-3v}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{(1-v)dv}{2v^2-3v}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{(1-v)dv}{2v^2-3v}=\log x-\log c........(2)$$

ఇప్పుడు $\int\frac{1-v}{v(2v-3)}dv=-\frac{1}{3}\int\frac{3v-3}{v(2v-3)}dv=-\frac{1}{3}\int\frac{(2v-3)+v}{v(2v-3)}dv$

$$=-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{2v-3}\right)dv=-\frac{1}{3}\left[\log v+\frac{1}{2}\log(2v-3)\right]$$

(2) నుండి $-\frac{1}{3}\left[\log v+\frac{1}{2}\log(2v-3)\right]=\log\frac{x}{c}\Rightarrow-\frac{1}{3}\log(v\sqrt{2v-3})=\log\frac{x}{c}$

$$\Rightarrow\log v\sqrt{2v-3}=-3\log\frac{x}{c}=\log\frac{c^3}{x^3}\Rightarrow v\sqrt{2v-3}=\frac{c^3}{x^3}\Rightarrow x^3v\sqrt{2v-3}=c^3\Rightarrow x^6v^2(2v-3)=c^6$$

$$\Rightarrow x^6\left(\frac{y^2}{x^2}\right)\left(2\frac{y}{x}-3\right)=c\Rightarrow x^6\left(\frac{y^2}{x^2}\right)\left(\frac{2y-3x}{x}\right)=c\Rightarrow x^3y^2(2y-3x)=c$$

BABY BULLET-Q