JR MATHS-1A (TM)

Previous IPE

SOLVED PAPERS

MARCH-2019 (AP)

PREVIOUS PAPERS

IPE: MARCH-2019(AP)

Time : 3 Hours **గణితశాస్త్రం -1A** **Max.Marks : 75**

సెక్షన్-ఎ

I. ఈ క్రింది అన్ని అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి: 10 x 2 =20

1. If $A=\{-2,-1,0,1,2\}$, $f:A\to B$ సంగ్రస్త ప్రమేయం మరియు $f(x)=x^2+x+1$ అయిన B ను కనుగొనుము.

2. $\forall x\in R$ నకు $f(x)=2x-1$, $g(x)=\dfrac{x+1}{2}$ అయిన $(gof)(x)$ ను కనుగొనుము.

3. $\begin{bmatrix} x-3 & 2y-8 \\ z+2 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & a-4 \end{bmatrix}$ అయిన x, y,z,a విలువలు కనుగొనుము. **4.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ యొక్క కోటిని కనుగొనుము.

5. $\bar{a}=2\bar{i}+4\bar{j}-5\bar{k}, \bar{b}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}, \bar{c}=\bar{j}+2\bar{k}$ అయిన $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ నకు వ్యతిరేక దిశలోని యూనిట్ సదిశ కనుగొనుము.

6. $\bar{i}-2\bar{j}+5\bar{k}, -5\bar{j}-\bar{k}, -3\bar{i}+5\bar{j}$ అనే బిందువుల గుండా పోయే తలం యొక్క సదిశా సమీకరణం కనుగొనుము.

7. $\lambda\bar{i}-3\bar{j}+5\bar{k}$, $2\lambda\bar{i}-\lambda\bar{j}-\bar{k}$ అనే సదిశలు లంబంగా ఉన్న λ విలువ కనుగొనుము.

8. $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$, θ మొదటి పాదములో లేకపోతే $\cos\theta$ విలువను కనుక్కోండి.

9. θ అనేది $\pi/2$ పూర్ణాంక గుణిజం కాకపోతే $\tan\theta+2\tan 2\theta+4\tan 4\theta+8\cot 8\theta=\cot\theta$ అని నిరూపించండి.

10. $\text{Tanh}^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\log_e 3$ అని చూపండి.

సెక్షన్-బి

II. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు స్వల్పసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. 5 x 4 =20

11. $A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ అయిన $\text{adj}\,A=3A^T$ అని చూపండి. మరియు A^{-1} కనుగొనండి.

12. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ లు అతలీయ సదిశలైతే $6\bar{a}-4\bar{b}+4\bar{c}, -4\bar{c}$ బిందువులకు కలిపే రేఖ, $-\bar{a}-2\bar{b}-3\bar{c}, \bar{a}+2\bar{b}-5\bar{c}$ బిందువులను కలిపే రేఖల బిందువు $-4\bar{c}$ అని చూపుము.

13. $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}, \bar{b}=-\bar{i}+2\bar{j}-4\bar{k}, \bar{c}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$ అయిన $(\bar{a}\times\bar{b}).(\bar{b}\times\bar{c})$ ను కనుగొనుము.

14. $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{10}\right)\left(1+\cos\dfrac{3\pi}{10}\right)\left(1+\cos\dfrac{7\pi}{10}\right)\left(1+\cos\dfrac{9\pi}{10}\right)=\dfrac{1}{16}$ అని నిరూపించండి.

15. $p\neq\pm q, \cos p\theta+\cos q\theta=0$ అని సమీకరణం సాధనలు 2 అంక శ్రేఢులు అవుతాయని చూపి, వాటి పదాంతరాన్ని కనుక్కోండి

16. $\text{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2}+\text{Tan}^{-1}\dfrac{1}{5}+\text{Tan}^{-1}\dfrac{1}{8}=\dfrac{\pi}{4}$ అని నిరూపించండి. **17.** $a=(b+c)\cos\theta$ అయిన $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cos\left(\dfrac{A}{2}\right)$ అని చూపుము.

సెక్షన్-సి

III. క్రింది వాటిలో ఏవేని ఐదు దీర్ఘసమాధాన ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయండి. 5 x7 = 35

18. . $f:A\to B, g:B\to C$ లు ద్విగుణ ప్రమేయాలు అయిన $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ అని నిరూపించండి.

19. గణితాను గమన సిద్ధాంతమునుపయోగించి $a+ar+ar^2+....+n$ పదాలు= $=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}, r\neq 1$ అని చూపుము.

20. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix}=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$ అని చూపండి.

21. $x-y+3z=5, 4x+2y-z=0, -x+3y+z=5$ ను క్రామర్ పద్ధతినసాధించండి.

22. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ లు సహావసానికి భుజాలుగా గల చతుర్ముఖి ఘనపరిమాణం $\dfrac{1}{6}\left|[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}]\right|$. అని చూపండి.

23. $A+B+C=180^\circ$ అయిన $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=-4\sin A\sin B\sin C$ అని చూపండి.

24. ΔABC లో $a=13, b=14, c=15$ అయిన $R=\dfrac{65}{8}, r=4, r_1=\dfrac{21}{2}, r_2=12, r_3=14$ అని చూపండి.

IPE AP MARCH-2019
SOLUTIONS

సెక్షన్-ఎ

1. $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ $f:A\to B$ సంగ్రస్త ప్రమేయం మరియు $f(x)=x^2+x+1$ అయిన B ను కనుగొనుము.

Sol: దత్తాంశం నుండి $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ మరియు $f(x)=x^2+x+1$

$\therefore f(-2)=(-2)^2-2+1=4-2+1=3;$

$f(-1)=(-1)^2-1+1=1;$

$f(0)=0^2+0+1=1;$

$f(1)=1^2+1+1=3;$

$f(2)=2^2+2+1=7$

$\therefore B=f(A)=\{3,1,1,3,7\}=\{3,1,7\}$

[$\because$ సంగ్రస్తము ప్రమేయమునకు వ్యాప్తి $f(A)=$ సహప్రదేశము B]

---

2. $\forall x\in R$ నకు $f(x)=2x-1$, $g(x)=\dfrac{x+1}{2}$ అయిన (i) $(gof)(x)$ (ii) $(fog)(x)$ ను కనుగొనుము.

A: (i) $(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x-1) = \dfrac{(2x-1)+1}{2} = \dfrac{2x}{2} = x$

(ii) $(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = \cancel{2}\left(\dfrac{x+1}{\cancel{2}}\right) - 1 = x+1-1 = x$

---

3. $\begin{bmatrix} x-3 & 2y-8 \\ z+2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & a-4 \end{bmatrix}$ అయిన x, y, z, a విలువలు కనుగొనుము

A: దత్తాంశం నుండి $\begin{bmatrix} x-3 & 2y-8 \\ z+2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & a-4 \end{bmatrix}$

అనురూప మూలకాలను సమానం చేయగా $x-3=5 \Rightarrow x=5+3=8;$ $2y-8=2$

$\Rightarrow 2y = 2 + 8 \Rightarrow \cancel{2}y=\cancel{10} \Rightarrow y = 5$

$z + 2 = -2 \Rightarrow z = -2 -2 = -4;$ $a - 4 = 6 \Rightarrow a = 6 + 4 \Rightarrow a = 10$

$\therefore x = 8, y = 5, z = -4, a = 10$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **యొక్క కోటిని కనుగొనుము.**

A: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1(6-4)-2(4-0)+3(2-0)=2-8+6=0$

$\therefore\ |A| = 0.$

2×2 లఘు నిర్ధారకం $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3-4=-1\neq 0$ $\quad\therefore$ కోటి (A) = 2.

---

5. $\bar{a}=2\bar{i}+4\bar{j}-5\bar{k}, \bar{b}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}, \bar{c}=\bar{j}+2\bar{k}$ **అయిన** $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ **నకు వ్యతిరేక దిశలోని యూనిట్ సదిశ కనుగొనుము.**

A: దత్తాంశం నుండి $\bar{a}=2\bar{i}+4\bar{j}-5\bar{k}, \bar{b}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}, \bar{c}=0\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$ అయిన $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$

$=(2\bar{i}+4\bar{j}-5\bar{k})+(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k})+(0\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}) \quad =3\bar{i}+6\bar{j}-2\bar{k}$

$\Rightarrow |\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|=\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2} \quad =\sqrt{9+36+4}=\sqrt{49}=7$

$\therefore$ కావలసిన యూనిట్ సదిశ $=\dfrac{-(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})}{|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|} \quad =\dfrac{-(3\bar{i}+6\bar{j}-2\bar{k})}{7}$

---

6. $\bar{i}-2\bar{j}+5\bar{k}, \quad -5\bar{j}-\bar{k}, -3\bar{i}+5\bar{j}$ **అనే బిందువులు గుండా పోయే తలం యొక్క సదిశా సమీకరణం కనుక్కోండి.**

A: దత్త బిందువులు $A(\bar{a})=\bar{i}-2\bar{j}+5\bar{k},\ B(\bar{b})=-5\bar{j}-\bar{k},\ C(\bar{c})=-3\bar{i}+5\bar{j}$

తలం యొక్క సదిశా సమీకరణం $\bar{r}=(1-s-t)\bar{a}+s\bar{b}+t\bar{c},\ s,t\in R$

$\therefore\ \bar{r}=(1-s-t)(\bar{i}-2\bar{j}+5\bar{k}) \quad +s(-5\bar{j}-\bar{k})+t(-3\bar{i}+5\bar{j}),\ s,t\in R$

7. $\lambda\bar{i}-3\bar{j}+5\bar{k},\ 2\lambda\bar{i}-\lambda\bar{j}-\bar{k}$ **అనే సదిశలు లంబంగా ఉన్న λ విలువ కనుగొనుము.**

A: t $\bar{a}=\lambda\bar{i}-3\bar{j}+5\bar{k}, \bar{b}=2\lambda\bar{i}-\lambda\bar{j}-\bar{k}$

దత్తాంశం నుండి $\bar{a}\perp\bar{b}\Rightarrow\bar{a}.\bar{b}=0$

$\therefore(\lambda\bar{i}-3\bar{j}+5\bar{k}).(2\lambda\bar{i}-\lambda\bar{j}-\bar{k})=0$

$\Rightarrow\lambda(2\lambda)-3(-\lambda)+5(-1)=0$

$\Rightarrow 2\lambda^2+3\lambda-5=0\ \Rightarrow(\lambda-1)(2\lambda+5)=0$

$\Rightarrow(\lambda-1)=0\Rightarrow\lambda=1$ (or) $(2\lambda+5)=0$

$\Rightarrow 2\lambda=-5\Rightarrow\lambda=\frac{-5}{2}$

$\therefore\lambda=1 \text{ or } -5/2$

---

8. **$\sin\theta=4/5$, θ మొదటి పాదంలో లేకపోతే $\cos\theta$ విలువను కనుక్కోండి.**

Sol: దత్తాంశం నుండి $\sin\theta=4/5$ అనునది ధనాత్మకం మరియు θ అనునది 1వ పాదంలో లేదు.
కావునθ అనునది 2వ పాదంలో ఉండును మరియు $\cos\theta$ ఋణాత్మకం

$$\therefore\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\sqrt{\frac{25-16}{25}}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

---

9. **θ అనేది $\frac{\pi}{2}$ పూర్ణాంక గుణిజం కాకపోతే $\tan\theta+2\tan2\theta+4\tan4\theta+8\cot8\theta=\cot\theta$ అని నిరూపించండి.**

A: $\tan A=\cot A-2\cot 2A$ అని మనకు తెలుసు.

$\therefore$ L.H.S $=\tan\theta+2\tan2\theta+4\tan4\theta+8\cot8\theta$

$=(\cot\theta-2\cot2\theta)+2(\cot2\theta-2\cot4\theta)+4(\cot4\theta-2\cot8\theta)+8\cot8\theta.$

$=\cot\theta-2\cot2\theta+2\cot2\theta-4\cot4\theta+4\cot4\theta-8\cot8\theta+8\cot8\theta$

$=\cot\theta=$ R.H.S

---

10. $\mathrm{Tanh}^{-1}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\log_e 3$ **అని చూపించండి.**

A: $\mathrm{Tanh}^{-1}x=\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ అని మనకు తెలుసు.

$$\therefore\mathrm{Tanh}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{\frac{3}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}\right)=\frac{1}{2}\log_e(3)$$

సెక్షన్-బి

11. $A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$ **అయిన $adj\,A=3A^T$ అని చూపండి. మరియు A^{-1} కనుగొనండి.**

A: దత్తాంశం నుండి $A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \det A=-1\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}$

$$=-(1-4)+2(2+4)-2(-4-2)=3+2(6)+2(6)=3+12+12=27$$

$$\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-2 & -2\\ 1 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -6 & -6\\ 6 & 3 & -6\\ 6 & -6 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow Adj\,A=\begin{bmatrix}-3 & 6 & 6\\ -6 & 3 & -6\\ -6 & -6 & 3\end{bmatrix}\text{-----}(1)$$

మరియు, $A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow 3A^T=3\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 6 & 6\\ -6 & 3 & -6\\ -6 & -6 & 3\end{bmatrix}\text{---}(2)$

$\therefore$ (1) & (2) ల నుండి ; $Adj\,A=3A^T$

ఇప్పుడు, $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}(AdjA)=\dfrac{1}{27}\begin{bmatrix}-3 & 6 & 6\\ -6 & 3 & -6\\ -6 & -6 & 3\end{bmatrix}=\dfrac{3}{27}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{9}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$

---

12. **$6\bar{a}-4\bar{b}+4\bar{c},\ -4\bar{c}$ అనే రెండు బిందువులను కలిపే సరళరేఖ మరియు $-\bar{a}-2\bar{b}-3\bar{c},\ \bar{a}+2\bar{b}-5\bar{c}$ అనే రెండు బిందువులను కలిపే సరళరేఖ $-4\bar{c}$ అనే బిందువు వద్ద ఖండించుకొనునని చూపుము.**

Sol: $P=-4\bar{c}\ ,Q=6\bar{a}-4\bar{b}+4\bar{c}$

P,Q అనే బిందువుల గుండా పోవు సరళరేఖా సమీకరణం

$\bar{r}=(1-t)(-4\bar{c})+t(6\bar{a}-4\bar{b}+4\bar{c}),\ t\in R \Rightarrow \bar{r}=(6t)\bar{a}-(4t)\bar{b}+(8t-4)\bar{c}$ ....(1)

$T=-\bar{a}-2\bar{b}-3\bar{c}\ ,\ S=\bar{a}+2\bar{b}-5\bar{c}$

T,S అనే బిందువుల గుండా పోవు సరళరేఖా సమీకరణం

$\bar{r}=(1-s)(-\bar{a}-2\bar{b}-3\bar{c})+s(\bar{a}+2\bar{b}-5\bar{c}),\ s\in R \Rightarrow \bar{r}=(2s-1)\bar{a}+(4s-2)\bar{b}+(-2s-3)\bar{c}$ ....(2)

$P(\bar{r})$ వద్ద రెండు సరళరేఖలు ఖండించుకున్నచో (1) & (2) నుండి

$(6t)\bar{a}-(4t)\bar{b}+(8t-4)\bar{c}=(2s-1)\bar{a}+(4s-2)\bar{b}+(-2s-3)\bar{c}$

$\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ లు అతలీయాలు కావున $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ యొక్క గుణకాలను సమానం చేయగా

$6t = 2s-1 \Rightarrow 6t-2s=-1$ ....(3) $-4t = 4s-2 \Rightarrow 4t+4s=2$ ....(4)

$8t-4 = -2s-3 \Rightarrow 8t+2s=1$ ......(5)

(3) & (5) లను కలుపగా $14t+0=0 \Rightarrow 14t=0 \Rightarrow t=0$

$\therefore$ $t=0$ విలువను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా, దత్త రేఖల ఖండన బిందువు $-4\bar{c}$ అగును.

---

13. $\bar{a} = 2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}, \bar{b} = -\bar{i}+2\bar{j}-4\bar{k}, \bar{c} = \bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$ **అయిన** $(\bar{a}\times\bar{b}).(\bar{b}\times\bar{c})$ **ను కనుగొనుము.**

A: దత్తాంశం నుండి $\bar{a} = 2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}, \bar{b} = -\bar{i}+2\bar{j}-4\bar{k}$ and $\bar{c} = \bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$

$$\bar{a}x\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \bar{i}(-4+2)-\bar{j}(-8-1)+\bar{k}(4+1) = -2\bar{i}+9\bar{j}+5\bar{k}$$

$$\bar{b}x\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i}(2+4)-\bar{j}(-1+4)+\bar{k}(-1-2) = 6\bar{i}-3\bar{j}-3\bar{k}$$

$$(\bar{a}x\bar{b}).(\bar{b}x\bar{c}) = (-2\bar{i}+9\bar{j}+5\bar{k}).(6\bar{i}-3\bar{j}-3\bar{k}) = (-2)(6)+(9)(-3)+5(-3) = -12-27-15 = -54$$

$$\therefore (\bar{a}x\bar{b}).(\bar{b}x\bar{c}) = -54$$

---

14. $\left(1+\cos\frac{\pi}{10}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{10}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{10}\right)\left(1+\cos\frac{9\pi}{10}\right) = \frac{1}{16}$ **అని నిరూపించండి.**

A: L.H.S $= \left(1+\cos\frac{\pi}{10}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{10}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{10}\right)\left(1+\cos\frac{9\pi}{10}\right)$

$$= (1+\cos 18^\circ)(1+\cos 54^\circ)(1+\cos 126^\circ)(1+\cos 162^\circ)$$

$$= (1+\cos 18^\circ)(1+\cos 54^\circ)(1+\cos(180^\circ-54^\circ))(1+\cos(180^\circ-18^\circ))$$

$$= (1+\cos 18^\circ)(1+\cos 54^\circ)(1-\cos 54^\circ)(1-\cos 18^\circ) = (1-\cos^2 18^\circ)(1-\cos^2 54^\circ)$$

$$= \sin^2 18^\circ \sin^2 54^\circ = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = \left(\frac{5-1}{16}\right)^2 = \left(\frac{\cancel{4}}{\cancel{16}}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} = \text{R.H.S}$$

15. **$p\neq\pm q$ అయినప్పుడు $\cos p\theta+\cos q\theta=0$ యొక్క సాధనల రెండు శ్రేణులు అంకశ్రేఢిలో ఉండునని చూపండి. మరియు ఆ అంకశ్రేఢి యొక్క పదాంతరమును కనుగొనుము.**

Sol : దత్త సమీకరణం $\cos p\theta+\cos q\theta = 0$

$$\Rightarrow 2\cos\left[\left(\frac{p+q}{2}\right)\theta\right]\cos\left[\left(\frac{p-q}{2}\right)\theta\right]=0$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\theta=0 \text{ (లేక) } \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\theta=0$$

$$\text{(i) } \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\theta=0=\cos\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{p+q}{2}\right)\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}=(4n\pm1)\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\theta=\frac{(4n\pm1)\pi}{(p+q)},n\in Z$$

$\ldots\ldots,-\frac{\pi}{p+q},\frac{\pi}{p+q},\frac{3\pi}{p+q},\frac{5\pi}{p+q},\ldots.$ అనే సాధనలు అంకశ్రేఢిలో కలవు మరియు

పదాంతరం $\frac{2\pi}{(p+q)}$

$$\text{(ii) } \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\theta=0=\cos\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{p-q}{2}\right)\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}=(4n\pm1)\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\theta=\frac{(4n\pm1)\pi}{(p-q)},n\in Z$$

$\ldots\ldots,-\frac{\pi}{p-q},\frac{\pi}{p-q},\frac{3\pi}{p-q},\frac{5\pi}{p-q},\ldots.$ అనే సాధనలు అంకశ్రేఢిలో కలవు మరియు పదాంతరం $\frac{2\pi}{(p-q)}$

16. $\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2}+\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5}+\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$ అని నిరూపించండి.

A: $\mathrm{Tan}^{-1}x+\mathrm{Tan}^{-1}y=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

$$\therefore \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2}+\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5}=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}.\frac{1}{5}}\right)=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\frac{5+2}{\cancel{10}}}{\frac{10-1}{\cancel{10}}}\right)=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{7}{9}$$

$$\therefore \text{L.H.S}=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{7}{9}+\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{8}$$

$$=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}.\frac{1}{8}}\right)=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{\frac{56+9}{\cancel{72}}}{\frac{72-7}{\cancel{72}}}\right)=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{65}{65}\right)=\mathrm{Tan}^{-1}1=\frac{\pi}{4}=\text{R.H.S}$$

---

17. $a=(b+c)\cos\theta$, అయిన $\sin\theta=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cos\left(\frac{A}{2}\right)$ అని నిరూపించండి.

A: $a=(b+c)\cos\theta,\ \cos\theta=\frac{a}{b+c}\Rightarrow\cos^2\theta=\frac{a^2}{(b+c)^2}$

$$\therefore \sin^2\theta=1-\cos^2\theta$$

$$=1-\frac{a^2}{(b+c)^2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}=\frac{(b^2+c^2+2bc)-a^2}{(b+c)^2}$$

$$=\frac{2bc+(b^2+c^2-a^2)}{(b+c)^2}=\frac{2bc+2bc\cos A}{(b+c)^2}\qquad\left(\because\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos A\right)$$

$$=\frac{2bc(1+\cos A)}{(b+c)^2}=\frac{2bc.\left(2\cos^2\frac{A}{2}\right)}{(b+c)^2}=\frac{4bc\cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cos\left(\frac{A}{2}\right)$$

సెక్షన్-బి

18. $f:A\to B$, $g:B\to C$ లు ద్విగుణ ప్రమేయాలు అయిన $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ అని నిరూపించండి.

Sol: **Part -1:** $f:A\to B$, $g:B\to C$ లు రెండు ద్విగుణ ప్రమేయాలు

(i) $gof:A\to C$ ద్విగుణ ప్రమేయం. కావున $(gof)^{-1}: C\to A$ కూడా ద్విగుణ ప్రమేయమగును.

(ii) $f^{-1}:B\to A$, $g^{-1}:C\to B$ లు రెండు ద్విగుణ ప్రమేయాలు$\Rightarrow (f^{-1}og^{-1}): C\to A$ కూడా ద్విగుణ ప్రమేయం

కావున $(gof)^{-1}$ మరియు $f^{-1}og^{-1}$ లకు ఒకే ప్రదేశం 'C' కలదు.

Part–2: $f:A\to B$ ద్విగుణ ప్రమేయం కావున $f(a)=b\Rightarrow a=f^{-1}(b)$........(1), [ఇక్కడ $a\in A$, $b\in B$]

$g:B\to C$ ద్విగుణ ప్రమేయం కావున $g(b)=c\Rightarrow b=g^{-1}(c)$........(2), [ఇక్కడ $b\in B$, $c\in C$]

$gof:A\to C$ ద్విగుణ ప్రమేయం కావున $gof(a)=c \Rightarrow a=(gof)^{-1}(c)$.........(3)

ఇప్పుడు, $(f^{-1}og^{-1})(c)=f^{-1}[g^{-1}(c)]=f^{-1}(b)=a$ ....(4), [(1) & (2) ల నుండి]

$\therefore (gof)^{-1}(c)=(f^{-1}og^{-1})(c), \forall c\in C$, [(3) & (4) ల నుండి]

కావున $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ అని నిరూపించబడినది.

---

19. గణితాను గమన సిద్ధాంతమునుపయోగించి $a+ar+ar^2+....+n$ పదాలు$=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}, r\neq 1$ అని చూపుము.

Sol : మొదట n వ పదాన్ని కనుగొనాలి.

$a, ar, ar^2 ... ar^{n-1}$ లు గుణశ్రేఢిలో ఉన్నవి కాబట్టి n వ పదము $T_n=ar^{n-1}$

$S(n):a+ar+ar^2+....+ar^{n-1}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ అనుకొనుము.

స్టెప్ 1: L.H.S లో $S(1)=a$ మరియు R.H.S లో $S(1)=\dfrac{a(r^1-1)}{r-1}=a$

L.H.S లో $S(1)=$ R.H.S లో $S(1)\Rightarrow S(1)$ నిజము.

స్టెప్ 2: ప్రతి $k\in N$ వద్ద $S(k)$ నిజమనుకున్న $S(k): a+ar+ar^2+...+ar^{k-1}=\dfrac{a(r^k-1)}{r-1}$ ....(1)

స్టెప్ 3: $S(k+1)$ నిజమని చూపాలి.

$$S(k+1):(a+ar+ar^2+....+ar^{k-1})+ar^{k+1-1}=\frac{a(r^{k+1}-1)}{r-1}$$

ఇప్పుడు, L.H.S లోని, $S(k+1)=(a+ar+ar^2+....+ar^{k-1})+ar^k=\dfrac{a(r^k-1)}{r-1}+ar^k$ [(1) నుండి]

$$=\frac{a(r^K-1)+(r-1)ar^K}{r-1}=\frac{ar^K-a+rar^K-ar^K}{r-1}=\frac{r.ar^K-a}{r-1}$$

$$=\frac{a.r^{k+1}-a}{r-1}=\frac{a(r^{k+1}-1)}{r-1}=\text{R.H.S}$$

$\therefore$ L.H.S లోని $S(k+1)=$ R.H.S లోని $S(k+1)$ కాబట్టి $S(k)$ నిజమైనపుడల్లా $S(k+1)$ నిజము.

గణితానుగమన సిద్ధాంతము నుండి ప్రతి $n\in N$ వద్ద ఇచ్చిన ప్రవచనము నిజము.

20. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = (a^3+b^3+c^3-3abc)^2$ **అని చూపండి.**

A: $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ అనుకొనుము

$= a(bc-a^2) - b(b^2-ac) + c(ab-c^2)$

$= abc - a^3 - b^3 + abc + abc - c^3$

$= -(a^3+b^3+c^3-3abc)$

$\Rightarrow \Delta^2 = (a^3+b^3+c^3-3abc)^2$ ....(1)

మరల $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

మొదటి నిర్ధారకము మీద C_{23} ను అనువర్తించగా

$= -\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -a & c & b \\ -b & a & c \\ -c & b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -a^2+cb+bc & \cancel{-ab}+c^2\cancel{+ab} & \cancel{-ac}+\cancel{ac}+b^2 \\ \cancel{-ab}\cancel{+ab}+c^2 & -b^2+ac+ca & \cancel{-bc}+a^2+\cancel{cb} \\ \cancel{-ca}+b^2\cancel{+ac} & \cancel{-cb}\cancel{+bc}+a^2 & -c^2+ba+ab \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix}$ ....(2)

(1), (2) లనుండి ఇచ్చిన ఫలితము నిరూపించబడినది.

21. **$x - y + 3z = 5,\ 4x + 2y - z = 0,\ x + 3y + z = 5$ రేఖీయ సమీకరణాలను క్రామర్ పద్ధతిన సాధించండి.**

Sol: ఇచ్చిన సమీకరణ వ్యవస్థను మాత్రిక సమీకరణ రూపంలో వ్రాయగా $AX = D$, ఇక్కడ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2+3) + 1(4+1) + 3(12-2)$$

$$= 5 + 5 + 30 = 40 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 5(2\times1 - (-1)\times3) + 1(0\times1 - (-1)\times5) + 3(0\times3 - 5\times2)$$

$$= 25 + 5 - 30 = 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0\times1 - (-1)\times5) - 5(4\times1 - (-1)\times1) + 3(4\times5 - 0\times1)$$

$$= 5 - 25 + 60 = 40;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2\times5 - 0\times3) + 1(4\times5 - 0\times1) + 5(4\times3 - 2\times1)$$

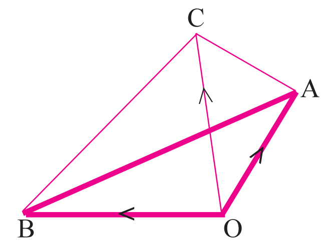
$$= 10 + 20 + 50 = 80$$

$\therefore$ క్రామర్ పద్ధతి ప్రకారం,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{40} = 0;\ \ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{40}{40} = 1 \text{ and } z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{80}{40} = 2$$

$\therefore$ సాధన $x=0, y=1, z=2$

22. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ లు సహావసానికి భుజాలుగా గల చతుర్ముఖి ఘనపరిమాణం $\frac{1}{6}\left|\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]\right|$ అని చూపండి.



Sol: చతుర్ముఖి OABC యొక్క సహావసానిక భుజాలు

$\overline{OA} = \bar{a}, \overline{OB} = \bar{b}, \overline{OC} = \bar{c}$ అయిన

OABC యొక్క ఘనపరిమాణం

$V = \frac{1}{3}$(ΔOAB వైశాల్యం) × (C నుండి OAB తలం పైకి గల లంబదూరం)

ΔOAB వైశాల్యం $= \frac{1}{2}(\bar{a} \times \bar{b})$

C నుండి OAB తలం పైకి గల లంబదూరం= C నుండి $\bar{a} \times \bar{b}$ దిశలో గల ప్రతిక్షేపణ

$$= \frac{(\bar{a} \times \bar{b}).\bar{c}}{|\bar{a} \times \bar{b}|} = \frac{[\bar{a}\bar{b}\bar{c}]}{|\bar{a} \times \bar{b}|}$$

$$\therefore V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|\frac{[\bar{a}\bar{b}\bar{c}]}{|\bar{a} \times \bar{b}|}\right) = \frac{1}{6}|[\bar{a}\bar{b}\bar{c}]|$$

---

23. **A+B+C=180° అయిన sin2A+sin2B+sin2C = – 4sinAsinBsinC అని చూపండి.**

Sol: L.H.S = sin2A+sin2B+sin2C

$$= 2\sin\left(\frac{2A+2B}{2}\right)\cos\left(\frac{2A-2B}{2}\right) + \sin 2C \quad \left(\because \sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\right)$$

$= 2\sin(A+B)\cos(A-B)+\sin 2C$

$= 2 \sin(0-C) \cos(A-B)+\sin 2C \quad [\because A+B+C=0]$

$= -2\sin C \cos(A-B)+2\sin C\cos C \quad [\because \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta]$

$= -2\sin C[\cos(A-B)-\cos C]$

$= -2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$

$= -2\sin C\ (2\sin A \sin B) \qquad [\because \cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B]$

$= -4\sin A \sin B \sin C$ = R.H.S

24. ΔABC లో $a = 13, b = 14, c = 15$ అయిన $R = \frac{65}{8}, r = 4, r_1 = \frac{21}{2}, r_2 = 12, r_3 = 14$ అని చూపండి.

A: దత్తాంశం నుండి $a = 13, b = 14, c = 15$

$$2s = a + b + c = 13 + 14 + 15 = 42 \Rightarrow \cancel{2}s = \cancel{42} \Rightarrow s = 21$$

ఇప్పుడు $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$

$$= \sqrt{21 \times (8)(7)(6)} = \sqrt{(3\times7)(4\times2)(7)(3\times2)} = \sqrt{3^2 \times 4^2 \times 7^2} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

(i) $R = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{13 \times 14 \times 15}{4 \times 84} = \frac{65}{8}$

(ii) $r = \frac{\Delta}{s} = \frac{\cancel{84}}{\cancel{21}} = 4$;

(iii) $r_1 = \frac{\Delta}{s-a} = \frac{84}{21-13} = \frac{\cancel{84}}{\cancel{8}} = \frac{21}{2}$

(iv) $r_2 = \frac{\Delta}{s-b} = \frac{84}{21-14} = \frac{\cancel{84}}{\cancel{7}} = 12$

(v) $r_3 = \frac{\Delta}{s-c} = \frac{84}{21-15} = \frac{\cancel{84}}{\cancel{6}} = 14$