JR MATHS-1B (TM)

Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH-2019 (AP)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2019(AP)

Time : 3 Hours

గణితశాస్త్రం-1B

Max.Marks : 75

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: 10 x 2=20

1. $y = \sqrt{3}x - 4$ అనే సరళరేఖ Y-అక్షముతో చేసే కోణము కనుగొనుము.
2. $3x+4y-3 = 0$ మరియు $6x+8y-1 = 0$ అనే సమాంతర రేఖల మధ్య దూరము కనుగొనుము.
3. $(5,-1,7), (x,5,1)$ బిందువుల మధ్య దూరం 9 యూనిట్లయితే x విలువలను కనుక్కోండి.
4. $4x-4y+2z+5=0$ అనే తలము యొక్క సమీకరణంను అంతరఖండరూపంలో వ్రాయుము.
5. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{e^{3+x}-e^3}{x}$ ను గణించుము.
6. $\underset{x\to 3}{\text{Lt}} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-6x+9}$ ను గణించుము.
7. $y=\text{Tan}^{-1}(\log x)$ అయిన dy/dx ను కనుగొనుము.
8. $y = \dfrac{2x+3}{4x+5}$ అయిన y'' ను కనుగొనుము.
9. చలరాశి y కు సాపేక్ష దోషం, దోష శాతం నిర్వచించండి.
10. $[-2, 2]$ పై f ప్రమేయాన్ని $f(x) = x^2$ గా నిర్వచిస్తే f యొక్క పరమ అంత్య విలువలను కనుక్కోండి.

సెక్షన్-బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. 5 x 4 =20

11. $A(5,3), B(3,-2)$ లు2 బిందువులు P అను బిందువు ΔPAB వైశాల్యం 9 చ.యూ. వుండేటట్లు చలిస్తుంటే P బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.
12. అక్షాల సమాంతర పరివర్తన ద్వారా మూల బిందువును $(3,-4)$ కు మార్చినపుడు, తద్వారారూపాంతరం చెందిన సమీకరణం $x^2+y^2=4$ అయితే వక్రం యొక్క మూల సమీకరణం కనుక్కోండి.
13. $ax+by+c=0, bx+cy+a=0, cx+ay+b=0$ లు అనుషక్తాలైన $a^3+b^3+c^3=3abc$ అని చూపండి.
14. $\underset{x\to a}{\text{Lt}} \left(\dfrac{x\sin a - a\sin x}{x-a}\right)$ ను గణించుము.
15. ప్రాథమిక సూత్రాన్ని ఉపయోగించి cotx యొక్క అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.
16. $\sqrt[3]{999}$ యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువను కనుక్కోండి.
17. ఒక సరళరేఖ వెంబడి చలించే ఒక కణమునకు స్థానభ్రంశం-కాలముల మధ్య సంబంధం $s=t^3-9t^2+24t-18$. దాని వేగము ఎప్పుడు, ఎక్కడ శూన్యమగును.

సెక్షన్-సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. 5 x 7 = 35

18. $ax+by+c=0$ సరళరేఖ దృష్ట్యా $P(x_1,y_1)$ బిందువు ప్రతిబింబం $Q(h,k)$ అయిన $(h-x_1) : a=(k-y_1):b = -2(ax_1+by_1+c) : (a^2+b^2)$.
19. $S=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ సమీకరణం ఒక సమాంతర రేఖాయుగ్మాన్ని సూచిస్తే (i) $h^2 = ab$ (ii) $af^2 = bg^2$ (iii) ఆ సమాంతర రేఖల మధ్య దూరం $2\sqrt{\dfrac{g^2-ac}{a(a+b)}}$ or $2\sqrt{\dfrac{f^2-bc}{b(a+b)}}$ అని చూపండి.
20. $2x^2-2xy+3y^2+2x-y-1=0$ వక్రం $x+2y=k$ రేఖల ఖండన బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపే రేఖలు పరస్పరం లంబాలయితే k విలువ కనుక్కోండి.
21. సమాంతరంగా లేని రెండు రేఖల దిక్ కొసైన్లు $l+m+n=0, l^2+m^2-n^2=0$ లను తృప్తి పరిస్తే, ఆ రేఖల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.
22. $y = x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$ అయిన $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{a^2+x^2}$ అని చూపండి.
23. $ax^2 + by^2 = 1$ మరియు $a_1x^2 + b_1y^2 = 1$ అనే వక్రములు లంబముగా ఖండించుకొనే నియమంను రాబట్టుము.
24. $f(x) = \cos 4x \ \forall\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ కి స్థానిక అంత్య బిందువులు, స్థానిక అంత్య విలువలను కనుక్కోండి.

IPE AP MARCH-2019
SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. **$y = \sqrt{3}x - 4$ అనే సరళరేఖ Y-అక్షముతో చేసే కోణము కనుగొనుము.**

Sol: దత్త సరళరేఖా రూపము $y=\sqrt{3}x-4$. ఇది $y = mx + c$ రూపంలో కలదు $\Rightarrow$ వాలు $m=\sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$ $\Rightarrow$ X--అక్షముతో చేసే కోణము $\theta = 60^\circ$

$\therefore$ Y-అక్షముతో చేసే కోణము $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

---

2. **3x+4y–3 = 0 మరియు 6x+8y–1=0 అనే సమాంతర రేఖల మధ్య దూరము కనుగొనుము.**

Sol: 3x+4y–3=0 ను ఇలా వ్రాయవచ్చు

6x+8y–6 = 0 ....(1) మరో రేఖ 6x+8y–1=0 .....(2)

$\therefore$(1) &(2) సమాంతర రేఖల మధ్య దూరం $\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|-6+1|}{\sqrt{6^2+8^2}} = \dfrac{|-5|}{\sqrt{36+64}} = \dfrac{5}{\sqrt{100}} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

---

3. **(5,–1,7) , (x,5,1) ల మధ్యదూరం 9 యూనిట్లు అయితే x ను కనుక్కోండి.**

Sol: A=(5,–1,7) మరియు B=(x,5,1) అనుకొనుము.

దత్తాంశము నుండి AB=9 $\Rightarrow \sqrt{(5-x)^2+(-1-5)^2+(7-1)^2} = 9$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా $(5-x)^2+36+36=81 \Rightarrow (5-x)^2+72=81 \Rightarrow (5-x)^2 = 9$

$\Rightarrow 5-x=\pm 3 \Rightarrow x = 5\pm 3 \Rightarrow x = 8 \text{ or } 2$

---

4. **4x–4y+2z+5=0 అనే తలము యొక్క సమీకరణంను అంతరఖండరూపంలో వ్రాయుము.**

Sol: ఇచ్చిన తలం యొక్క సమీకరణం 4x–4y+2z+5=0$\Rightarrow$ 4x–4y+2z = –5

$\Rightarrow \dfrac{4x}{-5}+\dfrac{-4y}{-5}+\dfrac{2z}{-5}=1 \Rightarrow \dfrac{x}{\left(\frac{-5}{4}\right)}+\dfrac{y}{\left(\frac{5}{4}\right)}+\dfrac{z}{\left(\frac{-5}{2}\right)}=1$ ఇది $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ అంతరఖండం రూపంలో ఉంది.

---

5. **$\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{e^{3+x}-e^3}{x}$ ను గణించుము.**

A: $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{e^{3+x}-e^3}{x} = \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{e^3(e^x-1)}{x} = e^3 \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{e^x-1}{x} = e^3(1) = e^3$

6. $\displaystyle \mathop{Lt}_{x\to 3}\frac{x^2+3x+2}{x^2-6x+9}$ ను గణించుము.

A: $\displaystyle \mathop{Lt}_{x\to 3}\frac{x^2+3x+2}{x^2-6x+9}=\mathop{Lt}_{x\to 3}\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}=\frac{9+9+2}{(3-3)^2}=\infty$

---

7. $y=Tan^{-1}(\log x)$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ను కనుగొనుము

A : దత్తాంశం నుండి $y=Tan^{-1}(\log x)$, అయిన $\displaystyle \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}Tan^{-1}(\log x)$

$$=\frac{1}{1+(\log x)^2}\frac{d}{dx}(\log x)=\left(\frac{1}{1+(\log x)^2}\right)\frac{1}{x}$$

---

8. $\displaystyle y=\frac{2x+3}{4x+5}$ అయిన $\frac{dy}{dx}$ ను కనుగొనుము.

A: సూత్రం: $\displaystyle \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v.\frac{d}{dx}(u)-u.\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(4x+5)\frac{d}{dx}(2x+3)-(2x+3).\frac{d}{dx}(4x+5)}{(4x+5)^2}=\frac{(4x+5)(2)-(2x+3)(4)}{(4x+5)^2}$$

$$=\frac{\cancel{8x}+10-\cancel{8x}-12}{(4x+5)^2}=\frac{-2}{(4x+5)^2}$$

---

9. చలరాశి y కు సాపేక్ష దోషం, దోష శాతం నిర్వచించండి.

A: y=f(x) లో x యొక్క దోషము Δx అయిన (i) Δy ను y లోని దోషము

(ii) $\frac{\Delta y}{y}$ ను y లోని సాపేక్ష దోషము (iii) $\frac{\Delta y}{y}x100$ ను y లోని దోషశాతము అందురు.

---

10. [– 2, 2] పై f ప్రమేయాన్ని $f(x)=x^2$ గా నిర్వచిస్తే f యొక్క పరమ అంత్య విలువలను కనుక్కోండి.

A: దత్తాంశం నుండి $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$. ఇప్పుడు $f'(x)=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$

$[-2,2]$మీద $f(x)=x^2$ అవిచ్ఛిన్నము . ఇప్పుడు $f(2)=2^2=4;\ f(-2)=(-2)^2=4$

మరియు $f(0)=0^2=0$

కావున కనిష్ఠ విలువ 0. గరిష్ట విలువ 4.

$\therefore$ పరమ అంత్య విలువలు= $\{0,4\}$

సెక్షన్-బి

11. A(5,3), B(3,–2) లు రెండు బిందువులు P అను బిందువు ΔPAB వైశాల్యం 9 చ.యూ. వుండేటట్లు చలిస్తుంటే P బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

Sol : ★ P(x,y) బిందుపథ బిందువు.

• A=(5,3), B=(3,–2) లు దత్త బిందువులు.

దత్త నియమం నుండి:

ΔPAB యొక్క వైశాల్యం = 9 చ.యూ.

★ $\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_2 & x_1-x_3 \\ y_1-y_2 & y_1-y_3 \end{vmatrix}=9$

★ $\Rightarrow \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5-3 & 5-x \\ 3+2 & 3-y \end{vmatrix}=9$

• $\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 5-x \\ 5 & 3-y \end{vmatrix}=2(9)$

• $\Rightarrow |2(3-y)-5(5-x)|=18$

• $\Rightarrow |6-2y-25+5x|=18$

• $\Rightarrow |5x-2y-19|=18$

★ $\Rightarrow 5x-2y-19=\pm 18$

• $\Rightarrow 5x-2y-19=18 \text{ (or) } 5x-2y-19=-18$

• $\Rightarrow 5x-2y-37=0(\text{or})5x-2y-1=0$

★ $\Rightarrow (5x-2y-37)(5x-2y-1)=0$

$\therefore$ P బిందుపథం $(5x-2y-37)(5x-2y-1)=0$

12. అక్షాల సమాంతర పరివర్తన ద్వారా మూల బిందువును (3,–4) కు మార్చినపుడు, తద్వారా రూపాంతరం చెందిన సమీకరణం $x^2+y^2=4$ అయితే వక్రం యొక్క మూల సమీకరణం కనుక్కోండి.

A: ★ ఇచ్చిన రూపాంతర సమీకరణము $X^2 + Y^2 = 4$.........(1)

- నూతన ఆదిబిందువు$(h, k) = (3, -4)$,

★ $X = x - h \Rightarrow X = x - 3$

★ $Y = y - k \Rightarrow Y = y + 4$

- (1) నుండి కావలసిన మూల సమీకరణం $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 0$
- $\Rightarrow (x^2 + 9 - 6x) + (y^2 + 16 + 8y) = 0$
- $\Rightarrow -18+12y+17x-34-7y+21-11=0$
- $\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0.$

---

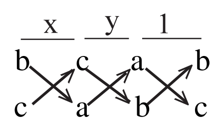
13. $ax+by+c=0, bx+cy+a=0, cx+ay+b=0$ అనే సరళరేఖలు అనుషక్తాలైతే $a^3+b^3+c^3=3abc$ అనిచూపండి.

Sol: దత్త రేఖలు $ax+by+c=0$ ....(1)

$bx+cy+a=0$ ....(2)

(1), (2) లను సాధించగా ఖండన బిందువు P వచ్చును.

$$\frac{x}{ba-(c)(c)} = \frac{y}{cb-(a)(a)} = \frac{1}{ac-(b)(b)}$$



$$\Rightarrow \frac{x}{ab-c^2} = \frac{y}{bc-a^2} = \frac{1}{ca-b^2} \Rightarrow x = \frac{ab-c^2}{ca-b^2} \text{ and } y = \frac{bc-a^2}{ca-b^2}$$

$\therefore$ ఖండన బిందువు $P=\left(\frac{ab-c^2}{ca-b^2}, \frac{bc-a^2}{ca-b^2}\right)$

కాని $P\left(\frac{ab-c^2}{ca-b^2}, \frac{bc-a^2}{ca-b^2}\right)$ బిందువు $cx+ay+b=0$ మీద ఉండును. [$\because$ దత్త రేఖలు అనుషక్తాలు]

$$\Rightarrow c\left(\frac{ab-c^2}{ca-b^2}\right) + a\left(\frac{bc-a^2}{ca-b^2}\right) + b = 0 \Rightarrow c(ab-c^2) + a(bc-a^2) + b(ca-b^2) = 0$$

$$\Rightarrow cab - c^3 + abc - a^3 + bca - b^3 = 0 \Rightarrow 3abc = a^3 + b^3 + c^3$$

కావున $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ అని నిరూపించబడినది.

14. $\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}}\left(\dfrac{x\sin a - a\sin x}{x-a}\right)$ ను కనుగొనుము.

A: $\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}} \dfrac{x\sin a - a\sin x}{x-a} = \underset{x\to a}{\mathrm{Lt}} \dfrac{(x\sin a - a\sin a)-(a\sin x - a\sin a)}{x-a}$ ($\because$ Subtract and Add asina)

$$= \underset{x\to a}{\mathrm{Lt}} \frac{\sin a(x-a)-a(\sin x-\sin a)}{x-a} = \underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\left(\frac{\cancel{(x-a)}\sin a}{\cancel{x-a}}\right) - a\underset{x\to a}{\mathrm{Lt}}\left(\frac{\sin x - \sin a}{x-a}\right)$$

$$= \underset{x\to a}{\mathrm{Lt}} \sin a - a \underset{x\to a}{\mathrm{Lt}} \frac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$$

$$= \sin a - 2a \underset{x\to a}{\mathrm{Lt}} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) . \underset{x\to a}{\mathrm{Lt}} \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{(x-a)} = \sin a - \cancel{2}a\cos\left(\frac{a+a}{2}\right).\frac{1}{\cancel{2}} = \sin a - a\cos a$$

---

15. ప్రాథమిక సూత్రాన్ని ఉపయోగించి **cotx** యొక్క అవకలజాన్ని కనుక్కోండి.

A: $f(x) = \cot x$, అనుకుంటే

$f(x+h) = \cot(x+h)$

ప్రాథమిక సూత్రం నుండి

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\cot(x+h)-\cot(x)}{h} = \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{1}{h}\left[\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)} - \frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

$$= \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{1}{h}\left[\frac{\cos(x+h).\sin x - \sin(x+h).\cos x}{\sin(x+h).\sin x}\right]$$

$$= \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{1}{h}\left[\frac{-\sin((x+h)-x)}{\sin(x+h)\sin x}\right] \qquad [\because \cos A\sin B - \sin A\cos B = -\sin(A-B)]$$

$$= \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{1}{h}\left[\frac{-\sinh}{\sin(x+h)\sin x}\right]$$

$$= \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}}\left(\frac{-\sinh}{h}\right). \underset{h\to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{1}{\sin(x+h).\sin x}$$

$$= -1\left(\frac{1}{\sin x.\sin x}\right) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

16. $\sqrt[3]{999}$ యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువను కనుక్కోండి.

A: దత్తాంశం నుండి $\sqrt[3]{999} = \sqrt[3]{1000-1}$

$\therefore$ తెలిసిన విలువ $x = 1000$ మరియు $\Delta x = -1$.

Let, $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

సూత్రం: $f(x+\Delta x) = [f(x) + f'(x)\Delta x]_{\text{తెలిసిన } x \text{ వద్ద}}$

$$\therefore \sqrt[3]{999} \cong \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3x^{2/3}}\Delta x$$

$$= \sqrt[3]{1000} + \frac{1}{3(1000)^{2/3}}(-1)$$

$$= 10 + \frac{1}{3(10^3)^{2/3}}(-1) = 10 - \frac{1}{3(10^2)} = 10 - \frac{1}{3(100)} = 10 - \frac{1}{300} = 10 - 0.0033 = 9.9967$$

---

17. ఒక సరళరేఖ వెంబడి చలించే ఒక కణమునకు స్థానభ్రంశం-కాలముల మధ్య సంబంధం $s=t^3-9t^2+24t-18$. దాని వేగము ఎప్పుడు, ఎక్కడ శూన్యమగును.

Sol : దత్తాంశం నుండి $s=t^3-9t^2+24t-18$

$\Rightarrow$ వేగం $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t^2 - 6t + 8) = 3(t-2)(t-4)$

వేగము సున్నా అయిన $(t-2)(t-4)=0 \Rightarrow t = 2$ లేదా 4

$\therefore$ 2 సెకన్లు మరియు 4 సెకన్లు తర్వాత వేగము సున్నా అగును.

$t=2$ అయిన $s=t^3-9t^2+24t-18 = 2^3-9(2^2)+24(2)-18=8-36+48-18=56-54=2$

$t=4$ అయిన $s=t^3-9t^2+24t-18 = 4^3-9(4^2)+24(4)-18=64-144+96-18=160-162=-2$

$\therefore$ కణము తొలిగా ఉన్న స్థానమునకు ఇరువైపులా 2 యూనిట్ల దూరములో ఉండును.

సెక్షన్-సి

18. ax+by+c=0 సరళరేఖ దృష్ట్యా $P(x_1,y_1)$ బిందువు ప్రతిబింబం Q(h,k) అయిన $(h-x_1):a=(k-y_1):b=-2(ax_1+by_1+c):(a^2+b^2)$ అని నిరూపించండి.

Sol: • దత్త బిందువులు $P=(x_1,y_1)$,Q=(h,k)

• $\overline{PQ}$ యొక్క వాలు $m_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{k-y_1}{h-x_1}$

• దత్త సరళరేఖ ax+by+c=0 వాలు $m_2=-\frac{a}{b}$

• ఇప్పుడు $m_1m_2=-1$ [∵ 2 రేఖలు పరస్పర లంబం]

$$\Rightarrow\left(\frac{k-y_1}{h-x_1}\right)\left(\cancel{-}\frac{a}{b}\right)=\cancel{-}1\Rightarrow\left(\frac{k-y_1}{h-x_1}\right)\left(\frac{a}{b}\right)=1\Rightarrow\frac{k-y_1}{h-x_1}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{k-y_1}{b}=\frac{h-x_1}{a}$$

• $\frac{h-x_1}{a}=\frac{k-y_1}{b}=r$ ....(1) అనుకొనుము.

$$\therefore\frac{h-x_1}{a}=r\Rightarrow h-x_1=ar\Rightarrow h=x_1+ar$$

$$\frac{k-y_1}{b}=r\Rightarrow k-y_1=br\Rightarrow k=y_1+br$$

ఇప్పుడు, $P=(x_1,y_1)$, Q=(h,k) ⇒

$\overline{PQ}$ యొక్క మధ్య బిందువు $R=\left(\frac{x_1+h}{2},\frac{y_1+k}{2}\right)$

• R బిందువు ax+by+c=0 రేఖపై ఉండును.

$$\Rightarrow a\left(\frac{x_1+h}{2}\right)+b\left(\frac{y_1+k}{2}\right)+c=0\Rightarrow\frac{a(x_1+h)+b(y_1+k)+2c}{2}=0$$

$$\Rightarrow a(x_1+h)+b(y_1+k)+2c=0$$

$$\Rightarrow a[x_1+(x_1+ar)]+b[y_1+(y_1+br)]+2c=0$$

$$\Rightarrow a[2x_1+ar]+b[2y_1+br]+2c=0$$

$$\Rightarrow 2ax_1+a^2r+2by_1+b^2r+2c=0$$

$$\Rightarrow a^2r+b^2r+2ax_1+2by_1+2c=0$$

$$\Rightarrow r(a^2+b^2)=-2(ax_1+by_1+c)\quad\Rightarrow r=\frac{-2(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}\text{............(2)}$$

• (1) & (2) ల నుండి $\frac{h-x_1}{a}=\frac{k-y_1}{b}=\frac{-2(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$

19. $S=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ సమీకరణం ఒక సమాంతర రేఖాయుగ్మాన్ని సూచిస్తే (i) $h^2=ab$ (ii) $af^2=bg^2$ (iii) ఆ సమాంతర రేఖల మధ్య దూరం $2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a(a+b)}}$ or $2\sqrt{\frac{f^2-bc}{b(a+b)}}$ అని చూపండి.

A: ★ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \equiv (lx+my+n_1)(lx+my+n_2)$

• సరూప పదాల గుణకాలను పోల్చగా,

★ $a=l^2,\ b=m^2,\ h=lm,\ 2g=l(n_1+n_2),\ 2f=m(n_1+n_2),\ c=n_1n_2$

★ (i) $h^2=(lm)^2=l^2m^2=ab \Rightarrow h^2=ab$

★

$$\text{(ii)}\quad af^2=l^2\left(\frac{m(n_1+n_2)}{2}\right)^2=\frac{l^2m^2(n_1+n_2)^2}{4}=\frac{m^2l^2(n_1+n_2)^2}{4}=m^2\left(\frac{l(n_1+n_2)}{2}\right)^2=bg^2$$

★(iii)) $lx+my+n_1=0,\ lx+my+n_2=0$ సమాంతర రేఖల మధ్య దూరం $\dfrac{|n_1-n_2|}{\sqrt{l^2+m^2}}$

★ $$=\frac{\sqrt{(n_1+n_2)^2-4n_1n_2}}{\sqrt{a+b}}=\sqrt{\frac{\left(\frac{2g}{l}\right)^2-4c}{a+b}}=\sqrt{\frac{\frac{4g^2}{l^2}-4c}{a+b}}=\sqrt{\frac{\frac{4g^2}{a}-4c}{a+b}}=\sqrt{\frac{4g^2-4ac}{a(a+b)}}=2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a(a+b)}}$$

★ అదేవిధంగా $n_1+n_2=\dfrac{2f}{m}$ ను తీసుకొంటే సరళరేఖల మధ్య దూరం $2\sqrt{\dfrac{f^2-bc}{b(a+b)}}$

20. $2x^2-2xy+3y^2+2x-y-1=0$ వక్రం $x+2y=k$ రేఖల ఖండన బిందువులను మూలబిందువుకు కలిపే రేఖలు పరస్పరం లంబాలయితే k విలువ కనుక్కోండి.

Sol: • దత్తరేఖ $x+2y=k \Rightarrow \frac{x+2y}{k}=1$ ...(1)

• దత్త వక్రం $2x^2-2xy+3y^2+2x-y-1=0$............(2)

• (1) & (2) ల నుండి సమఘాతీకరణ సమీకరణం

★ $2x^2-2xy+3y^2+2x(1)-y(1)-(1)^2=0$

★ $\Rightarrow 2x^2-2xy+3y^2+2x\left(\frac{x+2y}{k}\right)-y\left(\frac{x+2y}{k}\right)-\frac{(x+2y)^2}{k^2}=0$

★ $\Rightarrow \frac{k^2(2x^2-2xy+3y^2)+k(2x^2+4xy)-k(xy+2y^2)-(x^2+4y^2+4xy)}{k^2}=0$

★ $\Rightarrow k^2(2x^2-2xy+3y^2)+k(2x^2+4xy)-k(xy+2y^2)-(x^2+4y^2+4xy)=0$

★ $\Rightarrow x^2(2k^2+2k-1)+y^2(3k^2-2k-4)+xy(-2k^2+3k-4)=0$

• సరళరేఖాయుగ్మాలు పరస్పర లంబాలు అయితే

★ x^2 గుణకం + y^2 గుణకం = 0

• $\Rightarrow (2k^2\cancel{+2k}-1)+(3k^2\cancel{-2k}-4)=0 \Rightarrow 5k^2-5=0$

• $\Rightarrow \cancel{5}(k^2-1)=0 \Rightarrow k^2-1=0 \Rightarrow k^2=1 \Rightarrow k=\pm 1$

కావున, k విలువ ±1

21. సమాంతరంగా లేని రెండు రేఖల దిక్ కొసైన్లు $l+m+n=0$, $l^2+m^2-n^2=0$ సమీకరణాలను తృప్తి పరిస్తే, ఆ రేఖల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.

Sol: • దత్తాంశం నుండి $l+m+n=0$

$\Rightarrow l=-(m+n)$.....(1),

• $l^2+m^2-n^2=0$ ......(2)

• (1) & (2) లను సాధించగా

$[-(m+n)]^2+m^2-n^2=0 \Rightarrow (m^2+\cancel{n^2}+2mn)+m^2-\cancel{n^2}=0$

$\Rightarrow 2m^2+2mn=0 \Rightarrow \cancel{2}(m^2+mn)=0$

$\Rightarrow m^2+mn=0 \Rightarrow m(m+n)=0$

★ $\Rightarrow m=0$ (or) $m+n=0 \Rightarrow m=0$ (or) $m=-n$

•**Case (i)**:

(1) లో $m=0$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$l=-(0+n)=-n \quad \therefore l=-n$

$l:m:n=-\cancel{n}:0:\cancel{n}=-1:0:1$

★ L_1 దిక్ సంఖ్యలు$=(a_1,b_1,c_1)=(-1,0,1)$ ......(3)

Case (ii):

(1) లో $m=-n$ ను ప్రతిక్షేపించగా

$l=-(-n+n)=0 \quad \therefore l=0$

$l:m:n=0:-\cancel{n}:\cancel{n}=0:-1:1$

L_2 యొక్క దిక్ సంఖ్యలు

$=(a_2,b_2,c_2)=(0,-1,1)$......(4)

•(3), (4) నుండి రేఖల మధ్య కోణం

★ $$\cos\theta=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}}=\frac{|(-1)(0)+(0)(-1)+1(1)|}{\sqrt{((-1)^2+0^2+1^2)(0^2+(-1)^2+1^2)}}$$

★ $$=\frac{1}{\sqrt{(2)(2)}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ \Rightarrow \theta=60^\circ$$

కావున రేఖల మధ్య కోణం 60°.

22. $y = x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$ అయిన $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{a^2+x^2}$ అని చూపండి.

A:

- దత్తాంశం నుండి $y = x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\log(x+\sqrt{a^2+x^2})$;
- x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా

★ $$\frac{dy}{dx} = \left[x\frac{d}{dx}\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a^2+x^2}\frac{d}{dx}(x)\right] + a^2\left[\frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{a^2+x^2})\right]$$

★ $$= \left(x\frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}\frac{d}{dx}(a^2+x^2) + (\sqrt{a^2+x^2})(1)\right) + a^2\left(\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\frac{d}{dx}(x+\sqrt{a^2+x^2})\right)$$

- $$= \left(\frac{x}{\cancel{2}\sqrt{a^2+x^2}}(\cancel{2}x) + \sqrt{a^2+x^2}\right) + \left(\frac{a^2}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\right)\left(1+\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{a^2+x^2}}(\cancel{2}x)\right)$$

- $$= \left(\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} + \sqrt{a^2+x^2}\right) + \left(\frac{a^2}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$$

★ $$= \left(\frac{x^2+(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) + \left(\frac{a^2}{\cancel{x+\sqrt{a^2+x^2}}}\right)\left(\frac{\cancel{\sqrt{a^2+x^2}+x}}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$$

- $$= \frac{a^2+2x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

- $$= \frac{a^2+2x^2+a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

- $$= \frac{2a^2+2x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

- $$= \frac{2(a^2+x^2)}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

★ $$= 2\sqrt{a^2+x^2} \quad \left[\because \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}\right]$$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{a^2+x^2}}$$

23. $ax^2+by^2=1$ మరియు $a_1x^2+b_1y^2=1$ అనే వక్రాలు లంబంగా ఖండించుకొనే నియమంను రాబట్టుము

Sol: 1) ఖండన బిందువు కనుగొనుట:

- దత్త వక్రాల ఖండన బిందువు $P(x_1,y_1)$ అనుకొనుము.
- కావున $P(x_1,y_1)$ అనే బిందువు $ax^2+by^2=1$ మరియు $a_1x^2+b_1y^2=1$ వక్రాల మీద ఉండును.

★ $\Rightarrow ax_1^2+by_1^2=1$ and $a_1x_1^2+b_1y_1^2=1$

★ $\Rightarrow ax_1^2+by_1^2=a_1x_1^2+b_1y_1^2 \Rightarrow ax_1^2-a_1x_1^2=b_1y_1^2-by_1^2 \Rightarrow x_1^2(a-a_1)=y_1^2(b_1-b)$

★ $\Rightarrow \dfrac{x_1^2}{y_1^2}=\dfrac{b_1-b}{a-a_1}=\dfrac{-(b-b_1)}{a-a_1}$ ....(1)

2) అవకలనులు మరియు వాలులను కనుగొనుట:

- $ax^2+by^2=1$ ను x దృష్ట్యా అవకలనం చేయగా
- $2ax+2by\dfrac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{ax}{by}$

★ కావున $P(x_1,y_1)$ వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు $m_1=-\dfrac{ax_1}{by_1}$

★ అదేవిధంగా $m_2=-\dfrac{a_1x_1}{b_1y_1}$ వచ్చును.

3) లంబ నియమాన్ని వర్తింపచేయగా :

★ కానీ $m_1m_2=-1$ [∵ వక్రాలు లంబంగా ఖండించుకొన్నప్పుడు]

★ $\Rightarrow \left(\dfrac{-ax_1}{by_1}\right)\left(\dfrac{-a_1x_1}{b_1y_1}\right)=-1 \Rightarrow \dfrac{aa_1x_1^2}{bb_1y_1^2}=-1 \Rightarrow \dfrac{x_1^2}{y_1^2}=\dfrac{-bb_1}{aa_1}$ ....(2)

★ (1), (2) లను సమానం చేయగా, $\dfrac{bb_1}{aa_1}=\dfrac{b-b_1}{a-a_1} \Rightarrow \dfrac{a-a_1}{aa_1}=\dfrac{b-b_1}{bb_1}$

- $\Rightarrow \dfrac{\cancel{a}}{\cancel{a}a_1}-\dfrac{\cancel{a_1}}{a\cancel{a_1}}=\dfrac{\cancel{b}}{\cancel{b}b_1}-\dfrac{\cancel{b_1}}{b\cancel{b_1}}$

★ $\Rightarrow \dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b_1}-\dfrac{1}{b} \Rightarrow \dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{b_1}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$

ఇదే దత్త వక్రాలు లంబంగా ఖండించుకునే నియమం.

24. $f(x) = \cos 4x \ \forall\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ కి స్థానిక అంత్య బిందువులు, స్థానిక అంత్య విలువలను కనుక్కోండి.

Sol: $\therefore f'(x) = -4\sin 4x$ మరియు $f''(x) = -16\cos 4x$

విరామ బిందువులు $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ అంతరంలో $f'(x) = 0$ యొక్క మూలాలు అగును.

$f'(x) = 0 \Rightarrow -4 \sin 4x = 0 \Rightarrow \sin 4x = 0$

$\Rightarrow 4x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \ldots\ldots\ldots\ldots$

ఇచ్చిన అంతరంలో ఉన్న బిందువు $x = \frac{\pi}{4}$ మాత్రమే.

కావున $x = \frac{\pi}{4}$ అనునది దత్త ప్రమేయమునకు ఒక విరామ బిందువు.

ఇప్పుడు $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -16\cos 4\left(\frac{\pi}{4}\right) = -16\pi = -16(-1) = 16 > 0.$

$\therefore\ x = \frac{\pi}{4}$ వద్ద దత్త ప్రమేయమునకు స్థానిక కనిష్టం ఉండును

స్థానిక కనిష్ట విలువ $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos 4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \pi = -1$