2A (TM)

Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH-2019 (AP)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2019(AP)

Time : 3 Hours **గణితశాస్త్రం- 2A** Max.Marks : 75

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: $10 \times 2 = 20$

1. $(\sqrt{3}+i)^{100} = 2^{99}(a+ib)$, అయిన $a^2+b^2=4$ అని చూపండి. **2.** $z=2-3i$, అయిన $z^2-4z+13=0$ అ.చూ
3. $1, \omega, \omega^2$లు 1 యొక్క ఘన మూలాలు అయితే $(1-\omega+\omega^2)^5+(1+\omega-\omega^2)^5$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.
4. $x^2-15-m(2x-8)=0$ యొక్క మూలాలు సమానమైన m విలువ కనుగొనుము.
5. $4x^3+16x^2-9x-a=0$ సమీకరణం మూలాల లబ్ధం 9 అయితే, a ని కనుక్కోండి.
6. 'INTERMEDIATE' పదంలోని అక్షరాలను అమర్చడం ద్వారా వచ్చే ప్రస్తారాల సంఖ్య కనుగొనుము.
7. If ${}^nC_5={}^nC_6$, అయిన $13C_n$ కనుగొనుము. **8.** $\left(\frac{2x}{3}+\frac{3y}{2}\right)^9$ లో 6వ పదం కనుగొనుము.
9. 4, 6, 9, 3, 10, 13, 2 అనే దత్తాంశానికి మధ్యగతం నుంచి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.
10. ఒక ద్విపద విభాజనం అంకమధ్యమం, విస్తృతి వరసగా 4,3. ఆ విభాజనాన్ని సంధానించి $P(X\geq 1)$ని కనుక్కోండి.

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 4 = 20$

11. $x+iy=\frac{1}{1+\cos\theta+i\sin\theta}$ అయిన, $4x^2-1=0$ అని చూపండి.
12. x వాస్తవమైన $\frac{x}{x^2-5x+9}$ సమాసము 1 మరియు $\frac{-1}{11}$ మధ్య ఉండునని చూపుము.
13. MASTER అనే పదంలోని అక్షరాలతో ఏర్పడే పదాలన్నింటినీ నిఘంటువులోని క్రమంలో అమరిస్తే, MASTER పదం కోటిని కనుక్కోండి.
14. ${}^{34}C_5+\sum_{r=0}^{4}{}^{(38-r)}C_4$ సూక్ష్మీకరించండి. **15.** $\frac{x^3}{(x-1)(x+2)}$ ను పాక్షికభిన్నాలుగా విడగొట్టండి.
16. ఒక గుర్రపుపందెంలో A,B,C అనే మూడు గుర్రాలు పోటీపడుతున్నాయి. వీటిలో A గెలిచే సంభావ్యత B గెలుపు సంభావ్యతకు రెట్టింపు, B గెలిచే సంభావ్యత C గెలుపు సంభావ్యతకు రెట్టింపు అయితే A,B,C ల గెలుపు సంభావ్యతలెంత?
17. 75% సందర్భాల్లో A నిజం మాట్లాడతాడు, B, 80% సందర్భాల్లో నిజం మాట్లాడతాడు. ఒక సంఘటనగురించి వారు చెప్పే విషయం పరస్పరం విభేదించడానికి సంభావ్యత ఎంత?

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. $5 \times 7 = 35$

18. $x^2-2x+4=0$ యొక్క మూలాలు α,β అయిన $\alpha^n+\beta^n=2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$అని చూపండి.
19. $18x^3+81x^2+121x+60=0$, సమీకరణం ఒక మూలం తక్కిన రెండు మూలాల మొత్తములో సగమైతే, సమీకరణాన్ని సాధించండి.
20. $\left(ax^2+\frac{1}{bx}\right)^{11}$ ద్విపద విస్తరణలోని x^{10} గుణకము, $\left(ax-\frac{1}{bx^2}\right)^{11}$ ద్విపద విస్తరణలోని x^{-10} గుణకానికి సమానం అయిన $ab=-1$ అని చూపండి.
21. $x=\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\frac{1.3.5.7}{3.6.9.12}+\ldots$ అయితే $9x^2+24x=11$ అని చూపుము.
22. ఈ కింది అవిచ్చిన్న పౌనఃపున్య విభాజనానికి విస్తృతి, ప్రామాణిక విచలనాలను గణనం చేయండి.

x_i	4	8	11	17	20	24	32
f_i	3	5	9	5	4	3	1

23. బేయీ సిద్ధాంతం ప్రవచించి, నిరూపించండి.
24. A ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి X సంభావ్యతా విభాజనాన్ని క్రింద ఇచ్చాం.

$X=x_i$	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	k	2k	3k	4k	5k

k విలువను, X సగటు, విస్తృతులను కనుగొనుము.

BABY BULLET-Q

IPE AP MARCH-2019
SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. $(\sqrt{3}+i)^{100} = 2^{99}(a+ib)$, అయిన $a^2+b^2 = 4$ అని చూపండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $(\sqrt{3}+i)^{100} = 2^{99}(a+ib)$

$\Rightarrow \left|(\sqrt{3}+i)^{100}\right| = \left|2^{99}(a+ib)\right| \Rightarrow (\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2})^{100} = 2^{99}\sqrt{a^2+b^2}$

$\Rightarrow 2^{100} = 2^{99}\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow 2 = \sqrt{a^2+b^2}$. ఇరువైపులా వర్గం చేయగా $a^2+b^2 = 4$.

---

2. $z=2-3i$, అయిన $z^2-4z+13=0$ అని చూపండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $z=2-3i \Rightarrow z-2=-3i \Rightarrow (z-2)^2=9i^2 \Rightarrow z^2-4z+4=-9 \Rightarrow z^2-4z+13=0$

---

3. $1,\omega,\omega^2$ లు 1 యొక్క ఘన మూలాలు అయితే $(1-\omega+\omega^2)^5+(1+\omega-\omega^2)^5$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

Sol: G.E $=(1-\omega+\omega^2)^5+(1+\omega-\omega^2)^5$

$=(1+\omega^2-\omega)^5+(1+\omega-\omega^2)^5= (-\omega-\omega)^5+(-\omega^2-\omega^2)^5$

$=(-2\omega)^5+(-2\omega^2)^5=-2^5[\omega^2+\omega]=-32(-1)=32$

---

4. $x^2-15-m(2x-8)=0$ యొక్క మూలాలు సమానమైన m విలువ కనుగొనుము.

Sol: దత్త సమీకరణం $x^2-15-m(2x-8)=0$

$\Rightarrow x^2-15-2mx+8m=0 \Rightarrow x^2-2mx+(8m-15)=0$

పై సమీకరణమును $ax^2+bx+c=0$ తో పోల్చగా $a=1, b=-2m, c=8m-15$

మూలాలు సమానము కావున $\Delta=b^2-4ac=0$

$\Rightarrow (-2m)^2-4(1)(8m-15)=0$

$\Rightarrow 4m^2-32m+60=0 \Rightarrow 4(m^2-8m+15)=0$

$\Rightarrow m^2-8m+15=0 \Rightarrow m^2-5m-3m+15=0$

$\Rightarrow m(m-5)-3(m-5)=0 \Rightarrow (m-3)(m-5)=0 \Rightarrow m=3, 5$

---

5. $4x^3+16x^2-9x-a=0$ సమీకరణం మూలాల లబ్ధం 9 అయితే, a కనుక్కోండి.

Sol: ఇచ్చిన సమీకరణం నుండి $a_0=4, a_1=16, a_2=-9, a_3=-a$

మూలాల లబ్ధం 9 $\Rightarrow S_3=-\frac{a_3}{a_0}=9 \Rightarrow \frac{a}{4}=9 \Rightarrow a=4\times 9=36$

BABY BULLET-Q

6. **"INTERMEDIATE" పదంలోని అక్షరాలను అమర్చడం ద్వారా వచ్చే ప్రస్తారాల సంఖ్య కనుగొనుము.**

Sol: ఇచ్చిన పదం INTERMEDIATE లోని అక్షరాలు 12.

వీటిలో 3 'E' లు, 2'I'లు, 2'T'లు ఒకేరకం.

$\therefore$ కావలసిన ప్రస్తారాల సంఖ్య $= \dfrac{n!}{p!q!r!} = \dfrac{12!}{3!2!2!}$

---

7. $^nC_5 = {}^nC_6$, **అయిన** $^{13}C_n$ **ను కనుగొనుము**

Sol : **సూత్రం:** $^nC_r = {}^nC_s \Rightarrow r+s=n$ (or) $r=s$

$\therefore {}^nC_5 = {}^nC_6 \Rightarrow n = 5+6 = 11$

$\therefore {}^{13}C_n = {}^{13}C_{11} = {}^{13}C_{13-11} = {}^{13}C_2 = \dfrac{13\times 12}{1\times 2} = 13\times 6 = 78$

---

8. $\left(\dfrac{2x}{3}+\dfrac{3y}{2}\right)^9$ **లోని 6వ పదం కనుగొనుము.**

Sol: $(x+y)^n$ లో $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r$ అని మనకు తెలుసు

$$\therefore T_6 = T_{5+1} = {}^9C_5\left(\frac{2x}{3}\right)^{9-5}\left(\frac{3y}{2}\right)^5 = {}^9C_5\left(\frac{2}{3}\right)^4 x^4\left(\frac{3}{2}\right)^5 y^5$$

$$= \frac{9\times 8\times 7\times 6}{1\times 2\times 3\times 4}\times\frac{2^4}{3^4}\times\frac{3^5}{2^5}x^4y^5 = 27\times 7x^4y^5 = 189x^4y^5$$

---

9. **4, 6, 9, 3, 10, 13, 2 అనే దత్తాంశానికి మధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.**

Sol: ఇచ్చిన దత్తాంశం: 4, 6, 9, 3, 10, 13, 2. దాని ఆరోహణ క్రమం: 2,3,4,6,9,10,13.

పరిశీలనల సంఖ్య n = 7 బేసి

$\therefore$ దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతం $\Rightarrow$ M=6

మధ్యగతం నుండి పరిశీలనల విచలనాలు:

2–6= –4; 3–6= –3; 4–6= –2; 6–6=0; 9–6=3;10–6=4; 13–6=7

కావున విచలనాల పరమ మూల్యాలు: 4, 3, 2, 0, 3, 4, 7

$\therefore$ మధ్యగతం నుంచి $M.D = \dfrac{\Sigma|x_i - M|}{7} = \dfrac{4+3+2+0+3+4+7}{7} = \dfrac{23}{7} = 3.29$

$\therefore$ M.D from Median is $M.D = \dfrac{\Sigma|x_i - M|}{7} = \dfrac{4+3+2+0+3+4+7}{7} = \dfrac{23}{7} = 3.29$

BABY BULLET-Q

10. **ఒక ద్విపద విభాజనం అంకమధ్యమం, విస్తృతి వరసగా 4,3. ఆ విభాజనాన్ని సంధానించి $P(X\geq 1)$ని కనుక్కోండి.**

Sol: దత్తాంశం నుండి అంకమధ్యమం $np = 4$, విస్తృతి $npq = 3$

ఇప్పుడు, $(np)q = 3 \Rightarrow (4)q = 3 \Rightarrow q = \frac{3}{4} \Rightarrow p = 1-q = 1-\frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$

$np = 4 \Rightarrow n\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \Rightarrow n = 4(4) = 16$

$\therefore$ $n=16$, $q=3/4$ మరియు $p=1/4$

ద్విపద విభాజనం $P(X=r) = {}^{n}C_r q^{n-r}.p^r = {}^{16}C_r \left(\frac{3}{4}\right)^{16-r}.\left(\frac{1}{4}\right)^r$

$\therefore P(X\geq 1) = 1-P(X=0) = 1-q^n = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^n = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^{16}$

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-బి

11. $x+iy=\dfrac{1}{1+\cos\theta+i\sin\theta}$ అయిన $4x^2-1=0$ అని చూపండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $x+iy=\dfrac{1}{(1+\cos\theta)+i\sin\theta}=\dfrac{1}{(2\cos^2\frac{\theta}{2})+i(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})}$

$$\Rightarrow x+iy=\frac{1}{(2\cos\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}}{(2\cos\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2})}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}}{\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}}{\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)(1)}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}-\frac{i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\tan\frac{\theta}{2}$$

వాస్తవ భాగాలను సమానం చేయగా $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 2x=1\Rightarrow (2x)^2=1^2\Rightarrow 4x^2=1\Rightarrow 4x^2-1=0$

---

12. వాస్తవమైన $\dfrac{x}{x^2-5x+9}$ సమాసము 1 మరియు $\dfrac{-1}{11}$ మధ్య ఉండునని చూపుము.

Sol: $y=\dfrac{x}{x^2-5x+9}\Rightarrow y(x^2-5x+9)=x\Rightarrow yx^2-5yx+9y-x=0$

$\Rightarrow yx^2-(5y+1)x+9y=0$ .... (1)

(1) x లో వర్గసమీకరణం మరియు దాని మూలాలు వాస్తవం.

$\therefore \Delta=b^2-4ac\geq 0$

$\Rightarrow (5y+1)^2-4(y)(9y)\geq 0$

$\Rightarrow (25y^2+10y+1)-36y^2\geq 0$

$\Rightarrow -11y^2+10y+1\geq 0$

$\Rightarrow 11y^2-10y-1\leq 0$

$\Rightarrow 11y^2-11y+y-1\leq 0\Rightarrow 11y(y-1)+(y-1)\leq 0$

$\Rightarrow (11y+1)(y-1)\leq 0$

$\Rightarrow y\in\left[-\dfrac{1}{11},1\right]\Rightarrow \dfrac{-1}{11}\leq y\leq 1$

$\therefore$ ఇచ్చిన సమాసం $\dfrac{-1}{11}$ మరియు 1 ల మధ్య ఉండును.

BABY BULLET-Q

13. MASTER అనే పదంలోని అక్షరాలతో ఏర్పడే పదాలన్నింటినీ నిఘంటువులోని క్రమంలో అమరిస్తే, MASTER పదం కోటిని కనుక్కోండి.

Sol : MASTER అనే పదములోని అక్షరాల నిఘంటువు యొక్క క్రమం

A,E,M,R,S,T

A తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య ------ = 5! = 120

E తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య ------ = 5! = 120

MAE తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య --- = 3! = 6

MAR తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య --- = 3! = 6

MASE తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య -- = 2! = 2

MASR తో మొదలయ్యే పదాల సంఖ్య -- = 2! = 2

తర్వాత పదం MASTER = 1! = 1

$\therefore$ MASTER అనే పదం యొక్క కోటి = 2(120) + 2(6) + 2(2) + 1

= 240 + 12 + 4 + 1 = 257

---

14. $^{34}C_5 + \sum_{r=0}^{4} {}^{(38-r)}C_4$ **సూక్ష్మీకరించండి.**

Sol: $G.E. = \sum_{r=0}^{4} {}^{(38-r)}C_4 + {}^{34}C_5$

$= \left[{}^{38}C_4 + {}^{37}C_4 + {}^{36}C_4 + {}^{35}C_4 + {}^{34}C_4\right] + {}^{34}C_5$

$= \left[{}^{38}C_4 + {}^{37}C_4 + {}^{36}C_4 + {}^{35}C_4\right] + \left[{}^{34}C_4 + {}^{34}C_5\right]$

$= \left[{}^{38}C_4 + {}^{37}C_4 + {}^{36}C_4\right] + \overline{{}^{35}C_4 + {}^{35}C_5}$

$[\because {}^{n}C_{r-1} + {}^{n}C_r = {}^{n+1}C_r]$ $= \left[{}^{38}C_4 + {}^{37}C_4\right] + \overline{{}^{36}C_4 + {}^{36}C_5}$

$= \left[{}^{38}C_4\right] + \overline{{}^{37}C_4 + {}^{37}C_5} = {}^{38}C_4 + {}^{38}C_5 = {}^{39}C_5$

BABY BULLET-Q

15. $\dfrac{x^3}{(x-1)(x+2)}$ **ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టండి.**

Sol: ఇక్కడ లవం తరగతి 3 ≥ హారం తరగతి 2. కావున ఇది అపక్రమ ప్రమేయం.

$(x-1)(x+2)=x^2+x-2.$

x^3 ను x^2+x-2 చే భాగించగా $\dfrac{x^3}{(x-1)(x+2)}=(x-1)+\dfrac{3x-2}{x^2+x-2}$

ఇప్పుడు, $\dfrac{3x-2}{x^2+x-2}=\dfrac{3x-2}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}=\dfrac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$

$\Rightarrow A(x+2)+B(x-1)=3x-2$ ....**(1)**

x= 1 ను (1)లో వ్రాయగా A(3)+B(0) =3–2 $\Rightarrow 3A=1\Rightarrow A=\dfrac{1}{3}$

x =–2 ను (1)లో వ్రాయగా A(0)+B(–3)= 3(–2)–2 $\Rightarrow -3B=-8\Rightarrow B=\dfrac{8}{3}$

$$\Rightarrow \frac{3x-2}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{1}{3(x-1)}+\frac{8}{3(x+1)}$$

$$\therefore \frac{x^3}{(x-1)(x+2)}=x-1+\frac{1}{3(x-1)}+\frac{8}{3(x+1)}$$

---

16. **ఒక గుర్రపుపందెంలో A,B,C అనే మూడు గుర్రాలు పోటీపడుతున్నాయి. వీటిలో A గెలిచే సంభావ్యత B గెలుపు సంభావ్యతకు రెట్టింపు, B గెలిచే సంభావ్యత C గెలుపు సంభావ్యతకు రెట్టింపు అయితే A,B,C ల గెలుపు సంభావ్యతలెంత?**

Sol: A, B, C అనే గుర్రాలు పందెమును గెలిచే సంభావ్యతలు వరుసగా A, B, C అనుకొనుము.

దత్తాంశమునుండి P(A) = 2P(B) and P(B) = 2P(C)

ఇప్పుడు, P(A) = 2P(B) = 2[2P(C)] = 4P(C)

కావున, $P(A\cup B\cup C)$ = P(A)+P(B)+P(C)   [Q A,B,C లు వియుక్త సమితులు]

⇒P(S) = 4P(C)+2P(C)+P(C)   [Q A,B,C లు మాత్రమే పందెంలో కలవు⇒$A\cup B\cup C=S$]

⇒1=7P(C) ⇒P(C) = 1/7   [Q P(S)=1]

$\therefore P(A)=4P(C)=4\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{4}{7}$; $P(B)=2P(C)=2\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{2}{7}$ ∴ P(A)=4/7, P(B) =2/7, P(C) =1/7

BABY BULLET-Q

17. 75% సందర్భాల్లో A అనే వ్యక్తి నిజం మాట్లాడతాడు, B అనే వ్యక్తి 80% సందర్భాల్లో నిజం మాట్లాడతాడు. ఒక సంఘటన గురించి వారు చెప్పే విషయం పరస్పరం విభేదించడానికి సంభావ్యత ఎంత?

Sol: A,B లు నిజం చెప్పే ఘటనలు వరసగా A,B లు అనుకుందాం.

$$P(A)=\frac{75}{100}=\frac{3}{4};\ P(B)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$$

$$\therefore P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4};\ \ P(\bar{B})=1-P(B)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$$

A,B లు పరస్పరము విభేదించే ఘటన E అనుకొనుము.

$$\Rightarrow P(E)=P\left[(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)\right]=P(A\cap\bar{B})+P(\bar{A}\cap B)$$

$$=P(A)P(\bar{B})+P(\bar{A})P(B)\ [\because A,B \text{ లు స్వతంత్ర ఘటనలు}]\ =\frac{3}{4}.\frac{1}{5}+\frac{1}{4}.\frac{4}{5}=\frac{7}{20}$$

BABY BULLET-Q

సెక్షన్-సి

18. $x^2-2x+4=0$ యొక్క మూలాలు α,β అయిన $\alpha^n+\beta^n=2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ అని చూపండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $x^2-2x+4=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-4(1)(4)}}{2(1)}=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{2}=\frac{2\pm 2i\sqrt{3}}{2}=1\pm i\sqrt{3}$

ఇప్పుడు $1+i\sqrt{3}$ యొక్క మాప-ఆయామ రూపంను కనుగొందాం.

$x+iy=1+i\sqrt{3} \Rightarrow x=1,\ y=\sqrt{3} \quad \therefore\ r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2.$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\tan\frac{\pi}{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

$1+i\sqrt{3}$ యొక్క మాప ఆయామ రూపం $r(\cos\theta+i\sin\theta)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow (1+i\sqrt{3})^n=\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^n$$

$=(2)^n\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n=2^n\left(\cos n\frac{\pi}{3}+i\sin n\frac{\pi}{3}\right)$ ..... (1) (డీమోయర్ సిద్ధాంతం నుండి)

అదేవిధంగా, $(1-i\sqrt{3})^n=2^n\left(\cos n\frac{\pi}{3}-i\sin n\frac{\pi}{3}\right)$ ..... (2)

(1) & (2)లను కలుపగా $\alpha^n+\beta^n=(1+i\sqrt{3})^n+(1-i\sqrt{3})^n$

$$=2^n\left(\left(\cos n\frac{\pi}{3}+i\sin n\frac{\pi}{3}\right)+\left(\cos n\frac{\pi}{3}-i\sin n\frac{\pi}{3}\right)\right)=2^n\left(2\cos\frac{n\pi}{3}\right)=2^{n+1}.\cos\frac{n\pi}{3}$$

BABY BULLET-Q

19. $18x^3+81x^2+121x+60=0$ సమీకరణం ఒక మూలం తక్కిన రెండు మూలాల మొత్తములో సగమైతే ఆ సమీకరణాన్ని సాధించండి.

Sol: α,β,γ లు $18x^3+81x^2+121x+60=0$ సమీకరణం యొక్క మూలాలు అనుకొనుము.

దత్త సమీకరణం ఒక మూలం మిగిలిన రెండు మూలాల మొత్తంలో సగం కాబట్టి $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$

$\Rightarrow \alpha, \beta, \gamma$ లు A.P ఉన్నట్లు.

$\therefore$ $\alpha=a-d, \beta=a, \gamma=a+d$ గా తీసుకుందాం.

ఇచ్చిన సమీకరణం $18x^3+81x^2+121x+60=0$

$$S_1=\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}\Rightarrow(a-d)+a+(a+d)=-\frac{81}{18}=-\frac{9}{2}\Rightarrow 3a=-\frac{9}{2}\Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

$$S_3=\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}\Rightarrow(a-d)(a)(a+d)=-\frac{60}{18}=-\frac{10}{3}\Rightarrow a(a^2-d^2)=-\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2-d^2\right)=-\frac{10}{3}\Rightarrow\frac{9}{4}-d^2=\frac{10}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{20}{9}\Rightarrow d^2=\frac{9}{4}-\frac{20}{9}=\frac{81-80}{36}=\frac{1}{36}\Rightarrow d=\frac{1}{6}$$

ఇప్పుడు $a-d=-\frac{3}{2}-\frac{1}{6}=\frac{-9-1}{6}=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}$ మరియు $a+d=-\frac{3}{2}+\frac{1}{6}=\frac{-9+1}{6}=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$

$\therefore$ దత్త సమీకరణం మూలాలు $a-d, a, a+d\Rightarrow -\frac{5}{3},-\frac{3}{2},-\frac{4}{3}$

BABY BULLET-Q

20. $\left(ax^2+\frac{1}{bx}\right)^{11}$ **ద్విపద విస్తరణలో x^{10} గుణకం, $\left(ax-\frac{1}{bx^2}\right)^{11}$ ద్విపద విస్తరణలోని x^{-10} గుణకానికి సమానం అయిన a,b ల మధ్య సంబంధాన్ని కనుగొనుము. ఇక్కడ a,b లు వాస్తవ సంఖ్యలు**

Sol: $\left(ax^2+\frac{1}{bx}\right)^{11}$ విస్తరణలో $T_{r+1}={}^{11}C_r(ax^2)^{11-r}\left(\frac{1}{bx}\right)^r$

$$={}^{11}C_r\frac{a^{11-r}}{b^r}.x^{22-3r} \quad ....(1)$$

$22-3r=10$ అయిన $3r=22-10 \Rightarrow \cancel{3}r=\cancel{12} \Rightarrow r=4$

(1) నుండి, x^{10} గుణకము ${}^{11}C_4\frac{a^{11-4}}{b^4}={}^{11}C_4\frac{a^7}{b^4}$ ....(2)

$\left(ax-\frac{1}{bx^2}\right)^{11}$ విస్తరణలో సాధారణ పదం $T_{r+1}={}^{11}C_r(ax)^{11-r}\left(-\frac{1}{bx^2}\right)^r$

$$=(-1)^r\,{}^{11}C_r\frac{a^{11-r}}{b^r}x^{11-3r} \quad ....(3)$$

$11-3r=-10$ అయిన $\cancel{3}r=\cancel{21} \Rightarrow r=7$

(3) నుండి, x^{-10} గుణకము $(-1)^7\,{}^{11}C_7\frac{a^{11-7}}{b^7}=-{}^{11}C_7.\frac{a^4}{b^7}$ ....(4)

దత్తాంశం ప్రకారం రెండు గుణకాలు సమానము

∴ (2), (4) ల నుండి

$$\cancel{{}^{11}C_4}\frac{a^7}{b^4}=-\cancel{{}^{11}C_7}\frac{a^4}{b^7}\Rightarrow\frac{a^7}{b^4}=-\frac{a^4}{b^7}\quad(\because {}^{11}C_4={}^{11}C_7)$$

$$\Rightarrow a^3=-\frac{1}{b^3}\Rightarrow a^3b^3=-1\Rightarrow ab=-1$$

BABY BULLET-Q

21. $x = \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \frac{1.3.5.7}{3.6.9.12} + \ldots\ldots$ అయిన $9x^2+24x = 11$ అని నిరూపించండి.

Sol: దత్తాంశం నుండి $x = \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \frac{1.3.5.7}{3.6.9.12} + \ldots\ldots = \frac{1.3}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1.3.5.7}{4!}\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \ldots$

ఇరువైపులా $1+\frac{1}{3}$ ను కలుపగా $1+\frac{1}{3}+x = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1.3}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots\ldots$

పై శ్రేణిని $1 + \frac{p}{1!}\left(\frac{y}{q}\right) + \frac{p(p+q)}{2!}\left(\frac{y}{q}\right)^2 + \ldots\ldots = (1-y)^{-p/q}$ తో పోల్చగా

$p = 1, p+q = 3 \Rightarrow 1+q = 3 \Rightarrow q = 2$

మరియు $\frac{y}{q} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{q}{3} = \frac{2}{3}$

$\therefore 1 + \frac{1}{3} + x = (1-y)^{-p/q} = \left(1-\frac{2}{3}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2} = (3)^{1/2} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{4}{3} + x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3} - \frac{4}{3} = \frac{3\sqrt{3}-4}{3} = \frac{3\sqrt{3}-4}{3} \Rightarrow 3x = 3\sqrt{3} - 4 \Rightarrow 3x + 4 = 3\sqrt{3}$

$\Rightarrow (3x+4)^2 = (3\sqrt{3})^2 \Rightarrow 9x^2 + 24x + 16 = 27 \Rightarrow 9x^2 + 24x = 11$

---

22. ఈ కింది అవిచ్ఛిన్న పౌనఃపున్య విభాజనానికి విస్తృతి, ప్రామాణిక విచలనాలను గణనం చేయండి.

x_i	4	8	11	17	20	24	32
f_i	3	5	9	5	4	3	1

Sol: ఇక్కడ $N = \Sigma f_i = 3+5+9+5+4+3+1 = 30$

మరియు $\Sigma f_i x_i = 4(3)+8(5)+11(9)+17(5)+20(4)+24(3)+32(1) = 420$ $\therefore \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} = \frac{420}{30} = 14$

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
4	3	12	–10	100	300
8	5	40	–6	36	180
11	9	99	–3	9	81
17	5	85	3	9	45
20	4	80	6	36	144
24	3	72	10	100	300
32	1	32	18	324	324
		$\Sigma f_i x_i = 420$			$\Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2 = 1374$

విస్తృతి $(\sigma^2) = \frac{1}{N}\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{30}(1374) = 45.8$.

ప్రామాణిక విచలనం $\sigma = \sqrt{45.8} = 6.77$

BABY BULLET-Q

23. బేయీ సిద్ధాంతాం ప్రవచించి, నిరూపించండి.

Sol: **ప్రవచనం:** శాంపుల్ ఆవరణ S లో $E_1, E_2 \ldots E_n$ లు 'n' పరస్పర వివర్జిత, పూర్ణ ఘటనలు.

వాటిలో ఏదైనా ఘటన A మరియు $P(A) \neq 0$ లు అనుకుంటే అప్పుడు $P(E_k \mid A) = \dfrac{P(E_k)P(A/E_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(Ei).P(A/E_i)}$

నిరూపణ: నియత సంభావ్యత నిర్వచనం ప్రకారం $P(E_k \mid A) = \dfrac{P(E_k \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(E_k).P(A \mid E_k)}{P(A)}$ ...(1)

దత్తాంశం ప్రకారం $E_1, E_2 \ldots E_n$ లు పరస్పర వివర్జిత, పూర్ణ ఘటనలు కావున

$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$ మరియు $A \cap E_1, A \cap E_2, \ldots. A \cap E_n$ లు పరస్పర వియుక్తాలు అగును. అనగా $A \cap E_i = \phi$

ఇప్పుడు, $P(A) = P(S \cap A) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cap A\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (E_i \cap A)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i \cap A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A \mid E_i)$

$\therefore$ (1) నుండి, $P(E_k \mid A) = \dfrac{P(E_k)P(A \mid E_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A \mid E_i)}$

---

24. ఒక యాదృచ్ఛిక చలరాశి X సంభావ్యతా విభాజనాన్ని క్రింద ఇచ్చాం.

$X=x_i$	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	k	2k	3k	4k	5k

అయిన k విలువను, X సగటు, విస్తృతులను కనుగొనుము.

Sol: $\sum P(X = x_i) = 1$ అని తెలుసు

$\Rightarrow k + 2k + 3k + 4k + 5k = 1 \Rightarrow 15k = 1 \quad \Rightarrow k = 1/15$

X సగటు $\mu = \sum_{i=1}^{5} x_i.P(X = x_i)$

$= 1(k) + 2(2k) + 3(3k) + 4(4k) + 5(5k) = k(1+4+9+16+25) \quad = k(55) = \frac{1}{15}(55) = \frac{55}{15} = \frac{11}{3}$

X విస్తృతి $\sigma^2 = \Sigma x_i^2.P(X = x_i) - \mu^2 = 1(k) + 4(2k) + 9(3k) + 16(4k) + 25(5k) - \left(\frac{11}{3}\right)^2$

$= k(1 + 8 + 27 + 64 + 125) - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{1}{15}(225) - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = 15 - \frac{121}{9} = \frac{14}{9}$

BABY BULLET-Q